Kannst du das STÄMMEn?

Integralrechnung mit Bäumen

Lösungsvorschlag

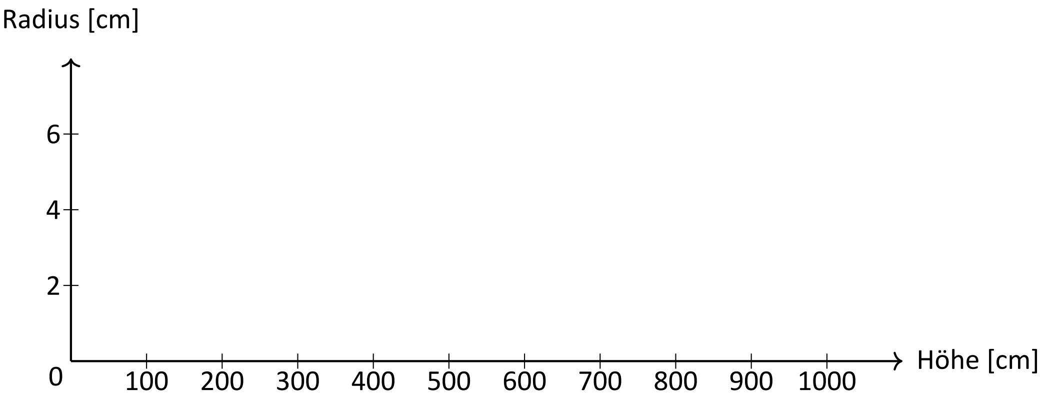
Hinweis: Diese Lösung wurde an einem Baum in Liers (Ahrtal) erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Für die Modellierung des Baumstammes eignet sich die geometrische Form des Zylinders oder die des Kegels. In beiden Fällen werden lokale Unebenheiten wie Knoten und Verzweigungen von Ästen außer Acht gelassen.

A2 Der folgenden Tabelle sind die erhobenen Messwerte zu entnehmen:

Messung	Höhe [cm]	Umfang [cm]
1	50	29,0
2	130	26,4

A3 Eine mögliche Achsenskalierung ist der folgenden Abbildung zu entnehmen:



B1 Zur Bestimmung der Punkte ist es zunächst notwendig, den Radius aus dem gemessenen Umfang zu bestimmen. Dazu stellt man die Gleichung des Umfangs nach dem Radius um.

$$r = \frac{1}{2\pi} \cdot U$$

Unter Verwendung der Messwerte aus Teilaufgabe **A2** ergeben sich folgende Werte:

Punkt	Höhe [cm]	Radius [cm]
P_1	50	4,62
P_2	130	4,20

Zur Bestimmung der Gleichung einer Geraden der Form $f(x) = mx + b$, die durch die beiden Punkte verläuft, muss zunächst die Steigung

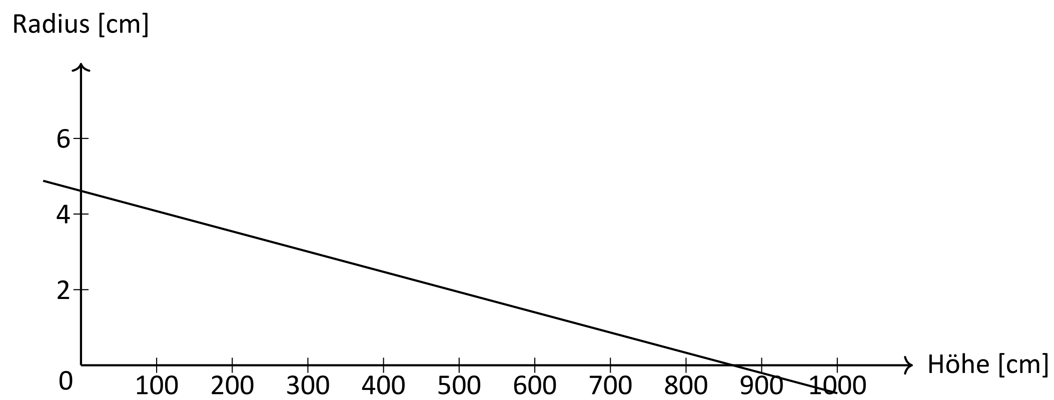
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

errechnet werden. Es ergibt sich eine Steigung von

$$m = \frac{4{,}20 - 4{,}62}{130 - 50} = -5{,}25 \cdot 10^{-3}.$$

Setzt man den Wert für m nun in Gleichung ein, erhält man $f(x) = -5{,}25 \cdot 10^{-3}x + b$. Um den Wert von b zu bestimmen, muss ein Punkt in die Funktionsvorschrift eingesetzt werden. Nimmt man dazu beispielsweise P_1, ergibt sich $b = 4{,}62 + 5{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \approx 4{,}88$. Die Geradengleichung, die entlang des Baumstammes zur Spitze führt, lautet demnach

$$f(x) = -5{,}25 \cdot 10^{-3}x + 4{,}88.$$



B2 Für einen dritten Punkt ergeben sich die in der folgenden Tabelle gelisteten Messwerte.

Punkt	Höhe [cm]	Umfang [cm]	Radius [cm]
P_3	75	28,5	4,54

Berechnet man alternativ den Radius von P_3 mithilfe der Geradengleichung aus Teilaufgabe **B1** (also $f(x_3)$), ergeben sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte.

Punkt	Radius (Messwert) [cm]	Radius (berechnet) [cm]	abs. Abweichung [cm]	rel. Abweichung [%]
P_3	4,54	4,49	0,05	1,10

Mögliche Gründe für eine Abweichung können sein:

- Messungenauigkeiten und Messfehler
- Wahl ungeeigneter Messstellen (Verdickungen oder Verjüngungen an Messstellen)
- Annahme, dass der Baum Kegelform hat, ist nur eine Näherung.

B3 Da die Funktion so konstruiert wurde, dass die Höhe auf der x-Achse aufgetragen wird, entspricht die Gesamthöhe des Baumes der Nullstelle der Geraden. Es gilt also die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen:

$$-5{,}25 \cdot 10^{-3}x + 4{,}88 \stackrel{!}{=} 0.$$

Mittels Umformen ergibt sich eine Höhe von $x \approx 930$ Zentimetern, also von etwa $9{,}30$ Metern.

C1 Zur Bestimmung des Stammvolumens wird die Formel zur Bestimmung des Rotationsvolumens herangezogen:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Da das Volumen des gesamten Stammes bestimmt werden soll, muss das Integral von $a = 0$ (Boden) bis $b = 930$ (Baumspitze) bestimmt werden:

$$\pi \int_0^{930} \left(-5{,}25 \cdot 10^{-3} x + 4{,}88\right)^2 dx$$

Dazu lösen wir zunächst die Klammer mittels binomischer Formel auf und verwenden Brüche:

$$\pi \int_0^{930} \left(\frac{441}{160} \cdot 10^{-5} x^2 - \frac{1.281}{25.000} x + \frac{14.884}{625} \right) dx$$

Nun haben wir ein Polynom zweiten Grades und können die einzelnen Summanden integrieren. Es ergibt sich folgender Wert des gesuchten Integrals:

$$\pi \left[\frac{441}{480} \cdot 10^{-5} x^3 - \frac{1.281}{50.000} x^2 + \frac{14.884}{625} x \right]_0^{930}$$

Rechnet man den Wert des Integrals nun mit Hilfe des Taschenrechners aus, ergibt sich für das Volumen

$$V \approx \pi \, (7.378{,}68 - 0) \approx 23.180{,}81$$

Der Baumstamm hat nach dieser Berechnung also ein Volumen von etwa $23.180, 81$ Kubikzentimetern.

C2 Da ein Festmeter einem Kubikmeter entspricht, folgt mit $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$ ein Volumen (diesmal notiert mit Einheiten) von

$$V = 23.180{,}81 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 0{,}023 \text{ m}^3.$$

Der Baumstamm hat somit ein Volumen von ca. $0{,}023$ Festmetern.

C3 Das Kegelvolumen ist gegeben durch

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Dabei gewinnen wir den Radius r aus einer Messung des Umfangs von 31 Zentimetern am Boden. Daraus ergibt sich ein Radius am Boden von $4, 93$ Zentimetern. Die Höhe h ergibt sich als Nullstelle von f, die in Teilaufgabe **B3** bestimmt wurde. Es ergibt sich

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4, 93)^2 \cdot 930 \approx 23.670{,}39 \text{ cm}^3.$$

Die Diskrepanz zu dem Rotationsvolumen ergibt sich aus der Tatsache, dass wir den Radius am Boden aus der Messung gewonnen haben und nicht aus dem y-Achsenabschnitt der Funktion f aus Teilaufgabe **B1**. Außerdem treten gegegebenfalls Rundungsfehler auf.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang ist für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 konzipiert und eignet sich besonders gut als Abschluss der Unterrichtsreihe zur Integralrechnung. Vor dem Spaziergang sollte bekannt sein, was ein Rotationskörper ist und wie man dessen Volumen bestimmt. Gegebenenfalls ist eine kurze Wiederholung zu Körpern und deren Eigenschaften empfehlenswert.
In Aufgabenteil **A** lernen die Schülerinnen und Schüler den Lernort kennen und nehmen erste Messungen vor. Für das Messen bietet sich die Arbeit in Dreiergruppen an, wobei zwei Personen messen und die dritte die entsprechenden Werte notiert.
Aufgabenteil **B** bereitet auf das eigentliche Ziel der Aufgabe vor. Dabei kommen Techniken zum Einsatz, die den Schülerinnen und Schülern bereits aus vorherigen Klassenstufen bekannt sind. Sie stellen eine lineare Funktion anhand zweier gegebener Punkte auf und berechnen deren Nullstellen.
Die Bestimmung des Stammvolumens wird in Aufgabenteil **C** abgeschlossen. Da die Schülerinnen und Schüler die Kompetenzen und Werkzeuge dafür bereits im Vorfeld im Unterricht erworben haben sollten, ist für diese Teilaufgaben Einzelarbeit vorgesehen. Sie lernen dabei die Anwendung der Integralrechnung und wiederholen Inhalte wie das Umrechnen von Einheiten oder die „klassische“ Volumenberechnung von Körpern.