Sekundarstufe 2
Stochastik

- Normalverteilung

Material
Schreibmaterial, grafikfähiger Taschenrechner, Maßband, Zollstock

Zeit
120 Minuten

Lernort
Eine Allee, die nicht an einer befahrenen Straße liegt, ein ruhiger Ort zum Rechnen und Zeichnen

Eine normale Allee

Rechnen mit der Normalverteilung

Auf dem Schulweg, dem Weg in die Stadt oder an der Uferpromenade – eine Straße, viele Bäume. Eine Allee in eurer Nähe kennt ihr sicher alle. Doch was macht eine Allee eigentlich aus? Aus ästhetischen Gründen ist es natürlich wichtig, dass die Bäume alle der gleichen Art angehören und dass sie etwa zur gleichen Zeit und etwa im selben Abstand zueinander angepflanzt wurden. Doch wusstest du auch, dass sich nicht alle Baumarten für eine Allee eignen? Gute Alleebäume müssen nämlich einige Kriterien erfüllen. Sie haben einen geraden Stamm mit einem durchgehenden Leittrieb und einer freien Stammhöhe von mindestens zwei Metern.



Da die Bäume einer Allee in etwa gleich alt, gleich hoch und gleich breit sind, eignet sich eine Allee hervorragend zur Beschäftigung mit der Gaußschen Glockenkurve.

A1 Bildet Zweiergruppen. Messt auf der Allee den Stammumfang von 10 bis 15 Bäumen auf einer Höhe von einem Meter. Tragt die gemessenen und die auf zehn Zentimeter genau gerundeten Umfänge in die Tabelle ein.

	Stammumfang	Stammumfang gerundet
Baum 1		
Baum 2		
Baum 3		
Baum 4		
Baum 5		
Baum 6		
Baum 7		
Baum 8		

	Stammumfang	Stammumfang gerundet
Baum 9		
Baum 10		
Baum 11		
Baum 12		
Baum 13		
Baum 14		
Baum 15		

A1

Bilder: links – Volker Lannert | mittig und rechts – lizenzfreie Fotos

A2

Stammumfang gerundet										
Absolute Häufigkeit										
Relative Häufigkeit										

A2 Berechnet den Mittelwert der gerundeten Umfänge, der nun mit $\bar{x}$ bezeichnet wird. Zählt, wie oft jeder Umfang vorkommt und tragt die absoluten und die relativen Häufigkeiten der jeweiligen Umfänge in die obenstehende Tabelle ein.

A3 Berechnet für eure Daten aus Teilaufgabe **A2** und mit Hilfe des Mittelwerts $\bar{x}$ die empirische Standardabweichung. Diese wird im Folgenden mit s bezeichnet.

Weißt du noch?

Die empirische Standardabweichung s wird wie folgt berechnet:

$$s = \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot h_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot h_n}$$

Dabei sind die x_i die verschiedenen auftretenden Messwerte und die h_i deren relative Häufigkeiten.

B1 Die Zufallsgröße X beschreibe den Stammumfang eines Baumes auf der Allee in Metern. Die Verteilung des Stammumfangs von Bäumen lässt sich mithilfe der Normalverteilung modellieren. Verwende dabei den Erwartungswert $\mu = \bar{x}$ und die Standardabweichung $\sigma = s$. Zeichne mit deinem Taschenrechner die entsprechende Gaußsche Glockenkurve und fertige eine Skizze des Graphen in deinen Unterlagen an.

Die nächsten beiden Teilaufgaben **B2** und **B3** könnt ihr arbeitsteilig erledigen. Teilt sie unter euch auf, bearbeitet sie und stellt euch die Ergebnisse gegenseitig vor.

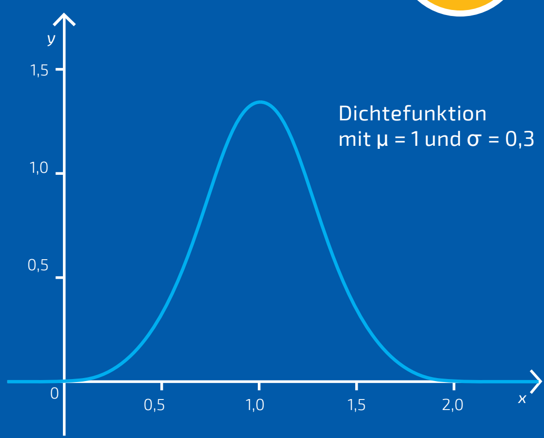
B2 Betrachte das Ereignis, dass der Stammumfang eines Baumes kleiner oder gleich dem 0,75-fachen des Erwartungswerts μ ist. Markiere die entsprechende Fläche in der Skizze aus Teilaufgabe **B1** und berechne die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. Vergleiche die berechnete Wahrscheinlichkeit mit der relativen Häufigkeit dieses Ereignisses aus euren Daten

Wusstest du schon?

Eine stetige Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert μ und Standardabweichung σ heißt normalverteilt, wenn sie die folgende Dichtefunktion besitzt:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Der glockenförmige Graph dieser Dichtefunktion hat ihr den Namen „Gaußsche Glockenkurve“ eingebracht (siehe Abbildung).



aus Aufgabenteil **A**. Was fällt dir auf? Woran könnte das liegen?

B3 Betrachte das Ereignis, dass der Stammumfang größer als das 1,5-fache des Erwartungswerts μ ist. Markiere die entsprechende Fläche in der Skizze aus Teilaufgabe **B1** und berechne die Wahrscheinlichkeit. Vergleiche die berechnete Wahrscheinlichkeit mit der relativen Häufigkeit dieses Ereignisses aus euren Daten aus Aufgabenteil **A**. Was fällt dir auf? Woran könnte das liegen?

B4 Markiert in der Skizze aus Teilaufgabe **B1** die entsprechende Fläche für das Ereignis, dass der Stammumfang kleiner als $\frac{\mu}{2}$ oder größer als $\frac{3}{2}\mu$ ist, und berechnet die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

B5 Gesucht ist eine (positive) reelle Zahl z, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Baum einen höchstens z Meter großen Stammumfang hat, 80 Prozent beträgt, also ein z, sodass $\mathbb{P}(X \leq z) = 0{,}8$. Gebt anhand des Graphen zunächst eine grobe Schätzung für z ab, berechnet dann die Lösung und vergleicht das Ergebnis mit eurer Schätzung.

Wusstest du schon?

Mithilfe des folgenden Integrals lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die betrachtete Zufallsvariable einen Wert im Intervall $[a,b]$ annimmt.

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Beachte, dass sich dieses Integral nur näherungsweise bestimmen lässt, da sich die Stammfunktionnicht einfach analytisch berechnen lässt.

C1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Stammumfang eines Baumes höchstens um die Standardabweichung σ vom Erwartungswert μ abweicht?

Wusstest du schon?

Die Sigma-Regeln

Sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p, dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Dann gilt annähernd:

- $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$
- $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}5\,\%$
- $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

Und für ganzzahlige Prozentsätze:

- $\mathbb{P}(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\,\%$
- $\mathbb{P}(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\,\%$
- $\mathbb{P}(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\,\%$

C2 Ermittelt mithilfe der σ–Regeln ein symmetrisches Intervall $[\mu - a, \mu + a]$ um den Erwartungswert μ, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Baum einen Stammumfang in diesem Bereich besitzt, bei 95 Prozent liegt.

C3 Bestimmt den Anteil der Bäume in eurer Messung, deren Stammumfang im Intervall aus Teilaufgabe **C2** liegt. Weicht dieser Anteil stark von 95 Prozent ab? Falls ja, überlegt euch, warum das so ist.

Wusstest du schon?

Man kann quer durch Deutschland über Alleen fahren: Die *Deutsche Alleenstraße* beginnt an der Ostsee und endet am Bodensee. Auf fast 3.000 Kilometern fährt man diese Strecke von Nord- nach Süddeutschland überwiegend auf Alleen. Dieses Projekt soll Alleen erhalten, schützen und wiederherstellen, da viele Alleen durch den Ausbau des Straßennetzes in den letzten Jahrzehnten zerstört wurden.

Unterstützt durch:
hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS
JOACHIM HERZ STIFTUNG