UNIVERSITÄT BONN
MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Sekundarstufe 2
Stochastik

- Trefferwahrscheinlichkeit
- Bernoulli-Verteilung
- Erwartungswert
- Baumdiagramm
- Binomialverteilung

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner, Basketball

Zeit
90 Minuten

Lernort
Basketballplatz

Trefferwahrscheinlichkeiten beim Basketball

Mit Bernoulli zur Binomialverteilung

Dirk Nowitzki gewann mit den Dallas Mavericks im Jahr 2011 als erster deutscher Basketballspieler die Meisterschaft der NBA. In den zugehörigen Playoffs hatte er eine durchschnittliche Trefferquote von 48,5 Prozent.
Der im 17. und 18. Jahrhundert lebende Schweizer Jakob Bernoulli war einer der Hauptvertreter der Analysis und der Wahrscheinlichkeitstheorie seiner Zeit. Auf ihn geht unter anderem auch der Begriff des Integrals zurück. Was der Basketballspieler Dirk Nowitzki und der Mathematiker Jakob Bernoulli miteinander zu tun haben, könnt ihr auf diesem Mathematischen Spaziergang herausfinden.

Im Folgenden werdet ihr Mathematik auf dem Basketballfeld betreiben und dabei auch sportlich aktiv werden. Informiert euch dazu vorab über die geltenden Regeln des Basketballspiels.

A1 Teilt eure Klasse in vier Mannschaften auf und spielt zwei kurze 5-Minuten-Spiele mit jeweils zwei Mannschaften, sodass jedes Team einmal gespielt hat. Die Teams, die gerade nicht spielen, beobachten das laufende Spiel und notieren sich, wie oft pro Mannschaft ein Wurf auf den Korb unternommen und wie häufig dabei getroffen wird.

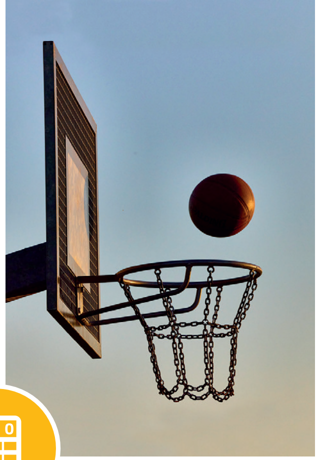
A2 Tauscht eure Notizen aus Teilaufgabe **A1** untereinander aus und berechnet anschließend für jedes Team die relative Häufigkeit eines Treffers. Was bedeutet die relative Häufigkeit im Sachzusammenhang?

Im Folgenden dürft ihr die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretieren. Arbeitet von nun an in euren Mannschaften zusammen und verwendet die eurem Team zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit, die ihr in Teilaufgabe **A2** berechnet habt.

Weißt du noch?

Ein Experiment mit genau zwei möglichen Ausgängen (Treffer oder kein Treffer) nennt man Bernoulli-Experiment. Wenn p die Wahrscheinlichkeit eines Treffers ist, dann ist $1\text{-}p$ die Wahrscheinlichkeit, keinen Treffer zu erzielen. Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable nimmt den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit p und den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $1\text{-}p$ an.

Bilder: links und rechts – lizenzfreie Fotos | mittig – Volker Lannert



B1 Modelliert ein Bernoulli-Experiment, mit dem sich der Wurf auf den Basketballkorb beschreiben lässt. Was spricht für diese Modellannahme, was dagegen?

B2 Es sei T die Bernoulli-verteilte Zufallsvariable, die angibt, ob bei einem Wurf ein Treffer ($T=1$) oder kein Treffer ($T=0$) vorkommt. Berechnet den Erwartungswert von T.

B3 Es soll nun nicht mehr nur ein einzelner Wurf betrachtet werden, sondern eine Reihe von Würfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei unabhängigen Würfen genau zwei Körbe erzielt werden? Zeichnet zunächst das dazugehörige Baumdiagramm und folgert daraus den Ansatz.

B4 Es sei Y die Anzahl der Treffer nach drei Würfen. Berechne den Erwartungswert von Y. Wie lässt sich das Ergebnis im Sachzusammenhang interpretieren?

B4 Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eure Mannschaft

- bei drei Würfen höchstens zwei Körbe erzielt.
- bei drei Würfen mindestens zwei Körbe erzielt.

Im Folgenden sollt ihr berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, bei zehn Würfen genau sechsmal zu treffen. Da das zugehörige Baumdiagramm sehr groß und unübersichtlich ist, werdet ihr nun eine alternative Berechnungsmethode kennenlernen.

C1 Überlegt euch zunächst, wie viele Möglichkeiten es insgesamt gibt, aus zehn Würfen sechs Würfe auszuwählen, bei denen die Treffer erzielt werden.

Hinweis: *Der Binomialkoeffizient kann ein nützliches Instrument sein.*

UNIVERSITÄT BONN MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

C2 Berechnet nun die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse, welche zwei Pfaden in dem großen Baumdiagramm entsprechen würden:

- Von zehn Würfen sind genau die ersten sechs ein Treffer.
- Von zehn Würfen sind genau die ersten drei und die letzten drei ein Treffer.

Was fällt euch auf?

C3 Setzt nun eure Erkenntnisse aus den Teilaufgaben **C1** und **C2** zusammen und berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eure Mannschaft bei zehn Würfen genau sechsmal trifft.

C4 Es sei nun n die Anzahl der Würfe, k die Anzahl der Treffer und p eure Trefferwahrscheinlichkeit. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Treffer. Stellt eine allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X=k)$ auf. Ihr habt soeben die Formel von Bernoulli entdeckt.

C5 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eure Mannschaft bei zehn Würfen mindestens sechs Treffer erzielt? Berechnet das Ergebnis mit eurer Formel aus Teilaufgabe **C4**. Geht anschließend wieder auf das Basketballfeld und werft in eurem Team reihum zehnmal auf den Korb. Schafft ihr es, mindestens sechs Treffer zu erzielen?

Wusstest du schon?

Der Weltrekord für den Basketballwurf aus der weitesten Entfernung ist 180 Meter. Im Jahr 2016 warf ein australisches Trickshot-Team auf dem Mauvoisin-Staudamm in den Schweizer Alpen einen Basketball durch einen am Fuße des Damms angebrachten Basketballkorb.

Unterstützt durch: hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS · JOACHIM HERZ STIFTUNG

Bilder: links und mittig – Volker Lannert | rechts – lizenzfreies Foto