Vektooor!

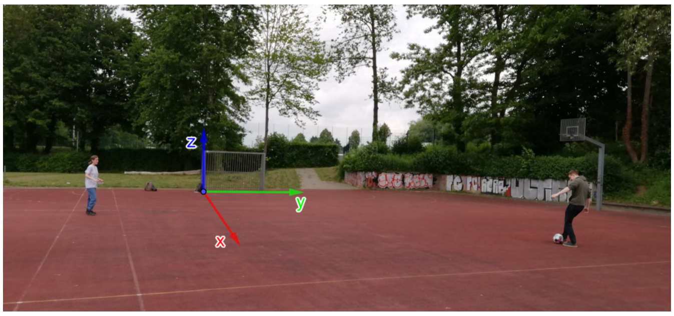
Analytische Geometrie auf dem Bolzplatz

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde auf dem Gummiplatz in 53639 Oberpleis (Königswinter) erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Das Tor ist 3 Meter breit, $2,03$ Meter hoch und $0,74$ Meter tief.

A2 Die Koordinatenachsen wurden, wie in der Abbildung zu sehen, entlang der Breite, Höhe und Tiefe des Tores festgelegt. Die x-Achse verläuft aus dem Tor heraus parallel zu der Seitenlinie, die y-Achse entlang der Breite des Tores auf der Torlinie und die z-Achse entlang des Pfostens nach oben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.



A3 Die Koordinaten des rechten Winkelkreuzes ergeben sich aus Höhe und Breite des Tores:

$$W = (0|3|2,03)$$

Auf dem Platz gibt es einen Siebenmeterpunkt, welcher sich mittig genau sieben Meter vor dem Tor befindet. Somit hat er die Koordinaten

$$S = (7|1,5|0)$$

Für die beiden Eckpunkte ergeben zwei weitere Messungen die Koordinaten

$$E_1 = (0|-8,5|0) \quad \text{und} \quad E_2 = (0|11,5|0)$$

wobei E_1 der linke Eckpunkt und E_2 der rechte Eckpunkt ist.

B1 Die beiden Positionen wurden, wie in obigen Abbildung zu sehen, gewählt. Der Spieler rechts im Ballbesitz steht auf Position 1 und die Spielerin links auf Position 2. Messungen ergeben die beiden Positionen

$$P_1 = (17,92|4,52|0) \quad \text{und} \quad P_2 = (10,83|-5,35|0)$$

B2 Der erste Pass ist der Vektor zwischen P_1 und P_2 und der zweite kann als Vektor zwischen P_2 und S errechnet werden:

$$\vec{p_1} := \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 10,83 - 17,92 \\ -5,35 - 4,52 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,09 \\ -9,87 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p_2} := \overrightarrow{P_2S} = \begin{pmatrix} 7 - 10,83 \\ 1,5 - (-5,35) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,83 \\ 6,85 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B3 Der Schuss in den Winkel wird beschrieben durch den Vektor zwischen dem Siebenmeterpunkt S und dem Winkelkreuz W, also

$$\vec{s} := \overrightarrow{SW} = \begin{pmatrix} 0 - 7 \\ 3 - 1,5 \\ 2,03 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1,5 \\ 2,03 \end{pmatrix}$$

B4 Um den direkten Schuss von Position 1 in den Winkel zu bestimmen, werden die Vektoren $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ und $\vec{s}$ addiert:

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{s} = \begin{pmatrix} -7,09 - 3,83 - 7 \\ -9,87 + 6,85 + 1,5 \\ 0 + 0 + 2,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17,92 \\ -1,52 \\ 2,03 \end{pmatrix}$$

C1 Wir müssen den ersten Pass $\vec{p_1}$ halb so kurz spielen, also mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ skalieren. Es ergibt sich:

$$\vec{p_3} := \frac{1}{2} \cdot \vec{p_1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -7,09 \\ -9,87 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,545 \\ -4,935 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C2 Der Punkt der Annahme des ersten Passes kann berechnet werden, indem man vom Startpunkt des Passes (Position 1) den Vektor des Passes entlang geht. Er errechnet sich also als

$$P_3 = P_1 + \vec{p_3} = (17,92 - 3,545|4,52 - 4,935|0 + 0) = (14,375| - 0,415|0)$$

Von dieser neuen Position P_3 wird jetzt der Pass zum Siebenmeterpunkt gespielt. Dieser Rückpass entspricht dem Vektor

$$\overrightarrow{P_3S} = \begin{pmatrix} 7 - 14,375 \\ 1,5 - (-0,415) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,375 \\ 1,915 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C3 Zunächst gilt es, die Länge des Vektors $\vec{p_1}$ aus Teilaufgabe **B2** zu bestimmen. Der Vektor

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} -7,09 \\ -9,87 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat eine Länge von:

$$|\vec{p_1}| = \left| \begin{pmatrix} -7,09 \\ -9,87 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-7,09)^2 + (-9,87)^2 + 0^2} \approx 12,15$$

Der gesuchte Vektor $\overrightarrow{p_4}$ soll eine Länge von $2 \cdot 12,15 = 24,3$ haben. Wir bestimmen also den positiven Faktor t, sodass

$$|\overrightarrow{p_4}| = \left| \begin{pmatrix} t \cdot (-7,09) \\ t \cdot (-9,87) \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 24,3$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{p_4}| &= \sqrt{(t \cdot (-7,09))^2 + (t \cdot (-9,87))^2 + 3^2} \stackrel{!}{=} 24,3 \\
&\Rightarrow (-7,09t)^2 + (-9,87t)^2 + 9 \stackrel{!}{=} 590,49 \\
&\Leftrightarrow 50,2681t^2 + 97,4169t^2 \stackrel{!}{=} 581,49 \\
&\Leftrightarrow 147,685t^2 \stackrel{!}{=} 581,49 \\
&\Leftrightarrow t^2 \approx 3,94 \\
&\Rightarrow t \approx 1,98
\end{aligned}$$

Der gesuchte Vektor ist also

$$\overrightarrow{p_4} = \begin{pmatrix} 1,98 \cdot (-7,09) \\ 1,98 \cdot (-9,87) \\ 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -14,04 \\ -19,54 \\ 3 \end{pmatrix}$$

C4 Um zu überprüfen, ob der in **C3** berechnete Pass im Seitenaus landet, müssen wir einerseits den Punkt der Annahme des Passes berechnen und andererseits vermessen, welche Koordinaten das Spielfeld beschränken.
Die linke Seitenauslinie verläuft parallel zur x-Achse von dem linken Eckpunkt E_1 aus. Daher ist das Spielfeld nach links durch die y-Koordinate $-8,5$ beschränkt.
Den Punkt der Annahme des Passes kann man analog zu **C2** berechnen als

$$P_4 = P_1 + \overrightarrow{p_4} = (17,92 - 14,04|4,52 - 19,54|0 + 3) = (3,88| - 15,02|3)$$

Da die y-Koordinate $-15,02 < -8,5$ ist, liegt dieser Punkt außerhalb des Spielfeldes und der Pass landet im Seitenaus.
Ein Streckfaktor, mit welchem der verlängerte Pass nicht im Seitenaus landen würde, wäre beispielsweise $1,25$. Der gesuchte Vektor $\overrightarrow{p_5}$ hätte dann eine Länge von $12,15 \cdot 1,25 = 15,1875$.
Es gilt wieder einen positiven Faktor k zu bestimmen, sodass gilt:

$$|\overrightarrow{p_5}| = \left| \begin{pmatrix} k \cdot (-7,09) \\ k \cdot (-9,87) \\ 3 \end{pmatrix} \right| \stackrel{!}{=} 15,1875$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{p_5}| &= \sqrt{(-7,09k)^2 + (-9,87k)^2 + 3^2} \stackrel{!}{=} 15,1875 \\
&\Rightarrow 50,2681k^2 + 97,4169k^2 + 9 \stackrel{!}{=} 230,66 \\
&\Leftrightarrow 147,685k^2 \stackrel{!}{=} 221,66 \\
&\Leftrightarrow k^2 \approx 1,5 \\
&\Rightarrow k \approx 1,22
\end{aligned}$$

Der gesuchte Vektor ist also

$$\vec{p_5} = \begin{pmatrix} 1,22 \cdot (-7,09) \\ 1,22 \cdot (-9,87) \\ 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 8,6498 \\ 12,0414 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnet man nun den neuen Punkt P_5 der Annahme, ergibt sich:

$$P_5 = P_1 + \vec{p_5} = (17,92 - 8,6498|4,52 - 12,0414|0 + 3) = (9,2702| - 7,5218|3)$$

Da die y-Koordinate $-7,5218 > -8,5$ ist, liegt der Punkt nicht im Seitenaus.

Didaktischer Kommentar

Dieser mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 und beinhaltet das Themenfeld Analytische Geometrie. Das Hauptaugenmerk dieses mathematischen Spaziergangs liegt auf der geeigneten Anwendung der Multiplikation von Vektoren mit Zahlen und der Addition von Vektoren in einem Sachzusammenhang. In diesem Fall stellen die Vektoren Pässe oder Schüsse in einem Fußballspiel dar. Addition und Multiplikation mit Zahlen repräsentieren die Aneinanderreihung mehrerer Ballbewegungen oder das Verlängern bzw. Verkürzen der Pässe. Auch die schrittweise Koordinatisierung des Raumes und das Aufstellen von Vektoren werden eingeübt. Für Aufgabenteil **D** sollte den Schülerinnen und Schülern bekannt sein, wie die Länge von Vektoren berechnet wird.

In Aufgabenteil **A** wird der Raum zunächst vermessen. Dann werden ein geeignetes Koordinatensystem festgelegt und Koordinaten mehrerer Punkte bestimmt, die nicht nur für spätere Aufgabenteile relevant sind, sondern auch Orientierung im Raum bieten sollen. In Aufgabenteil **B** sollen die Schülerinnen und Schüler sich für einen Doppelpass aufstellen und mithilfe der Koordinaten dieser Positionen die Vektoren der einzelnen Pässe und eines abschließenden Schusses aufstellen. Für die Vermessung der Positionen kann es hilfreich sein, dass sich die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit entweder abwechselnd aufstellen und die Koordinaten messen oder ihre Positionen wählen und dann markieren, beispielsweise mit ihren Rucksäcken. Zum Abschluss dieses Aufgabenteils soll ein direkter Schuss von der ersten Position durch die Addition der Vektoren der Pässe und des Schusses errechnet werden. In Teil **C** dieses Spaziergangs werden die Pässe verkürzt und verlängert und die dadurch neu entstehenden Doppelpasssituationen durch neue Koordinaten und Vektoren beschrieben. Außerdem soll berechnet werden, ob ein solcher verlängerter Pass noch innerhalb des Spielfeldes landet. Hierfür müssen die entsprechenden Spielfeldgrenzen beachtet werden.

Geeignete Lernorte für diesen mathematischen Spaziergang sind alle Orte, an denen man Tore und dazugehörige Fußballfeldmarkierungen findet, also insbesondere Fußball- oder Bolzplätze. Plätze mit mehreren Toren und Feldern können dabei helfen, Platz bei den Messungen für alle Lernenden zu garantieren.