Sekundarstufe 2
Stochastik

- Kombinatorische Abzählverfahren

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner, etwas Kleingeld

Zeit
90 Minuten

Lernort
Eisdiele (vorzugsweise mit Außentheke), ruhiger Ort zum Rechnen (eine Wiese oder einige Bänke in der Nähe)

UNIVERSITÄT BONN — MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Eiskalt kombiniert

Kombinatorische Abzählverfahren

In der Andenstadt Mérida im südamerikanischen Venezuela gibt es eine Eisdiele, die 870 verschiedene Sorten Eis führt, darunter auch eher unüblichere Sorten wie Hot-Dog, Mais mit Käse oder Reis mit Hühnchen. Daneben gibt es allerdings auch die etwas gewöhnlicheren Sorten wie Vanille oder Erdbeere. Da kann es schon schwierig sein, sich zu entscheiden. Aber keine Sorge, meistens liegen auch dort „nur“ etwa 50 Eissorten in der Verkaufstheke.

Auch in der örtlichen Eisdiele steht man schnell vor Entscheidungsschwierigkeiten. Aber wie viele Möglichkeiten gibt es eigentlich, sich drei verschiedene Kugeln auszusuchen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in eine bestimmte Reihenfolge zu bringen? Mit diesen Fragen werdet ihr euch auf diesem Mathematischen Spaziergang beschäftigen. Und mit ein bisschen Knobelei kann man die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten sogar leicht für die Eisdiele in Mérida berechnen.

A2 Zählt, wie viele verschiedene Sorten Eis es gibt. Angenommen, ihr wollt drei unterschiedliche Kugeln Eis kaufen und zwar so, dass die Kugeln in einer bestimmten Reihenfolge in den Becher oder auf die Waffel gesetzt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dabei?

Hinweis: *Überlegt euch, wie viele Sorten euch für die erste Kugel, für die zweite Kugel, … zur Verfügung stehen.*

A2 Wie viele Möglichkeiten gäbe es, wenn du noch eine Kugel mehr aussuchen dürftest?

A3 Wie viele Möglichkeiten hättet ihr, drei Kugeln in einer bestimmten Reihenfolge auszuwählen, wenn ihr Sorten mehrfach wählen dürft?

A4 In den Teilaufgaben **A1** und **A3** könnt ihr sehen, dass es einen Unterschied macht, ob

Bilder: links und rechts – lizenzfreie Fotos | mittig – Volker Lannert man Sorten einfach oder mehrfach wählen darf. Wie groß ist hier konkret der Unterschied? Begründet, wie dieser zustande kommt.

A5 Wie viele Möglichkeiten gäbe es, wenn du in Teilaufgabe **A3** eine Kugel weniger aussuchen würdest?

B1 Wie viele verschiedene Fruchteissorten bietet die Eisdiele an? Zählt die verschiedenen Fruchteissorten, die auf den Aushängen oder in der Kühltheke zur Auswahl stehen.

B2 Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier verschiedene Fruchteissorten auszuwählen? Nehmt hierzu zunächst an, die Reihenfolge sei wichtig. Ihr könnt ähnlich vorgehen wie in Teilaufgabe **A1**.

B3 Entscheidet euch für vier Fruchteissorten und notiert diese. Findet nun zunächst durch Ausprobieren heraus, wie viele Möglichkeiten es gibt, die ausgewählten Sorten in eine Reihenfolge zu bringen. Schreibt euch dabei die möglichen Kombinationen auf. Wie geht ihr vor?

B4 Wie könnt ihr Teilaufgabe **B3** rechnerisch lösen?

B5 Berechnet mithilfe eurer Ergebnisse aus den Teilaufgaben **B2** bis **B4**, wie viele Möglichkeiten es gibt, die vier verschiedenen Fruchteissorten auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt.

B6 Möchte man berechnen, wie viele Möglichkeiten es beim Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge von k Elementen aus einer n-elementigen Menge gibt (wobei $k \leq n$), kann man auch den sogenannten Binomialkoeffizienten verwenden. Mit diesem lässt sich Teilaufgabe **B5** viel schneller lösen. Der Binomialkoeffizient ist wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Formuliert euer Ergebnis aus Teilaufgabe **B5** als Binomialkoeffizient, wobei n die Anzahl der Fruchteissorten und k die Anzahl der ausgewählten Sorten darstellt.

Weißt du noch?

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist das Produkt aller natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind.
Das heißt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Beispiel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

C1 Bestimmt in eurer Gruppe drei beliebte und drei unbeliebte Eissorten.

C2 Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Kugeln auszuwählen und anzuordnen, die auch gleich sein dürfen, ohne eine der drei unbeliebten Sorten dabei zu haben? Welcher kombinatorische Fall liegt hier vor?

C3 Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei beliebten Sorten anzuordnen, wenn von jeder der drei Sorten genau eine Kugel dabei sein soll? Welcher kombinatorische Fall liegt hier vor?

C4 Wie viele Möglichkeiten habt ihr, von den drei beliebten Sorten genau zwei Kugeln auszuwählen, wenn ihr Sorten mehrfach wählen dürft und die Reihenfolge egal ist? Ermittelt das Ergebnis durch das Aufschreiben und Zählen aller Möglichkeiten. Kennt ihr hierfür auch eine Formel?

Bild: lizenzfreies Foto

C5 Berechnet nun, wie viele Möglichkeiten es gibt, vier verschiedene Kugeln auszuwählen, bei denen mindestens zwei der beliebten drei Sorten dabei sind. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Welcher kombinatorische Fall liegt hier vor?

C6 Fragt eure Lehrerin / euren Lehrer, ob ihr jetzt noch ein Eis essen dürft.

Weißt du noch?

Beim Auswählen von k Objekten aus einer n-elementigen Menge unterscheiden wir, je nach Anwendungskontext, vier verschiedene Typen. Das Ziehen…

	mit Beachten der Reihenfolge	**ohne Beachten der Reihenfolge**
mit Zurücklegen		
ohne Zurücklegen		

Für welche der in der Tabelle festgehaltenen Fälle kennst du die Formeln aus dem Unterricht? Du darfst die dir bekannten Formeln an der passenden Stelle in die Tabelle eintragen.

Unterstützt durch:
hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS
JOACHIM HERZ STIFTUNG

Bild: lizenzfreies Foto