Funktionen einstufen

Rechnen mit Treppenfunktionen

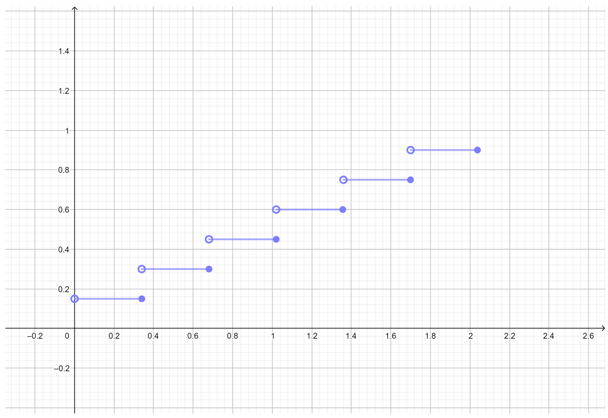
Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Aufgabe wurde an einer Treppe am Bonner Rheinufer erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Die Treppenstufen haben eine Höhe von 0,15 Metern und eine Tiefe von 0,34 Metern. Es sind insgesamt sechs Stufen.

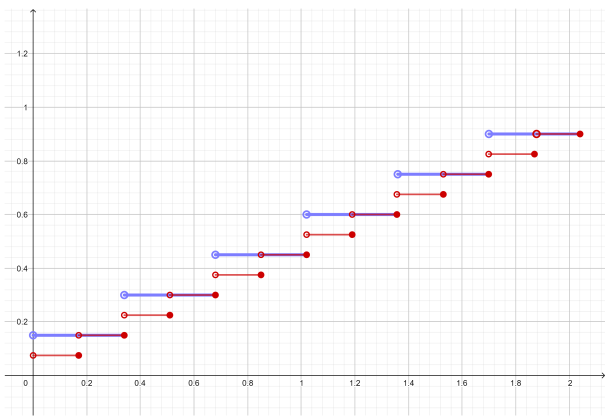
A2/A3 Für die vorliegenden Stufen ergibt sich folgende Treppenfunktion:

$$t_1(x) = \begin{cases} 0,15 & 0 < x \leq 0,34 \\ 0,3 & 0,34 < x \leq 0,68 \\ 0,45 & 0,68 < x \leq 1,02 \\ 0,6 & 1,02 < x \leq 1,36 \\ 0,75 & 1,36 < x \leq 1,7 \\ 0,9 & 1,7 < x \leq 2,04 \end{cases}$$



A4 Für die halb so hohen und halb so tiefen Stufen gilt:

$$t_2(x) = \begin{cases} 0,075 & 0 < x \leq 0,17 \\ 0,15 & 0,17 < x \leq 0,34 \\ 0,225 & 0,34 < x \leq 0,51 \\ 0,3 & 0,51 < x \leq 0,68 \\ 0,375 & 0,68 < x \leq 0,85 \\ 0,45 & 0,85 < x \leq 1,02 \\ 0,525 & 1,02 < x \leq 1,19 \\ 0,6 & 1,19 < x \leq 1,36 \\ 0,675 & 1,36 < x \leq 1,53 \\ 0,75 & 1,53 < x \leq 1,7 \\ 0,825 & 1,7 < x \leq 1,87 \\ 0,9 & 1,87 < x \leq 2,04 \end{cases}$$



Der Graph der Treppenfunktionen hat obige Gestalt (dabei gehört der blaue Graph zu t_1 und der rote Graph zu t_2).

A5 Addiert man die Höhen und Tiefen für beide Treppen, ergibt sich jeweils eine Gesamtlänge des Kantenzugs von $2,94$ Meter. Es wird deutlich, dass die Länge des Kantenzugs nicht von der Feinheit der Treppenstufe abhängig ist. Würde man die Treppenhöhe und -tiefe nun immer weiter verkleinern, erhielte man also bei konstanter Länge des Kantenzugs eine Rampe. Deren Länge ergibt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras zu $\sqrt{(2,04\text{m})^2 + (0,90\text{m})^2} \approx 2,23\text{m}$. Die Kantenlänge ist konstant und konvergiert nicht gegen die Länge der Rampe.

B1 Die Querschnittsfläche unterhalb der Treppenstufen lässt sich über das Aufsummieren von Rechteckflächen bestimmen. Es gilt:

$$A_1 = (0,15 \cdot 0,34) + (0,3 \cdot 0,34) + (0,45 \cdot 0,34) + (0,6 \cdot 0,34) + (0,75 \cdot 0,34) + (0,9 \cdot 0,34) = 1,071$$

Für die halb so hohen und tiefen Treppenstufen gilt analog:

$$A_2 = (0,075 \cdot \sum_{k=1}^{12} k) \cdot 0,17 = 0,9945$$

Wir vermuten, dass mit einer zunehmenden Anzahl der Treppenstufen das Ergebnis kleiner wird.

B2 Der Flächeninhalt A der dreieckigen Querschnittsfläche unterhalb der Rampe lässt sich mithilfe der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmen. Es gilt:

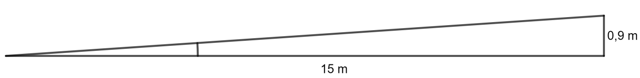
$$A = \frac{1}{2} \cdot 2,04 \cdot 0,9 = 0,98$$

Beim Vergleich von A_1 und A_2 mit A fällt auf, dass die Wahl der kleinen Treppenstufen eine weitaus genauere Näherung liefert. Dies leuchtet ein, weil mit immer kleiner werdenden Treppenstufen die Funktionswerte einer einzelnen Treppenstufe (eines Intervalls) für immer kürzere Intervalllängen gelten und damit häufiger die Treppenstufen gewechselt werden, wo der Wert wieder näher an der tatsächlichen Höhe liegt. Wählen wir also sehr kleine Treppenstufen, erhalten wir bessere Ergebnisse.

B3 Die Steigung ergibt sich zu $m = \frac{0,9\text{m}}{2,04\text{m}} = 0,44$. Der Steigungswinkel φ ergibt sich aus einem Steigungsdreieck mit Steigung m gemäß $\varphi = \arctan(m)$. Eingesetzt ist somit $\varphi = \arctan(0,44) \approx 23,8°$. Damit ist die Rampensteigung im Intervall $[15°, 30°]$ und die Rampe gemäß den Vorgaben sicher und angenehm begehbar.

B4 In Teilaufgabe **B2** ist bereits der Steigungsquotient mit 0,44 beziffert worden. Dies entspricht also einer Steigung von 44 Prozent. Dies liegt weit über den für Rollstuhlfahrer erlaubten 6 Prozent. Bauliche Maßnahmen für eine rollstuhlgerechte Rampe wären beispielsweise eine Verlängerung der Rampe, sodass der Fußpunkt der Rampe weiter entfernt liegt oder Zick-Zack-Rampen, die parallel zu den Treppenstufen verlaufen.

B5 Um mit einer neuen Rampe die ursprüngliche Höhe von 0,9 Metern überwinden zu können, ohne die Steigung von 6% zu überschreiten, müsste die Rampe 15 Meter lang sein (siehe Abbildung).



Die Querschnittsfläche dieser neuen Rampe beträgt:

$$\frac{1}{2} \cdot 15\text{m} \cdot 0,9\text{m} = 6,75\text{m}^2$$

B6 Die Rampen haben die Form von Prismen mit dreieckiger Grundfläche.
Für die Rampe aus Teilaufgabe **B2** ergibt sich ein Volumen von:

$$V_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,9\text{m} \cdot 2,04\text{m}\right) \cdot 1,2\text{m} \approx 1,1\text{m}^3$$

Es ergeben sich Materialkosten in Höhe von $1,1\ \text{m}^3 \cdot 95\ \frac{\text{Euro}}{\text{m}^3} = 104,50$ Euro.
Für die Rampe aus Teilaufgabe **B4** ergibt sich ein Volumen von:

$$V_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,9\text{m} \cdot 15\text{m}\right) \cdot 1,2\text{m} = 8,1\text{m}^3$$

Es ergeben sich Materialkosten in Höhe von $8,1\ \text{m}^3 \cdot 95\ \frac{\text{Euro}}{\text{m}^3} = 769,50$ Euro.

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe ist als intuitiver Einstieg in die Integralrechnung in der Sekundarstufe II konzipiert. Ohne Vorwissen können Schülerinnen und Schüler das Streifenprinzip von Archimedes selbst nachvollziehen. Ziel ist es, dass Schülerinnen und Schüler begreifen, dass bei kleinerer Rechteckbreite die Flächte unter einer Kurve besser approximiert wird. Gleichzeitig soll in Hinblick auf den (nicht curricularen) Themenkomplex Stetigkeit das Verständnis für nichtstetige (hier Treppen-)Funktionen gestärkt werden.
Die Erhebung der notwendigen Daten für das zuvor genannte Ziel erfolgt in den Teilaufgaben **A1** und **A2**. Die Definition von Treppenfunktionen (im mathematischen wie auch im kontextuellen Sinne) soll das Verständnis von stückweise definierten, unstetigen Funktionen stärken. Teilaufgabe **A5** zielt auf das Paradoxon ab, dass die Länge des Kantenzugs bei veränderter Stufenbreite gleich bleibt und nicht etwa gegen die Länge der zugrundeliegenden Rampe konvergiert. Mit den Teilaufgaben **B1** und **B2** können die Schülerinnen und Schüler nun das Konzept der Integration am praktischen Beispiel anwenden. Ein Vergleich soll zeigen, dass die Approximation bei kleiner werdenden Stufen besser wird und so näherungsweise der Flächeninhalt der Querschnittfläche unterhalb der Rampe bestimmt werden kann. Teilaufgabe **B3** führt die Schülerinnen und Schüler an die Berechnung von Winkeln über den Arcustangens heran.

Die Schülerinnen und Schüler sollten mit folgenden Inhalten aus dem Mathematikunterricht vertraut sein. Es ist sinnvoll, diese Punkte in der Stunde zuvor noch einmal anzusprechen:

- Umgang mit auf Intervallen abschnittsweise definierten Funktionen
- Definition und Berechnung des Steigungswinkels einer linearen Funktion
- Berechnung des Flächeninhalts einfacher geometrischer Flächen und des Volumens einfacher Körper

Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe bearbeitet haben, sollten sie als Lernziel

- das Konzept einer Obersumme begriffen haben und erklären können,
- ein Urteil über die Qualität der Annäherungen geben,
- den praktischen Nutzen von Integralrechnung im Alltag begriffen haben und begründet Urteile im Sachzusammenhang abgeben können.

Im Anschluss kann im Unterricht auch das Konzept von Untersummen behandelt werden und das Thema Integralrechnung weiter fortgeführt werden.