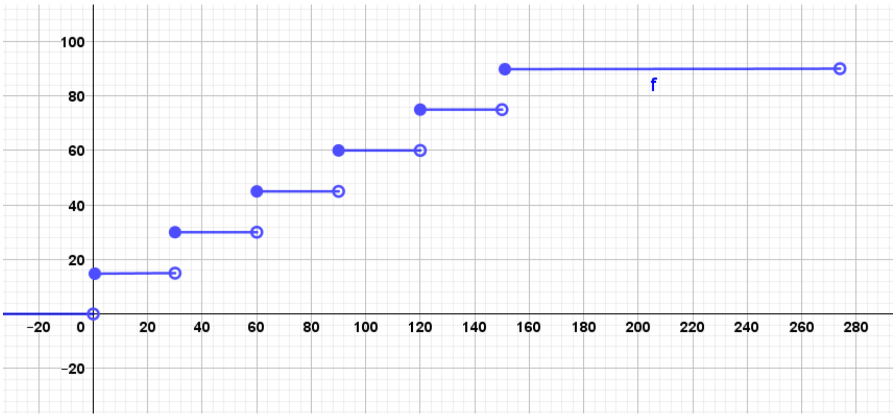
Die Oberstufe auf dem Treppchen

Stufen im Alltag und in Funktionen

Lösungsvorschlag

Diese Lösung wurde an der Treppe vor dem "Sinziger Löwen" erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Die Abbildung zeigt von der beispielhaften Treppe den untersten Abschnitt. Dabei ist zu beachten, dass eine Zuordnung nur eine Funktion ist, wenn es eine eindeutige Zuordnung ist, bei der jeder Zahl *x* aus der Definitionsmenge eine ganz bestimmte Zahl *y* zugeordnet wird. Dies ist durch den ausgefüllten Punkt und das Loch dargestellt. Das bedeutet zum Beispiel, dass für $x = 60$ cm der Funktionswert 45 cm ist und nicht 30 cm.



A2 f wird hier nur für den untersten Abschnitt der Treppe definiert, da es analog für die anderen Abschnitte weitergeht.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } x < 0 \\ 15 & \text{für alle } x \in [0, 30) \\ 30 & \text{für alle } x \in [30, 60) \\ 45 & \text{für alle } x \in [60, 90) \\ 60 & \text{für alle } x \in [90, 120) \\ 75 & \text{für alle } x \in [120, 150) \\ 90 & \text{für alle } x \in [150, 274) \end{cases}$$

A3 f ist stetig im Inneren der Intervalle des Definitionsbereiches. Zum Beispiel für alle $x \in (0, 30)$ ist f stetig, denn zum Beispiel für $x_0 = 1$ und alle anderen $x \in (0, 30)$ gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 15 = 15 = f(1)$$

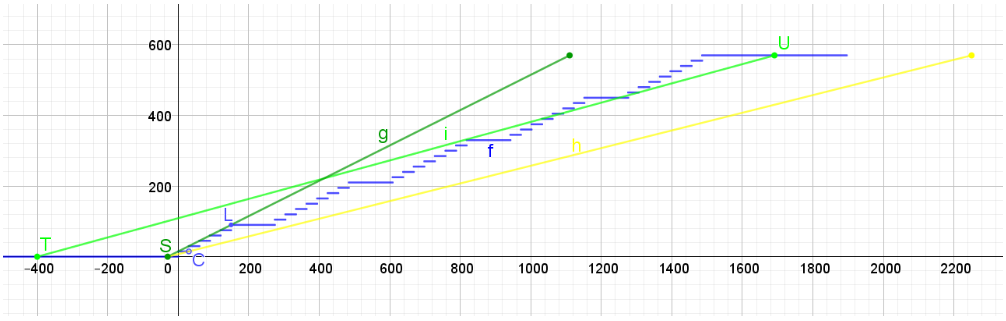
Diese stetigen Stellen sind am Lernort die Oberflächen der Stufen.

A4 f ist unstetig an den Randpunkten der Intervalle des Definitionsbereiches. In diesem Abschnitt der Treppe sind es die Stellen $x_0 \in \{0, 30, 60, 90, 120, 150\}$, denn dort stimmt zwar der rechtsseitige Grenzwert mit $f(x_0)$ überein, aber der linksseitige Grenzwert nicht, zum Beispiel für $x_0 = 30$:

$$\lim_{x \nearrow 30} f(x) = \lim_{x \nearrow 30} 15 = 15 \neq 30 = f(30) = \lim_{x \searrow 30} 30 = \lim_{x \searrow 30} f(x)$$

Diese Unstetigkeitsstellen sind der Sprünge im Funktionsgraphen. Dies spiegelt die vordere Kante der Stufen am Lernort wider.

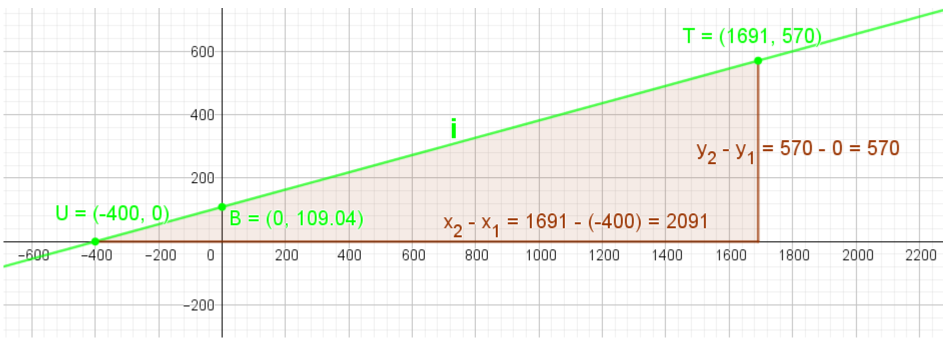
B1 Die folgende Abbildung zeigt drei verschiedene Strecken (g, h und i), die an der Treppe Rollstuhl-Rampen konstruieren:



Ihre zugehörigen Funktionen sind stetig.

B2 In der Abbildung aus Teilaufgabe **B1** ist eine dunkelgrüne Strecke (g) durch die vorderen Kanten der untersten Treppenstufen (z.B. L) zu sehen. Die zweite Strecke (h) geht durch den Schnittpunkt S der ersten Strecke mit der y-Achse und durch die hintere Kante der ersten Stufe C. Eine dritte Möglichkeit wäre den Anfang der Strecken zu verschieben und sich an den letzten Stufen zu orientieren, sodass die Strecke (i) durch die Punkte T und U verläuft.
Mögliche Argumente in der Diskussion wären: Der Vorteil von g ist, dass sie sehr nah an dem ersten Teil der Treppenfunktion ist, also die Bauarbeiter der Rampe nur wenig Beton oder ähnliches gießen müssen. Allerdings ist sie sehr steil und daher nicht gut zu nutzen. h ist deutlich flacher und daher benutzerfreundlicher. Das Ende dieser Strecke befände sich allerdings in der Löwenskulptur. Der exemplarische Lernort ist am oberen Ende der Treppe begrenzt, sodass eine Rampe, die nach der Funktion h gebaut wird, nicht realisierbar ist. Am unteren Ende der Treppe ist allerdings ein Park und jede Menge Platz, um wie in der Funktion i den Start der Rampe nach vorne zu verlegen.

B3 Die Entscheidung ist abhängig vom Lernort. Hier wird exemplarisch die Strecke i zu einer Geraden erweitert (siehe Abbildung) und deren Gleichung bestimmt. Die Steigung m einer Geraden lässt sich mithilfe des Steigungsdreiecks berechnen. Hier wird mit dem ersten Punkt $T = (-400, 0)$ und dem zweiten Punkt $U = (1691, 570)$ gerechnet:



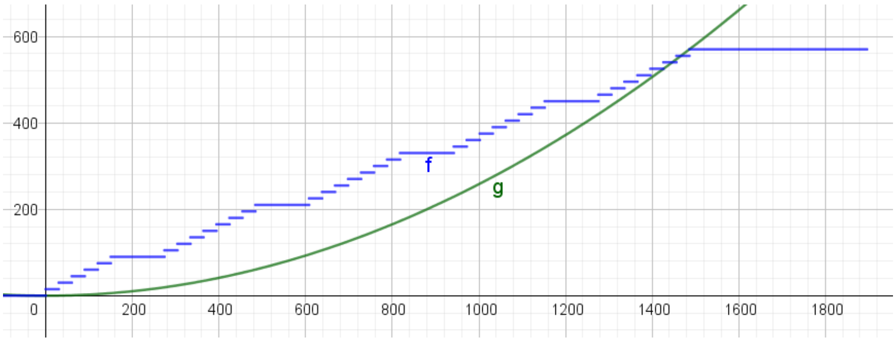
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{570 \text{ cm} - 0 \text{ cm}}{1691 \text{ cm} - (-400) \text{ cm}} = \frac{570 \text{ cm}}{2091 \text{ cm}} \approx 0,27$$

Um den y-Achsenabschnitt b auszurechnen, werden m und ein beliebiger Punkt, in diesem Beispiel $T = (-400, 0)$, eingesetzt. Dann ergibt sich:

$$i(x) = m \cdot x + b \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0,27 \cdot (-400) + b \quad \Leftrightarrow \quad b \;=\; 108$$

Die Geradengleichung lautet $i(x) = 0,27\ x + 108$

C1 Die quadratische Funktion $h(x) = ax^2 + bx + c$ hat drei unbekannte Koeffizienten, sodass drei Eigenschaften der gesuchten Parabel in Gleichungen dargestellt werden müssen.
Der Fuß der Rampe soll im Koordinatenursprung sein, denn da ist in diesem Fall auch der Fuß der Treppe. Also muss $h(0) = 0$ gelten.



Außerdem soll dort die Rampe flach sein, was durch die Steigung (Ableitung) ausgedrückt werden kann. Es muss $h'(0) = 0$ gelten.
Das obere Ende der Rampe sollte an der obersten Stufe sein, also ergibt das Ablesen des Punktes $h(1486) = 570$.
Die erste Gleichung $h(0) = 0$ ergibt mit der Formel $h(x) = ax^2 + bx + c$:
$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0$
Die zweite Gleichung $h'(0) = 0$ wird in die Ableitung der Formel, also in $h'(x) = 2ax + b$ eingesetzt. $\quad \Rightarrow \quad 0 = 2a \cdot 0 + b \quad \Rightarrow \quad b = 0$
Die dritte Gleichung $h(1486) = 570$ und die bereits ausgerechneten Variablen eingesetzt in die Formel ergeben dann: $570 = a \cdot 1486^2 + 0x + 0$ und damit $a = \dfrac{570}{1486^2} = \dfrac{570}{2208196} \approx 0,00026.$
Die quadratische Funktion, die an dem exemplarischen Lernort eine Skateboard-Rampe annähert, lautet $h(x) = 0,00026x^2$.

C3 Die Fläche unter der Treppenfunktion lässt sich über die Summation von Rechtecksflächen berechnen. Sie beträgt 417870 Quadratzentimeter, also etwa 42 Quadratmeter.
Die Fläche unter der linearen Funktion lässt sich mittels Integration berechnen. Sie beträgt:

$$\int_{-400}^{1691} (0,27x + 108)\,\mathsf{dx} = \Big[0,135x^2 + 108x\Big]_{-400}^{1691} \approx 590258$$

Die Fläche unter der Rampe beträgt etwa 590258 Quadratzentimer. Das sind etwa 59 Quadratmeter.
Die Fläche unter der quadratischen Funktion lässt sich ebenfalls mittels Integration berechnen. Sie beträgt:

$$\int_{0}^{1500} 0.00026x^2\,\mathsf{dx} = \Big[\frac{0,00026}{3}x^3\Big]_{0}^{1486} = 284386$$

Die Fläche unter der Skateboard-Rampe beträgt etwa 284386 Quadratzentimeter. Das sind etwa 28 Quadratmeter.

Beim Vergleich der Flächeninhalte gilt es zu berücksichtigen, dass die Funktionen nicht alle im gleichen Punkt starten und enden.

Didaktischer Kommentar

Dieser Spaziergang behandelt die Stetigkeit von Funktionen und richtet sich damit an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 (Leistungskurs). Im Rahmen dieser Aufgabe sollen eine Treppenfunktion untersucht und sowohl eine lineare als auch eine quadratische Funktion konstruiert werden. Als Lernort genügt eine große Treppe. Für die Veranschaulichung der Stetigkeit kann es helfen, eine Treppe zu wählen, zwischen deren Stufen ein Freiraum ist.
Die Bearbeitung der Aufgaben dauert etwa 90 Minuten. Es werden Schreibmaterial, ein Maßband, ein Geodreieck und ein Taschenrechner benötigt, um genaue Messungen und Rechnungen durchzuführen.
Im Unterricht muss vor dieser Aufgabe der Begriff der Stetigkeit eingeführt worden sein. Insbesondere sollte dabei auf die Bedeutung von linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert eingegangen werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten auch damit vertraut sein, die Funktionsgleichung einer Treppenfunktion aufzustellen.