

Sekundarstufe 2 Stochastik



- Hypothesentests
- Einseitiger und zweiseitiger Signifikanztest
- Fehler erster und zweiter Art

Material

Ein Boule-Spiel (oder alternativ entsprechend viele Sandsäckchen) pro Gruppe, Schnur, Zollstock, Schere, Taschenrechner, Schreibmaterial

Zeit

120 Minuten

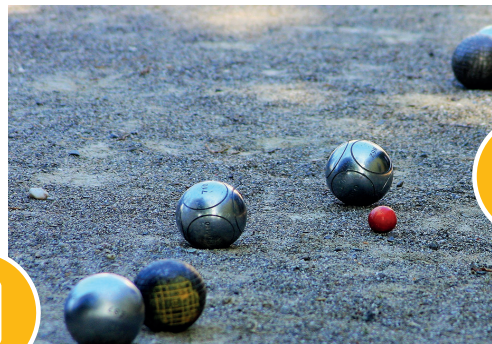
Lernort

Boule-Platz, alternativ eine ebene Wiese

Die Wahrscheinlichkeit liegt auf der Hand

Hypothesentests beim Boule-Spiel

Bestimmt hast du schon einmal das Spiel Boule gespielt oder Leute dabei beobachtet, wie sie versuchen, mit ihren Kugeln möglichst nah an eine Zielkugel zu werfen. Wusstest du, dass das Kugelspiel bereits bei den alten Griechen und Römern beliebt war? Heute wird das Spiel besonders gerne gespielt, weil es einfache Regeln hat und man zum Spielen lediglich Kugeln und ein ebenes Gelände benötigt.



Heute werdet ihr gemeinsam eine Runde Boule spielen und dabei untersuchen, wie wahrscheinlich es ist, dass ihr eure Kugel in die Nähe der Zielkugel werft. Teilt euch dazu in Gruppen von vier

Personen auf. Nehmt euch ein Boule-Spiel (alternativ entsprechend viele Sandsäckchen) und geht zu einem Boule-Platz (oder alternativ zu einer ebenen Wiese, beispielsweise in einem Park).

Wusstest du schon?



Boule (französisch) bzw. Boccia (italienisch) beschreibt ein Kugelspiel, das schon bei den alten Griechen und Römern beliebt war. Das Spiel wird in zwei Teams mit je zwei Personen gegeneinander gespielt. Eine Person wirft die kleine Zielkugel sechs bis zehn Meter vom Wurfpunkt weg. Ziel beider Teams ist es nun, die eigenen Kugeln so zu werfen, dass sie möglichst nah an der Zielkugel liegen bleiben. Um präziser werfen zu können, wird die Kugel dabei zwischen Handballen und den drei mittleren Fingern gehalten und mit dem Handrücken nach oben beim Werfen über die mittleren Finger abgerollt. Haben alle Personen ihre Kugeln geworfen, erfolgt die Punktevergabe. Dabei erhält das Team, dessen Kugel am nächsten an der Zielkugel liegt, so viele Punkte, wie es Kugeln nahe der Zielkugel hat, bis die erste Kugel des gegnerischen Teams am nächsten an der Zielkugel liegt. Danach werden alle Kugeln eingesammelt und die Zielkugel wird erneut geworfen. Das Team, das zuerst 13 Punkte hat, gewinnt das Spiel.

Wusstest du schon?

Mit mathematischen Modellen lassen sich viele Objekte und Vorgänge unserer Welt beschreiben. Um die Modellierung überhaupt zu ermöglichen, müssen bestimmte Modellannahmen getätigt werden. So wird durch ein Modell die Realität vereinfacht dargestellt. Man muss also bei der Anwendung von Modellen genau beachten, unter welchen Annahmen und Bedingungen sie aufgestellt wurden! Mathematische Modelle sind sehr nützlich. So finden sie beispielsweise Anwendung in der Wettervorhersage oder in der Architektur.

A1  Teilt euch in zwei Teams auf und spielt zum Aufwärmen eine Runde Boule.

A2  Lasst nun jedes der vier Gruppenmitglieder achtmal werfen. Dabei sollt ihr untersuchen, wie weit eure Kugeln von der Zielkugel entfernt liegen bleiben. Schneidet dazu ein siebzig Zentimeter langes Stück Schnur ab. Nach jedem Wurf überprüft ihr nun mit der Schnur, ob die geworfene Kugel höchstens siebzig („Treffer“) oder mehr als siebzig Zentimeter („Aus“) von der Zielkugel entfernt liegt. Zählt, wie viele Treffer ihr insgesamt erreicht habt.

Hinweis: Falls ihr Sandsäckchen statt Boule-Kugeln verwendet, solltet ihr ein kürzeres (etwa dreißig Zentimeter langes) Stück Schnur verwenden. Wenn ihr es euch insgesamt etwas schwieriger oder leichter machen wollt, könnt ihr auch generell ein kürzeres oder längeres Stück Schnur verwenden. Außerdem könnt ihr die Schwierigkeit verändern, indem ihr die Zielkugel weiter oder kürzer (als sechs bis zehn Meter) werft.

A3  Wir wollen im Folgenden jeden Treffer als Erfolg ansehen und die Anzahl X der Erfolge unter n Beobachtungen als Zufallsvariable betrachten. Überlegt und diskutiert gemeinsam, ob in diesem Fall eine binomialverteilte Zufallsvariable vorliegt. Was spricht dafür und was dagegen? Wie groß wären die Anzahl der Versuche n und die Erfolgswahrscheinlichkeit p bei euch, wenn ihr das Experiment nach den Regeln aus Teilaufgabe **A2** durchführt?

ble vorliegt. Was spricht dafür und was dagegen? Wie groß wären die Anzahl der Versuche n und die Erfolgswahrscheinlichkeit p bei euch, wenn ihr das Experiment nach den Regeln aus Teilaufgabe **A2** durchführt?

Ab jetzt nehmen wir vereinfachend an, dass die Zufallsvariable X binomialverteilt ist. In Teilaufgabe **A3** habt ihr anhand eurer bisherigen Würfe geschätzt, wie groß die Trefferwahrscheinlichkeit p sein könnte. Ob diese von euch aufgestellte Hypothese richtig ist, sollt ihr nun kontrollieren. Dazu werdet ihr eure Hypothese mit einem zweiseitigen Signifikanztest überprüfen.

B1  Formuliert zunächst eure Nullhypothese H_0 formal und gebt die Alternative H_1 zu eurer Nullhypothese an. Wählt einen Stichprobenumfang n , an dem ihr eure Hypothese gleich testen wollt.

B2 Bestimme den Annahmehereich $[a, b]$ der Hypothese zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$. Erstelle dazu mit dem Taschenrechner eine Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X und suche die kleinsten Zahlen a und b aus der Tabelle, sodass $\mathbb{P}(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}$ und $\mathbb{P}(X \leq b) > 1 - \frac{\alpha}{2}$. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit? Wie groß kann die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens sein? Vergleiche deine Ergebnisse mit denen der anderen Gruppenmitglieder.



B3  Werft nun abwechselnd die Boule-Kugeln, sodass ihr insgesamt n -mal werft und überprüft wieder nach jedem Wurf, ob es sich um einen Treffer handelt. Führt nun mit diesen Daten

den zweiseitigen Signifikanztest eurer Hypothese durch. Könnt ihr die von euch aufgestellte Hypothese nach dem Test annehmen oder nicht? Woran könnte es liegen, dass eure Hypothese laut Signifikanztest verworfen werden muss?

Euer nächstes Boule-Spiel soll so verändert werden, dass ihr mit der anderen Hand werft. Seid ihr mit dieser Hand genauso treffsicher? Das soll nun getestet werden. Verwendet dazu wieder eure Nullhypothese H_0 aus Teilaufgabe **B1**.

C1  Überlegt gemeinsam, ob die Trefferwahrscheinlichkeit p und damit auch die Hypothese H_0 aus Teilaufgabe **B1** auch für dieses Spiel gelten kann. Wieso könnte die Trefferwahrscheinlichkeit p' für dieses Spiel verschieden von p sein? Wählt entsprechend euren Überlegungen eine sinnvolle Alternative H_1' , sodass ihr gleich einen einseitigen Signifikanztest durchführen könnt.

C2  Bestimmt einen Stichprobenumfang n' und wählt ein Signifikanzniveau α' , um eure Hypothese H_0 zu testen. Entscheidet euch dabei für einen anderen Stichprobenumfang und ein anderes Signifikanzniveau als in Teilaufgabe **B1** beziehungsweise **B2**, also $n \neq n'$ und $\alpha' \neq 5\%$. Wo liegt der Annahmehereich der Hypothese bei diesem einseitigen Signifikanztest, wo der Ablehnungsbereich?

C3  Führt nun den einseitigen Signifikanztest durch. Werft dazu in der Gruppe insgesamt n' Kugeln mit eurer jeweils anderen Hand und überprüft nach jedem Wurf, ob ein Treffer vorliegt. Kann eure Hypothese H_0 nach dem Signifikanztest akzeptiert werden?

Ihr habt eure Hypothese nun für beide Hände überprüft. Doch wie sicher könnt ihr euch eigentlich mit den beiden Ergebnissen eurer Signifikanztests sein?

D1  erinnert euch an den Fehler erster Art. Worum handelt es sich dabei? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art bei eurem ersten Signifikanztest? Wie groß ist sie bei eurem zweiten Signifikanztest? Könnt ihr euch vorstellen, dass bei einem der zwei Signifikanztests der Fehler erster Art aufgetreten ist?



D1  Worum handelt es sich bei dem Fehler zweiter Art? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler in eurem zweiten Signifikanztest, wenn ihr davon ausgeht, dass die Trefferwahrscheinlichkeit (p') für die Hand, mit der ihr als letztes geworfen habt, 20 Prozent geringer ist als bei eurer zuerst genutzten Hand? Nehmt hierfür an, dass ihr die Trefferwahrscheinlichkeit p für die erste Hand richtig geschätzt habt. Könnt ihr euch vorstellen, dass der Fehler zweiter Art bei eurem Signifikanztest aufgetreten ist?

D1  Wie könntet ihr die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art, wie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art verringern? Wäre dies sinnvoll?

Unterstützt durch:

hausdorff
CENTER FOR MATHEMATICS

JOACHIM
HERZ
STIFTUNG

