Sekundarstufe 2
Stochastik

- Datenerhebung
- Bernoulli-Verteilung
- Binomialverteilung

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner

Zeit
60 Minuten

Lernort
Verkehrssicherer Ort, z. B. ein Park, in dem viele Fußgängerinnen und Fußgänger sowie Fahrradfahrerinnen und Fahrradfahrer beobachtet werden können.

UNIVERSITÄT BONN — MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Läufst du noch oder radelst du schon?

Unterwegs mit Bernoulli

Wusstest du, dass Fahrrad fahren neben den ersichtlichen physischen Vorteilen auch die Psyche stabilisieren und die Stimmung verbessern kann? Grund dafür ist die Freisetzung von Glückshormonen beim gleichmäßigen Treten in die Pedale. Wie kommt ihr zur Schule? Wie viele von euch legen den Weg zur Schule mit dem Rad zurück?

In dieser Aufgabe sollt ihr herausfinden, wie sich die Menschen in eurer Stadt fortbewegen. Falls ihr die Aufgabe in einem Park bearbeitet, könnt ihr eure Beobachtung in Gruppen, ggf. an verschiedenen Wegen, durchführen.

A1 Sucht euch einen verkehrssicheren Beobachtungspunkt, z. B. am Rande eines Weges oder auf einer Parkbank und beobachtet die vorbeikommenden Personen. In einem Beobachtungsabschnitt sollen zehn Personen in Folge betrachtet werden. Notiere dir, wie viele dieser zehn Personen mit dem Fahrrad unterwegs sind und wie viele zu Fuß oder mit einem anderen Fortbewegungsmittel an dir vorbeikommen. Erhebt eure Daten in zehn Abschnitten, das heißt für $n = 100$ Personen.

A2 Erstelle aus deinen Rohdaten eine Tabelle, aus der ersichtlich wird, wie viele der beobachteten Personen mit dem Fahrrad unterwegs sind. Dabei beschreibt $H(n)$ die absolute Häufigkeit und $h(n)$ die relative Häufigkeit, jeweils bezogen auf die Größe der Stichprobe zu diesem Zeitpunkt.

A2

n = Stichprobengröße	$H(n)$	$h(n)$
10		
20		
30		
…		
100		

A3 Trage nun die relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von der Stichprobengröße in einem Koordinatensystem auf. Ein solches Diagramm wird auch Streudiagramm genannt. Was fällt dir dabei auf?

Im Folgenden wollen wir das Fortbewegungsverhalten der Personen als Zufallsexperiment betrachten, bei dem den Ausprägungen „fährt kein Fahrrad" und „fährt Fahrrad" eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.

B1 Überlegt gemeinsam, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit ein Versuch als Zufallsexperiment bezeichnet werden kann. Begründet, ob das Fortbewegungsverhalten der Personen als Zufallsexperiment betrachtet werden kann. Die Veränderung welcher Rahmenbedingung könnte dazu führen, dass kein Zufallsexperiment mehr vorliegt?

Du darfst im Folgenden vereinfachend annehmen, dass jede vorbeikommende Person mit einer festen und unabhängigen Wahrscheinlichkeit p mit dem Fahrrad unterwegs ist.

B2 Es sei F die Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit den Ausprägungen $F=0$ für „Person fährt kein Fahrrad" und $F=1$ für „Person fährt Fahrrad". Schätze die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(F=1)=p$ und $\mathbb{P}(F=0)=1-p$ aus deinen Messdaten.

C1 Wir wollen nun das Ereignis „Person fährt Fahrrad" als Erfolg ansehen und die Anzahl X der Erfolge unter n Beobachtungen als Zufallsvariable betrachten. Überlegt und diskutiert gemeinsam, ob in diesem Fall eine binomialverteilte Zufallsvariable vorliegt.

Im Folgenden darfst du vereinfachend davon ausgehen, dass die Zufallsvariable X binomialverteilt ist (siehe Weißt du noch-Box).

C2 Wie groß sind die Anzahl der Versuche n und die Erfolgswahrscheinlichkeit p bei dir?

C3 Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Binomialverteilung. Welche Bedeutung haben diese Kennwerte im Sachzusammenhang?

C4 Wie wahrscheinlich ist es, dass

- genau die Hälfte der Personen mit dem Fahrrad fahren?
- zwischen 40 und 60 Prozent der Personen mit dem Fahrrad fahren?
- weniger als ein Drittel der Personen mit dem Fahrrad fahren?

C5 Untersucht zu zweit mindestens zwei weitere beobachtbare Eigenschaften der vorbeikommenden Personen und diskutiert jeweils, ob eine Binomialverteilung vorliegt.

Weißt du noch?

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Sie beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben. Ist p die Erfolgswahrscheinlichkeit bei einem Versuch und n die Anzahl der Versuche, dann bezeichnet man mit $B(n;p;k)$ die Wahrscheinlichkeit, genau k Erfolge zu erzielen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung lautet:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Wusstest du schon?

Laut des Allgemeinen Deutschen Fahrrad-Clubs (ADFC) war Karlsruhe im Jahr 2020 die fahrradfreundlichste Stadt in der Klasse über 200.000 Einwohner. Lange Zeit vorher war dieser Titel der Stadt Münster nicht zu nehmen.

Unterstützt durch:
hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS
JOACHIM HERZ STIFTUNG

Bild: Volker Lannert