

Sekundarstufe 2
Stochastik



- Zweiseitiger Signifikanztest
- Einfluss des Signifikanzniveaus und des Stichprobenumfangs auf den Signifikanztest

Material

Taschenrechner, Schreibmaterial

Zeit

90 Minuten

Lernort

Eine gut einsehbare Straße sowie ein ruhiger Ort in der Nähe der Straße (zum Beispiel eine öffentliche Wiese oder eine Parkbank)

Mit deM AUto unterwegs

Signifikanztests im Straßenverkehr

Stellt euch vor, euer Ort wurde für ein Pilotprojekt ausgewählt: Es soll eine Städte-Maut eingeführt werden, um zu beobachten, wie sich diese auf das Verkehrsaufkommen auswirkt. Dabei soll die Maut nur für Autofahrende gelten, die aus anderen Städten oder Kreisen kommen. Damit die neue Mautpflicht auch eingehalten wird, sollen in eurem Ort Kontrollen stattfinden. Wie häufig diese Kontrollen stattfinden, hängt davon ab, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Auto aus einer anderen Stadt oder einem anderen Kreis kommt. Da kommt ihr ins Spiel! Denn ihr sollt genau dies herausfinden.




Wusstest du schon?



Neben der Maut für zwischenstädtische Straßen wie Autobahnen und Bundesstraßen gibt es auch die **Städte-Maut**. Dabei handelt es sich um eine Gebühr, die Autofahrende zahlen müssen, sobald sie in die Stadt fahren. Durch eine solche Städte-Maut soll das Verkehrsaufkommen in Städten gesenkt werden, wodurch Staus verkürzt oder verhindert, Verkehrslärm gesenkt und die Luftqualität und Sicherheit verbessert werden. Außerdem soll diese einen zusätzlichen Anreiz bieten, auf öffentliche Verkehrsmittel umzusteigen. Die dadurch generierten Einnahmen kann die Stadt nutzen, um Straßenbauvorhaben zu finanzieren oder um die öffentlichen Verkehrsmittel oder Fahrradwege auszubauen.




Teilt euch in Gruppen von mindestens vier Personen auf und sucht euch eine Straße, die ihr von einer sicheren Stelle aus gut beobachten könnt.


A1  Bildet zwei Teilgruppen, die jeweils eine Straßenseite beobachten können. Zählt für zehn Minuten, wie viele Autos auf eurer jeweiligen Straßenseite mit einem Kennzeichen aus eurer Stadt / eurem Kreis vorbeifahren und wie viele Autos ein Kennzeichen aus einer anderen Stadt / einem anderen Kreis haben.




Wusstest du schon?

In Deutschland wurde die Einführung einer Städte-Maut immer wieder diskutiert, aber nie eingeführt. In einigen europäischen Städten wie beispielsweise London, Oslo, Stockholm und Mailand wird die Städte-Maut seit Jahren erfolgreich eingesetzt.

A2  Kommt nun wieder zusammen. Sucht euch ein ruhiges Plätzchen in der Nähe, an dem ihr mit euren Beobachtungen weiterarbeiten könnt, wie zum Beispiel eine öffentliche Wiese oder eine Parkbank. Tragt eure Messdaten zusammen. Notiert die Gesamtzahl der vorbeifahrenden Autos sowie den Anteil der Autos mit einem Kennzeichen der Stadt / des Kreises, in der / dem ihr euch befindet, sowie den Anteil der Autos aus einer anderen Stadt / einem anderen Kreis.

A3  Stellt auf der Grundlage eurer Datenerhebung aus Teilaufgabe **A2** eine Hypothese H_0 für die Wahrscheinlichkeit p auf, dass ein auf der Straße vorbeifahrendes Auto ein Kennzeichen einer anderen Stadt / eines anderen Kreises hat. Diese Hypothese soll in den folgenden Teilaufgaben getestet werden. Klärt dafür zunächst, wie ihr eure Beobachtungen mithilfe der Binomialverteilung modellieren könnt: Was sind die einzelnen Bernoulli-Experimente? Was zählt als Erfolg, was als Misserfolg? Was ist der Stichprobenumfang? Was gibt die Zufallsvariable X an?

Hinweis zur Kontrolle: Ein Erfolg in einem Bernoulli-Experiment liegt hier vor, wenn ein Auto mit dem Kennzeichen einer anderen Stadt / eines anderen Kreises vorbeifährt.

A4  Überprüft nun eure Hypothese H_0 aus Teilaufgabe **A3** mit Hilfe eines zweiseitigen Signifikanztests. Bestimmt dazu die Alternative H_1 und legt einen sinnvollen Stichprobenumfang n sowie ein sinnvolles Signifikanzniveau α fest. Bestimmt den Annahmehbereich eurer Nullhypothese und erhebt dann an der in Teilaufgabe **A1** gewählten Straße neue Daten mit dem gewählten Stichprobenumfang n , um an diesen den Signifikanztest durchzuführen. Könnt ihr eure Hypothese nach dem Signifikanztest annehmen?




Wusstest du schon?

Bevor du einen Hypothesentest ausführen kannst, muss du das Signifikanzniveau α wählen. Dieses gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird. Oft wird ein Signifikanzniveau von 5% ($\alpha = 0,05$) oder 1% ($\alpha = 0,01$) gewählt.

In Teilaufgabe **A4** habt ihr einen zweiseitigen Signifikanztest zu einem vorher festgelegten Stichprobenumfang und Signifikanzniveau durchgeführt. Das Ergebnis des Signifikanztests wird dabei womöglich von der Wahl des Stichprobenumfangs und des Signifikanzniveaus beeinflusst. Hättet ihr also in eurem Signifikanztest einen anderen Stichprobenumfang oder ein anderes Signifikanzniveau gewählt, so hätte es sein können, dass ihr ein anderes Ergebnis erhalten hättet. Wie genau der Signifikanztest von diesen beiden Größen beeinflusst wird, sollt ihr in den folgenden zwei Aufgabenteilen genauer untersuchen.


Teilt eure Gruppe dafür so auf, dass einige von euch Aufgabenteil **B** und die anderen Aufgabenteil **C** bearbeiten. Wenn ihr alle fertig seid, könnt ihr gemeinsam mit Aufgabenteil **D** fortfahren.


B1  Eure Teilgruppe beschäftigt sich mit dem Einfluss des Signifikanzniveaus auf den Signifikanztest. Betrachtet die beiden Signifikanzniveaus α_1 und α_2 welche wie folgt definiert sind:


$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 2 \cdot \alpha.$$




Bestimmt für beide Signifikanzniveaus den jeweiligen Annahmebereich zu dem Stichprobenumfang n , für den ihr euch in Teilaufgabe **A4** entschieden habt.

B2  Vergleicht die verschiedenen Annahmebereiche für die drei Signifikanzniveaus α , α_1 und α_2 . Was fällt euch auf? Kann eure Nullhypothese aus Teilaufgabe **A3** für eure Datenerhebung aus Teilaufgabe **A4** bei allen drei Signifikanzniveaus angenommen werden oder müsst ihr sie bei einem der Signifikanzniveaus verwerfen?

B3  Formuliert eine allgemeine Regel für den Einfluss des Signifikanzniveaus auf den Signifikanztest.


B4  Was sind Vorteile und was sind Nachteile eines niedrigen und eines hohen Signifikanzniveaus? Diskutiert diese. Bedenkt dabei auch, was passiert, wenn eure Hypothese richtig oder falsch gewählt wurde.

C1  Eure Teilgruppe beschäftigt sich mit dem Einfluss des Stichprobenumfangs auf den Signifikanztest. Betrachtet die beiden Stichprobenumfänge n_1 und n_2 , welche wie folgt definiert sind:


$$n_1 = \frac{n}{2} \text{ und } n_2 = 2 \cdot n.$$


Bestimmt für diese beiden neuen Stichprobenumfänge den Annahmebereich zu eurer Nullhypothese aus Teilaufgabe **A3** für euer Signifikanzniveau α aus Teilaufgabe **A4**.


Hinweis zur Kontrolle: Falls euer n nicht durch zwei teilbar ist, dürft ihr bei der Bestimmung des Stichprobenumfangs n_1 runden.


C2  Wie lautet der Erwartungswert der Testgröße X aus Aufgabenteil **A3** für die drei verschiedenen Stichprobenumfänge? Angenommen euer Testergebnis an der Straße ergäbe, dass der Erwartungswert der Autos mit Kennzeichen einer anderen Stadt / eines anderen Kreises um zehn übertroffen wird. Könntet ihr eure Null-


hypothese trotzdem annehmen oder müsstet ihr sie verwerfen? Erkennt ihr Unterschiede für die verschiedenen Stichprobenumfänge?


C3  Formuliert eine allgemeine Regel für den Einfluss des Stichprobenumfangs auf den Signifikanztest bei gleicher absoluter Abweichung.


C4  Wie würde das Ergebnis eures Signifikanztests lauten, wenn die Anzahl der Autos mit Kennzeichen aus anderen Städten / Kreisen in Teilaufgabe **C2** den Erwartungswert nicht um zehn Autos, sondern um 20 Prozent überträfe?

C5  Formuliert eine allgemeine Regel für den Einfluss des Stichprobenumfangs auf den Signifikanztest bei gleicher prozentualer Abweichung.

D1  Stellt euch gegenseitig eure Ergebnisse aus den Aufgabenteilen **B** und **C** vor. Was wäre ein gutes Signifikanzniveau und was ein guter Stichprobenumfang für den Test eurer Nullhypothese aus Teilaufgabe **A3**? Trefft eine begründete Entscheidung.

D2  Was denkt ihr: Könnt ihr eure Hypothese nun begründet annehmen oder verwerfen? Oder sind noch mehr Tests nötig, um Gewissheit über die Hypothese zu erhalten? Konntet ihr die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Auto aus einer anderen Stadt / einem anderen Kreis kommt, erfolgreich bestimmen?

D3  Angenommen, ihr würdet euren Signifikanztest nicht objektiv durchführen, sondern ihr hättet ein bestimmtes Ergebnis, das ihr gerne erhalten wollen würdet: Wie würdet ihr das Signifikanzniveau und den Stichprobenumfang wählen, wenn ihr eure Hypothese durch den Signifikanztest möglichst bestätigen wollt? Wie würdet ihr das Signifikanzniveau und den Stichprobenumfang wählen, wenn ihr die Hypothese möglichst verwerfen wollt?

D4  Kann ein Signifikanztest „lügen“? Beantwortet die Frage mithilfe eurer Erkenntnisse aus den vorherigen Teilaufgaben.

Unterstützt durch:

hausdorff
CENTER FOR MATHEMATICS

JOACHIM
HERZ
STIFTUNG

