

Hypothetisch ist die ganze Wiese voller Blumen

Biodiversität und Signifikanztests

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde am Rand eines Parks in Troisdorf erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 In dem exemplarisch betrachteten Bereich konnten sechs verschiedene Blütenpflanzenarten gefunden werden.

A2 Die Anzahl der gefundenen Exemplare der verschiedenen Pflanzenarten, sowie deren gerundete Anteile an der Gesamtzahl der blühenden Pflanzen im untersuchten Abschnitt sind der folgenden Tabelle zu entnehmen. Die Anteile werden dabei berechnet, indem die Anzahl der Exemplare einer Art durch die Gesamtanzahl der gefundenen Exemplare aller blühenden Pflanzenarten geteilt wird.

Name der Pflanzenart	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
Kleine Braunelle	40	$\frac{40}{94} \approx 0,43$
Gewöhnliches Ferkelkraut	30	0,32
Spitzwegerich	10	0,11
Wiesen-Labkraut	8	0,09
Rotklee	5	0,05
Schafgarbe	1	0,01



Die Bilder zeigen von links nach rechts und von oben nach unten folgende Pflanzenarten: Kleine Braunelle, Gewöhnliches Ferkelkraut, Spitzwegerich, Wiesen-Labkraut, Rotklee, Schafgarbe.

A3 Ähnliche Ergebnisse können dadurch zustande kommen, dass die beiden untersuchten Bereiche sehr dicht beieinander liegen oder dass die Bodenverhältnisse auf der Wiese an beiden untersuchten Stellen sehr ähnlich sind.

Unterschiedliche Ergebnisse können daher kommen, dass die beiden betrachteten Abschnitte weiter auseinander liegen oder dort unterschiedliche Bedingungen herrschen, die zur Ansiedlung unterschiedlicher Pflanzenarten in unterschiedlichen Anteilen führen. Außerdem ist der untersuchte Bereich nur recht klein, weshalb sich punktuelle Anhäufungen einer Pflanzenart stärker auf deren Anteil auswirken als dies bei einer größeren untersuchten Fläche der Fall wäre.

A4 Für diesen Lösungsvorschlag betrachten wir im Folgenden die Pflanzenart *Kleine Braunelle* genauer. Diese hat im untersuchten Abschnitt einen Anteil von etwa 43% ausgemacht. Wir nehmen hier den relativen Anteil der Pflanzenart als Annäherung für die Wahrscheinlichkeit p , dass eine Blütenpflanze auf der Wiese zu dieser Art gehört. Daher wählen wir die Hypothese:

$$H_0 : p = 0,43$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass unser Gruppenmitglied an einer anderen Stelle der Wiese einen Anteil von 0,34 für die Kleine Braunelle bestimmt hat und deshalb die folgende Hypothese gewählt hat:

$$H'_0 : p = 0,34$$

B1 Die Person, die in ihrer Hypothese eine höhere Trefferwahrscheinlichkeit als das andere Gruppenmitglied nennt, füllt den Text wie folgt aus:

Meine Nullhypothese lautet: $H_0 : p = 0,43$ (vgl. Teilaufgabe A4). Die Hypothese meines Gruppenmitglieds enthält eine höhere/niedrigere Trefferwahrscheinlichkeit als meine. Ich möchte also wissen, ob meine Hypothese stimmt, oder ob die Trefferwahrscheinlichkeit eigentlich niedriger/höher ist als ich angenommen habe. Deshalb wähle ich als Alternative zu meiner Hypothese: $H_1 : p \gtrless / p < 0,43$. Meine Hypothese soll nur abgelehnt werden, wenn deutlich weniger/mehr Pflanzen als mit meiner Hypothese erwartet zur untersuchten Pflanzenart gehören. Damit liegt mein Ablehnungsbereich rechts/links von meinem Annahmebereich. Dementsprechend hat mein Annahmebereich die Form $[0; b] / [a; n]$, wobei a und b natürliche Zahlen zwischen 0 und dem Stichprobenumfang n sind. Aufgrund der Seite meines Ablehnungsbereiches nennt man meinen einseitigen Signifikanztest auch linksseitigen/rechtsseitigen Signifikanztest.

Die Person, die in ihrer Hypothese eine niedrigere Trefferwahrscheinlichkeit als das andere Gruppenmitglied nennt, füllt den Text wie folgt aus:

Meine Nullhypothese lautet: $H_0 : p = 0,34$ (vgl. Teilaufgabe A4). Die Hypothese meines Gruppenmitglieds enthält eine höhere/niedrigere Trefferwahrscheinlichkeit als meine. Ich möchte also wissen, ob meine Hypothese stimmt, oder ob die Trefferwahrscheinlichkeit eigentlich niedriger/höher ist als ich angenommen habe. Deshalb wähle ich als Alternative zu meiner Hypothese: $H_1 : p > 0,34 / p < \dots$. Meine Hypothese soll nur abgelehnt werden, wenn deutlich weniger/mehr Pflanzen als mit meiner Hypothese erwartet zur untersuchten Pflanzenart gehören. Damit liegt mein Ablehnungsbereich rechts/links von meinem Annahmebereich. Dementsprechend hat mein Annahmebereich die Form $[0; b] / [a; n]$, wobei a und b natürliche Zahlen zwischen 0 und dem Stichprobenumfang n sind. Aufgrund der Seite meines Ablehnungsbereiches nennt man meinen einseitigen Signifikanztest auch linksseitigen/rechtsseitigen Signifikanztest.

B2 Für die beiden folgenden Signifikanztests wählen wir den Stichprobenumfang $n = 150$ und das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$. Unsere Testgröße X gibt dabei die Anzahl der gefundenen Pflanzen an, die zu der von uns gewählten Pflanzenart *Kleine Braunelle* gehören.

B3 Unsere Nullhypothese lautete $H_0 : p = 0,43$. Unser Gruppenmitglied hatte die Nullhypothese $H'_0 : p = 0,34$ aufgestellt. In dem Fall ist die von uns behauptete Trefferwahrscheinlichkeit höher als die des Gruppenmitglieds. Daher wollen wir einen linksseitigen Signifikanztest durchführen und unser Gruppenmitglied einen rechtsseitigen Signifikanztest.

Um den Annahmehbereich zu bestimmen, erstellen wir mit dem Taschenrechner eine Tabelle mit kumulierten Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X \leq r)$ zu unserer Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,43$ und unserem Stichprobenumfang $n = 150$. Ein Auszug aus dieser Tabelle ist in der rechtsstehenden Tabelle zu sehen.

Der Annahmehbereich eines linksseitigen Signifikanztests hat die Form $[a; n] = [a; 150]$. Daher suchen wir die kleinste Zahl a aus der Tabelle, für die $P(X \leq a) > \alpha = 0,05$ gilt. Wie man sieht, ist $a = 55$. Somit ist der Annahmehbereich für unseren Hypothesentest $[55; 150]$.

Kumulierte Wahrscheinlichkeiten (gerundet) für $p = 0,43$

r	$P(X \leq r)$
54	0,049
55	0,068

Kumulierte Wahrscheinlichkeiten (gerundet) für $p = 0,34$

r	$P(X \leq r)$
60	0,948
61	0,963

Das andere Gruppenmitglied erstellt ebenfalls eine Tabelle mit kumulierten Wahrscheinlichkeiten für X . Diese sieht jedoch anders aus als unsere, da die andere Person eine andere Trefferwahrscheinlichkeit, nämlich $p = 0,34$, verwendet. Einen Auszug findet man in linkstehender Tabelle.

Da das andere Gruppenmitglied keinen linksseitigen, sondern einen rechtsseitigen Signifikanztest machen möchte, benötigt es einen Annahmehbereich der Form $[0; b]$. In dem Fall sucht es die kleinste Zahl b aus der Tabelle, für die $P(X \leq b) > 1 - \alpha = 0,95$ gilt. Wie man sieht, ist $b = 61$. Somit ist der Annahmehbereich für den Hypothesentest unseres Gruppenmitglieds $[0; 61]$.

B4 Der Annahmehbereich für unsere Hypothese ist $[55; 150]$ und der für die Hypothese unseres Gruppenmitglieds lautet $[0; 61]$. Wie man an diesen beiden Annahmehbereichen sieht, fühlen wir uns in unserer Hypothese bestätigt, wenn wir von 150 Pflanzen auf der Wiese zwischen 55 und 150 Exemplare der *Kleinen Braunelle* finden. Unser Gruppenmitglied hingegen fühlt sich in seiner Hypothese bestätigt, wenn zwischen 0 und 61 *Kleine Braunellen* gefunden werden.

Wie man hieran sieht, sehen sich für den Fall, dass zwischen 55 und 61 *Kleine Braunellen* gezählt werden, sowohl wir als auch unser Gruppenmitglied bestätigt, weshalb in diesem Fall keine der beiden Hypothesen verworfen bzw. bestätigt werden kann.

Falls die beiden Gruppenmitglieder Hypothesen mit weit auseinanderliegenden Trefferwahrscheinlichkeiten haben, kann es sein, dass sich deren Annahmehbereiche nicht überschneiden. In dem Fall fällt ihnen nichts auf und sie bestimmen (wie im Hinweis der Aufgabenstellung angegeben) den Annahmehbereich einer neuen Hypothese, deren Trefferwahrscheinlichkeit näher an einer der beiden alten Hypothesen liegt. Daran können sie dann die sich überschneidenden Annahmehbereiche erkennen.

C1 Eine erneute Untersuchung der Wiese an einer anderen Stelle als zuvor ergibt:

Von $n = 150$ betrachteten Blütenpflanzen gehörten 60 zur Art *Kleine Braunelle*.

Da 60 sowohl im Annahmebereich unserer Hypothese ($60 \in [55; 150]$) als auch im Annahmebereich der Hypothese unseres Gruppenmitglieds liegt ($60 \in [0; 61]$), werden beide Hypothesen durch die beiden einseitigen Signifikanztests bestätigt. Damit können wir keine der beiden Hypothesen verwerfen, aber auch keine endgültig annehmen.

C2 Wie wir in Teilaufgabe **B4** gesehen haben, können verschiedene Nullhypothesen sich überschneidende Annahmebereiche besitzen. Dadurch gibt es einen Bereich an Werten, der in beiden Annahmebereichen liegt. Wenn man einen dieser Werte in der Beobachtung erhält, werden dadurch also beide Hypothesen durch die Signifikanztests gestützt. In dem Fall kann man keine der beiden Hypothesen verwerfen, aber daher auch keine der beiden abschließend annehmen. Das haben wir auch in Teilaufgabe **C1** in unseren Signifikanztests gesehen.

Somit eignen sich Signifikanztests vor allem, um eine Hypothese zu überprüfen, aber nur eingeschränkt, um zwischen zwei Hypothesen die Richtige zu finden.

C3 In Teilaufgabe **A1** haben wir gesehen, dass in dem von uns betrachteten Bereich sechs verschiedene Blütenpflanzenarten wachsen. Dies ist weniger als auf einer natürlichen Wiese zu erwarten ist und deutet daher auf eine niedrige Biodiversität hin. Wie in Teilaufgabe **A2** zu sehen war, machen die *Kleine Braunelle* und das *Gewöhnliche Ferkelkraut* einen recht großen Anteil der Blütenpflanzen des untersuchten Bereiches aus. *Schafgarbe* und *Rotklee* hingegen kommen dort nur in sehr geringen Zahlen vor. Es gibt also deutliche Unterschiede zwischen den Anteilen der verschiedenen Blütenpflanzenarten und wir haben zwei dominante Arten.

Vermutlich sind die *Kleine Braunelle* und das *Gewöhnliche Ferkelkraut* besser an die Bedingungen der Wiese angepasst. Sie verdrängen dadurch die weniger angepassten und konkurrenzschwächeren Arten wie *Schafgarbe* und *Rotklee*, die daher nur kleinere Anteile haben. Diese könnten zukünftig vielleicht gar nicht mehr auf der Wiese vorkommen. Damit würde es zu einem Rückgang der Biodiversität kommen.

Wären die Anteile der verschiedenen Pflanzenarten ähnlich, so deutete dies darauf hin, dass die einzelnen Pflanzenarten gleich gut an die Bedingungen der Wiese angepasst wären und sich dort auch gegen die anderen Pflanzenarten behaupten könnten.

Allerdings reichen unsere bisherigen Untersuchungen noch nicht aus, um eine ausreichende Aussage über die Biodiversität der Wiese zu treffen. Pflanzen einer Art kommen oft punktuell vermehrt vor, wodurch deren Anteil in einem kleinen betrachteten Bereich, wie es bei uns der Fall war, oft anders als auf der gesamten Wiese ist. Wir müssten einen deutlich größeren Bereich der Wiese untersuchen, um eine bessere Aussage über die Biodiversität der Wiese zu treffen. Dabei würden wir sicherlich auch noch weitere Blütenpflanzenarten finden, die in unserem Bereich nicht gewachsen sind, aber in anderen Bereichen der Wiese durchaus vorkommen.

Didaktischer Kommentar

Dieser mathematische Spaziergang ist für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 entwickelt. Je nach Bundesland kann er nur in einem Leistungskurs (beispielsweise in Nordrhein-Westfalen) oder auch in einem Grundkurs (beispielsweise in Rheinland-Pfalz) in der Unterrichtseinheit *Testen von Hypothesen* verwendet werden. Vor der Durchführung des Spaziergangs müssen zweiseitige Signifikanztests bereits im Unterricht thematisiert und von den Schülerinnen und Schüler sicher durchgeführt werden. Dieser Spaziergang dient dann dazu, den Schülerin-

nen und Schüler darauf aufbauend einseitige Signifikanztests vorzustellen. Diese sollten daher zuvor nicht im Unterricht besprochen werden. In den Teilaufgaben des Spaziergangs lernen die Schülerinnen und Schüler einseitige Signifikanztests kennen und führen diese angeleitet durch die Aufgabenstellung durch. Im Anschluss an den Spaziergang sollten die einseitigen Signifikanztests dann im Unterricht gemeinsam besprochen werden. Damit soll sichergestellt werden, dass diese und deren Durchführung von allen Schülerinnen und Schüler verstanden wurden.

Als Lernort dient in diesem mathematischen Spaziergang eine öffentliche Wiese, die ungemäht ist und auf der auf natürliche Weise, also nicht künstlich angelegt, blühende Pflanzen wachsen. Dies kann beispielsweise eine Wiese in einem Park, am Waldrand, am Feldrand, auf einem Grünstreifen oder auch die Wiese eines Spielplatzes sein. In der Regel ist es möglich, dass alle Schülerinnen und Schüler den Spaziergang auf der gleichen Wiese durchführen. Da die Schülerinnen und Schüler in den Aufgaben mit Pflanzen arbeiten, könnte es sinnvoll sein, die Schülerinnen und Schüler vor Beginn des Spazierganges darauf hinzuweisen, dass sie vorsichtig und verantwortungsvoll mit den Pflanzen umgehen sollen.

Die Aufgaben des Spaziergangs werden von den Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit bearbeitet. Dazu können sich die Schülerinnen und Schüler selbst in Zweiergruppen einteilen. Alternativ besteht auch die Möglichkeit, dass sich die Paare als so genanntes *Lerntempduett* finden. Dabei bilden sich die Paare erst innerhalb des Spaziergangs, indem sich immer zwei Schülerinnen und Schüler zusammenfinden, die ungefähr gleichzeitig mit Teilaufgabe **A2** fertig sind.

Sinn dieses Spazierganges ist es, dass die Schülerinnen und Schüler einseitige Signifikanztests kennenlernen. Dazu führen sie in Aufgabenteil **A** eine eigene Datenerhebung durch, auf Grundlage derer sie eine eigene Hypothese bilden. Diese Hypothese sollen sie im Verlauf der folgenden Teilaufgaben mittels eines einseitigen Signifikanztests prüfen. Dazu leiten sie sich zunächst eigenständig in Teilaufgabe **B1** mittels eines Lückentextes mit vorgegebenen Antwortmöglichkeiten her, wie ein einseitiger Signifikanztest funktioniert und was dessen Sinn ist. Da dies für das Verständnis des einseitigen Signifikanztests und dessen Durchführung in den folgenden Teilaufgaben sehr wichtig ist, sollte sich die Lehrperson in der Nähe der Schülerinnen und Schüler aufhalten, um ihnen bei möglichen auftretenden Fragen und Unklarheiten helfen zu können. In den folgenden Teilaufgaben führen die Schülerinnen und Schüler dann alle Schritte des einseitigen Signifikanztests durch, angeleitet durch die Aufgabenstellung. Dabei erkennen sie in den Teilaufgaben **B3** und **C2**, dass sich die Annahmebereiche bei verschiedenen Nullhypothesen überschneiden können, weshalb sich Signifikanztests nur eingeschränkt dazu eignen, sich zwischen zwei Hypothesen zu entscheiden.

Ein Thema, das im Mathematischen Spaziergang (vor allem in Teilaufgabe **C3**) aufgegriffen wird, ist die Biodiversität, also die biologische Vielfalt der Blühpflanzenarten der betrachteten Wiese. Da dieses Thema in der Oberstufe auch im Biologieunterricht angesprochen wird, kennen es einige Schülerinnen und Schüler womöglich bereits, was ihre Motivation für die Aufgabe steigern kann. Möglich ist auch, dass sie das erlernte Wissen dieser Aufgabe in den Biologie- oder auch in den Erdkundeunterricht einbringen können. Weitergehend ist es natürlich auch möglich, dass sich die Lehrperson, die diesen Spaziergang mit ihrem Kurs durchführt, mit den Lehrpersonen des Biologie- oder des Erdkundeunterrichtes der Stufe abspricht, sodass diese in ihrem Unterricht auf den Mathematischen Spaziergang Bezug nehmen können.