UNIVERSITÄT BONN

MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Sekundarstufe 2
Stochastik

- Datenerhebung
- Binomialverteilung
- Erwartungswert
- Standardabweichung
- Sigma-Regeln

Material
Schreibmaterial, Stoppuhr, grafikfähiger Taschenrechner

Zeit
90 Minuten

Lernort
Radweg

Helm auf und los!

Statistische Verkehrsbeobachtung

Viele Menschen sind gerne mit dem Fahrrad unterwegs. Sie stärken damit ihren Körper und schonen gleichzeitig die Umwelt. Doch leider kommt es auch regelmäßig zu Unfällen. Im Jahr 2020 wurden in Deutschland 91.533 Fahrradunfälle mit Personenschaden gemeldet.[1] Die Deutsche Gesellschaft für Orthopädie und Unfallchirurgie empfiehlt Radfahrerinnen und Radfahrern, einen Fahrradhelm zu tragen, weil tödliche Hirnverletzungen dadurch um 60 bis 70 Prozent reduziert werden können.[2]

[1] Vgl. Statistisches Bundesamt, Kraftrad- und Fahrradunfälle im Straßenverkehr 2020
[2] Pressemitteilung der Deutschen Gesellschaft für Orthopädie und Unfallchirurgie vom 16.04.22

A1 Platziert euch zu zweit neben dem Radweg. Ermittelt in einem Zeitraum von zehn Minuten die relative Häufigkeit der Radfahrerinnen und Radfahrer, die einen Helm tragen.

A2 Interpretiere im Folgenden die relative Häufigkeit der helmtragenden Personen als die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass jemand einen Helm trägt. Ist dies die tatsächliche Wahrscheinlichkeit? Wenn ja, warum? Wenn nein, wie ließe sich der Fehler minimieren? Welches Gesetz liegt dem zugrunde?

A3 Diskutiert in der Gruppe, warum es sinnvoll ist, die Anzahl der helmtragenden Personen als binomialverteilte Zufallsgröße zu modellieren. Was spricht für diese Modellannahme, was dagegen?

Gegeben sei nun also die (n,p)-binomialverteilte Zufallsgröße X = „Anzahl der Radfahrenden, die einen Helm tragen", wobei n jeweils die Anzahl der betrachteten Personen ist und die Erfolgswahrscheinlichkeit p aus Aufgabenteil **A** übernommen werden soll.

B1 Schätze begründet, wie viele Fahrräder heute schon deinen Standort passiert haben.

B2 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass heute weniger als die Hälfte der Radfahrenden hier einen Helm trug?

B3 Berechne die geschätzte Anzahl an Personen, die hier heute bislang mit einem Helm vorbeigekommen sind. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau die erwartete Anzahl an Personen mit einen Helm fuhr. Begründe, warum das Ergebnis in dieser Größenordnung liegt.

Hinweis: *Runde die Anzahl vorher auf eine ganze Zahl.*

Bilder: links – Projektteam | mittig – lizenzfreies Foto | rechts – Volker Lannert

B4 Wir betrachten nun eine kleinere Stichprobe an Fahrradfahrenden, nämlich $n = 12$. Zeichne ein Histogramm mit den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ für jedes $k \leq n$.

B5 Berechne den zugehörigen Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X für $n = 12$.

B6 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen $(\mu - \sigma)$ und $(\mu + \sigma)$ annimmt? Runde dabei die untere Grenze ab und die obere Grenze auf. Warum ist die Wahrscheinlichkeit hierfür so groß? Ziehe das Histogramm zur Begründung mit hinzu.

Wusstest du schon? Die Sigma-Regeln

Sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p, dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Dann gilt annähernd:

a) $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$
b) $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}5\,\%$
c) $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

Und für ganzzahlige Prozentsätze:

d) $\mathbb{P}(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\,\%$
e) $\mathbb{P}(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\,\%$
f) $\mathbb{P}(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\,\%$

Wusstest du schon?

Da die Benutzung eines Mobiltelefons im Straßenverkehr dich und andere Verkehrsteilnehmende gefährdet, wird sie beim Radfahren mit einem Verwarngeld in Höhe von 55 Euro bestraft. Bei der Benutzung im Auto sind es mindestens 100 Euro. (Stand: 2019)

B7 In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert lag die heutige Anzahl der helmtragenden Personen bis jetzt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 68,3 Prozent beziehungsweise 99 Prozent?

C1 Sucht euch eine Stelle, an der ihr Fußgängerinnen und Fußgänger beobachten könnt und ermittelt über einen Zeitraum von zehn Minuten den relativen Anteil der Personen, die beim Gehen nach unten auf ihr Mobiltelefon schauen.

C2 Interpretiere diesen Anteil wieder als Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. Wir betrachten die Zufallsgröße Y = „Anteil der Personen, die auf ihr Mobiltelefon schauen, in Prozent“. In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert von Y liegt der Anteil zu einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,7 Prozent? Der Anteil soll dabei eine ganze Prozentzahl sein.

Unterstützt durch:
hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS
JOACHIM HERZ STIFTUNG

Bild: lizenzfreies Foto