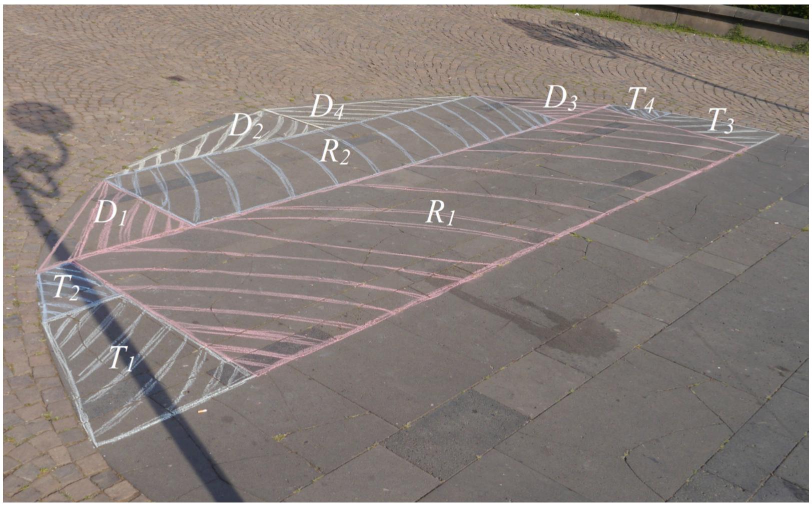
Im Grunde muss das Eckige ins Runde

Flächen unterhalb von Funktionsgraphen berechnen

Lösungsvorschlag

Diese Lösung wurde auf dem Vorplatz der Oper in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Eine mögliche Annäherung des Flächeninhalts mittels Rechtecken, Dreiecken und Trapezen kann wie folgt aussehen:



Flächeninhalt der beiden Rechtecke R_1 und R_2:

$$F_{R_1} = 5,63\ \text{m} \cdot 1,40\ \text{m} \approx 7,88\ \text{m}^2$$

$$F_{R_2} = 4,13\ \text{m} \cdot 0,90\ \text{m} \approx 3,72\ \text{m}^2$$

Flächeninhalt der vier Trapeze T_1, T_2, T_3 und T_4:

$$F_{T_1} = \frac{1}{2} \cdot (0,48\ \text{m} + 0,74\ \text{m}) \cdot 0,93\ \text{m} \approx 0,57\ \text{m}^2 = F_{T_3}$$

$$F_{T_2} = \frac{1}{2} \cdot (0,21\ \text{m} + 0,48\text{m}) \cdot 0,47\ \text{m} \approx 0,16\ \text{m}^2 = F_{T_4}$$

Flächeninhalt der vier Dreiecke D_1, D_2, D_3 und D_4:

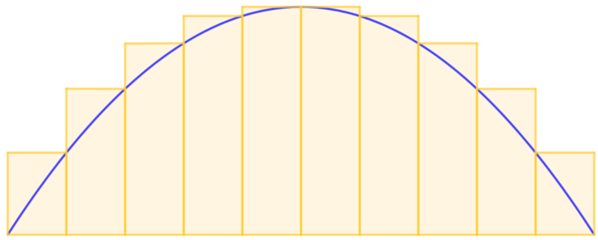
$$F_{D_1} = \frac{1}{2} \cdot 0,96\ \text{m} \cdot 0,90\ \text{m} \approx 0,43\ \text{m}^2 = F_{D_3}$$

$$F_{D_2} = \frac{1}{2} \cdot 2,00\ \text{m} \cdot 0,70\ \text{m} = 0,70\ \text{m}^2 = F_{D_4}$$

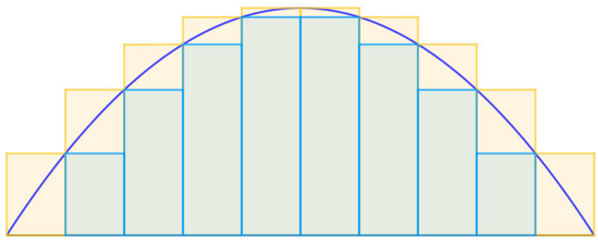
Addition aller Flächen ergibt:

$$[7,88 + 3,72 + 2 \cdot 0,57 + 2 \cdot 0,16 + 2 \cdot 0,43 + 2 \cdot 0,70]\ \text{m}^2 = 15,32\ \text{m}^2$$

A2 Die folgende Skizze visualisiert die aufgezeichneten Rechtecke, welche die Fläche vollständig umschließen:



A3 Die folgende Skizze visualisiert die aufgezeichneten Rechtecke (hellblau), welche in der Fläche vollständig enthalten sind:



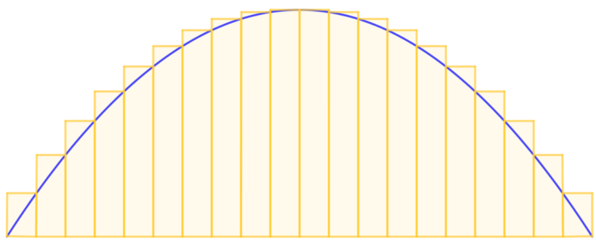
A4 Eine obere Abschätzung lässt sich mithilfe der Ergebnisse der Teilaufgabe **A2** berechnen, indem die gelben Rechteckflächen zusammenaddiert werden. Die Obersumme O beträgt:

$$O = 1,55\text{ m} \cdot [2,16+3,84+5,04+5,76+6+6+5,76+5,04+3,84+2,16]\text{ m} \approx 70,68\text{ m}^2$$

Eine untere Abschätzung lässt sich mithilfe der Ergebnisse der Teilaufgabe **A3** berechnen, indem die blauen Rechteckflächen zusammenaddiert werden.
Die Untersumme U beträgt:

$$U = 1,55\text{ m} \cdot [2,16+3,84+5,04+5,76+5,76+5,04+3,84+2,16]\text{ m} \approx 52,08\text{ m}^2$$

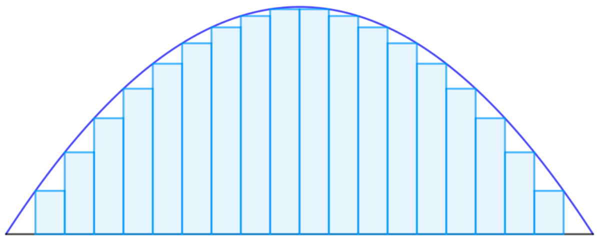
A5 Halbiert man die Breite der Rechtecke, die die Fläche vollständig umschließen, ergibt sich folgende Skizze:



Eine neue obere Abschätzung lässt sich (wie in Teilaufgabe **A4**) berechnen, indem die gelben Rechteckflächen zusammenadiert werden. Die neue Obersumme O_{neu} beträgt:

$$\begin{aligned} O_{\text{neu}} &= 0,775\text{m} \cdot [1,15+2,16+3,06+3,84+4,5+5,04+5,46+5,76+5,94+6 \\ &\quad +6+5,94+5,76+5,46+5,04+4,5+3,84+3,06+2,16+1,15]\text{ m} \\ &\approx 66,51\text{ m}^2 \end{aligned}$$

Genauso kann für die Untersumme vorgegangen werden. Halbiert man die Breite der Rechtecke, die vollständig in der Fläche enthalten sind, ergibt sich folgende Skizze:



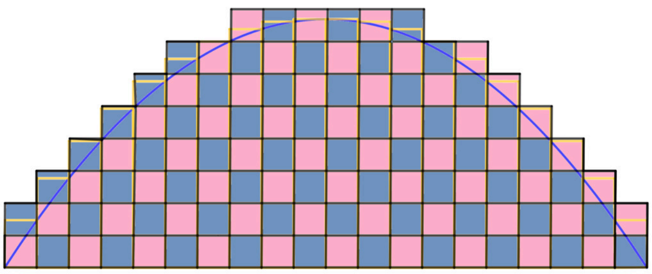
Eine neue untere Abschätzung lässt sich ebenfalls berechnen, indem die blauen Rechteckflächen zusammenaddiert werden. Die neue Untersumme U_{neu} beträgt:

$$\begin{aligned} U_{\text{neu}} &= 0,775\text{m} \cdot [1,15 + 2,16 + 3,06 + 3,84 + 4,5 + 5,04 + 5,46 + 5,76 + 5,94 \\ &\quad + 5,94 + 5,76 + 5,46 + 5,04 + 4,5 + 3,84 + 3,06 + 2,16 + 1,15]\ \text{m} \\ &\approx 57,21\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

Es kann festgestellt werden, dass sich die Ober- und die Untersumme bei schmaleren Rechteckbreiten aneinander annähern.

A6 Je schmaler die eingezeichneten Rechtecke werden, beziehungsweise je mehr Rechtecke eingezeichnet werden, desto genauer wird die Abschätzung für den tatsächlichen Flächeninhalt.
Um die Höhe eines Rechtecks zu bestimmen, wählt man bei der Obersumme den größten Funktionswert des betrachteten Teilintervalls. Bei der Untersumme wählt man entsprechend den kleinsten Funktionswert.
Die Abschätzung für den tatsächlichen Flächeninhalt wird noch besser, wenn man für die Rechteckhöhen jeweils den Funktionswert in der Mitte des entsprechenden Teilintervalls auf der x-Achse verwendet. Die so verwendeten Rechtecke über- und unterschätzen f in verschiedenen Bereichen der x-Achse, so dass insgesamt eine gute Schätzung entsteht.

A7 Sehr große Mosaikfliesen haben den Vorteil, dass die Fläche mit ihnen schnell ausgelegt ist, während das Auslegen mit kleinen Fliesen mehr Mühe bedeutet. Allerdings ist der Materialverbrauch bei kleinen Fliesen deutlich geringer, da die Fläche genauer ausgelegt werden kann. Um den Aufwand im Bereich des Möglichen zu halten und dennoch keinen zu großen Überschuss zu generieren, haben wir uns in dieser Lösung für mittelgroße Fliesen entschieden. Diese haben eine Seitenlänge von 0,78 Metern, was der Rechteckbreite aus Teilaufgabe **A5** entspricht. Damit ergibt sich folgendes Mosaik:



A8 Die Mosaiksteine haben eine Seitenlänge von 0,78 Metern. Da sie quadratisch sind, ergibt sich pro Stein ein Flächeninhalt von 0,6084 Quadratmetern. Pro Farbe wurden 58 Steine verwendet. Damit hat jede Farbe einen Flächeninhalt von 35,2872 Quadratmetern.

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 und visualisiert die Idee des Riemann-Integrals. Mithilfe von Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler den Flächeninhalt einer Fläche am Boden annähern und insbesondere erkennen, dass sich der Flächeninhalt der Summe der Rechtecksflächen bei kleiner werdender Intervallgröße an den tatsächlichen Flächeninhalt annähert.

Je nach Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler kann es hilfreich sein, wenn die Einführung in die Integralrechnung bereits im Vorfeld erfolgt ist. Die Aufgabe fördert das Grundverständnis des Integralbegriffs und ist somit sowohl für den Leistungskurs als auch für den Grundkurs geeignet.

Als Lernort eignet sich eine Bodenfläche, die durch eine Strecke und eine darüberliegende (gegebenenfalls nach oben verschobene) Kurve visuell begrenzt wird. Falls ein solcher Lernort nicht gefunden werden kann, ist es möglich, entsprechende Flächen mit Kreide auf den Boden aufzuzeichnen.Wenn an dem Lernort mehrere solcher Flächen nebeneinander auftreten, bietet es sich an, die Aufgabe in Kleingruppen bearbeiten zu lassen.