Schaukeln mit Sinus und Co

Extremwertbestimmung bei der Sinusfunktion

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an einer Schaukel auf dem Spielplatz am Michaelsberg in Siegburg erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichend die Ergebnisse ab. Die für die Erstellung der Lösung verwendete Schaukel hat eine Seillänge von 1,84 Metern.

A1 Die gemessenen Werte betragen:

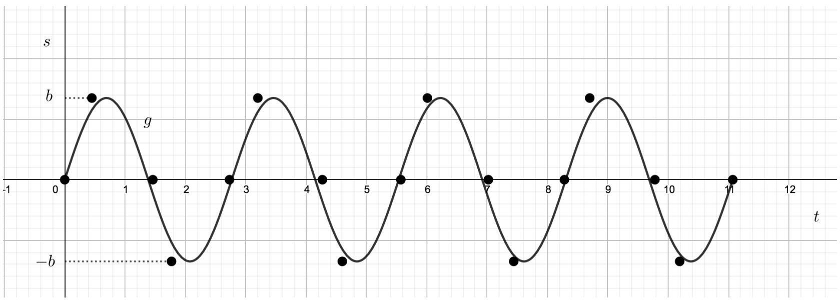
- Zeitpunkte am Ausgangspunkt (Ruhelage): 0 s - 1,46 s - 2,73 s - 4,27 s - 5,57 s - 7,02 s - 8,28 s - 9,78 s - 11,07 s
- Zeitpunkte am vordersten Punkt: 0,45 s - 3,2 s - 6,01 s - 8,7 s
- Zeitpunkte am hintersten Punkt: 1,77 s - 4,6 s - 7,44 s - 10,19 s

A2 Für α wurde ein Winkel von $48°$ gemessen. Zusammen mit dem rechten Winkel folgt dann aus dem Innenwinkelsatz $\beta = 42°$.

A3 Der Radius r der Schaukel beträgt $1,84$ m. Für den Teil des Kreisbogens b gilt:

$$b = 2\pi r \frac{\beta}{360°} = 2\pi \cdot 1,84\text{m} \cdot \frac{42°}{360°} \approx 1,35\text{m}.$$

A4 In der Abbildung wurden die Werte aus Teilaufgabe **A1** eingetragen und durch die Funktion g aus **B2** mit $g(x) = 1,35 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right)$ approximiert.

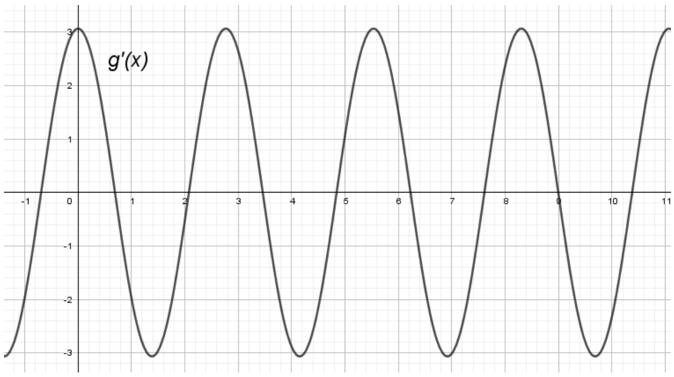


B1 Folgende Eigenschaften könnten genannt werden: Die Sinusfunktion ist periodisch mit Periode 2π. Der Bildbereich ist $[-1;1]$. Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Cosinusfunktion. Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

B2 Die Amplitude a der Schwingung beträgt 1,35 Meter.
Für c gilt: $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,7675}$, wobei für $T = 2,7675$ die durchschnittliche Periodendauer der vier Schaukeldurchgänge eingesetzt wurde.
Somit ergibt sich:

$$g(x) = 1,35 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right).$$

C1 Die skizzierte Ableitung ähnelt einer Cosinusfunktion.



C2 Die Ableitung gibt die momentane Geschwindigkeit des Schaukelbretts an.

C3 Die maximale Geschwindigkeit kann als Hochpunkt der Ableitung bestimmt werden.
Für die Ableitung von g gilt:

$$g'(x) = 1,35 \cdot \frac{2\pi}{2,7675} \cos\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right)$$

Die zweite Ableitung lautet:

$$g''(x) = 1,35 \cdot \left(\frac{2\pi}{2,7675}\right)^2 \cdot \left(-\sin\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right)\right)$$

Die dritte Ableitung lautet:

$$g'''(x) = 1,35 \cdot \left(\frac{2\pi}{2,7675}\right)^3 \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right)\right)$$

Um Extremstellen von g' zu ermitteln, müssen wir die Nullstellen der zweiten Ableitung untersuchen. Offensichtlich ist $g''(x) = 0$ genau dann, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{2,7675}{2}$ ist, also an den Stellen, $x = 0$, $x = \frac{1}{2} \cdot 2,7675$, $x = 2,7675$, $x = \frac{3}{2} \cdot 2,7675$ usw.
Wenn wir diese Stellen in die dritte Ableitung einsetzen, dann stellen wir fest, dass an den Stellen $x = 0$, $x = 2,7675$, $x = 2 \cdot 2,7675$ usw. jeweils ein negativer Wert der dritten Ableitung vorliegt. Es handelt sich hier also um Hochpunkte von g'. An den Stellen $x = \frac{1}{2} \cdot 2,7675$, $x = \frac{3}{2} \cdot 2,7675$, $x = \frac{5}{2} \cdot 2,7675$ usw. ist die dritte Ableitung positiv. Es liegen somit Tiefpunkte von g' vor. Man muss sich bewusst machen, dass die Geschwindigkeit beim Schwingen nach hinten negativ angegeben wird. Einsetzen der Extremstellen in g' ergibt die jeweilige Maximalgeschwindigkeit von $\pm 1,35 \cdot \frac{2\pi}{2,7675} \approx \pm 3,06$ Metern pro Sekunde.
Alle Stellen, an denen diese Geschwindigkeit erreicht wird, sind die Nullstellen von g, also die Stellen, wo der Schaukelnde durch die Ruhelage schwingt (mit Auslenkung $\beta = 0°$).

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe ist für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 konzipiert und lässt sich in eine Unterrichtsreihe des Inhaltsfeldes Analysis mit dem Schwerpunkt Differentialrechnung einbetten.
In Teilaufgabe **A1** müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst verschiedene Werte messen. In Teilaufgabe **A2** müssen die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse über die Innenwinkel von Dreiecken anwenden, um den Winkel der maximalen Schaukelschwingung nach vorne zu ermitteln. In Teilaufgabe **A3** soll die Länge des Kreisbogens zwischen dem Ausgangspunkt und dem vordersten Punkt ermittelt werden. Die hierfür benötigten Kenntnisse sollten aus der Sekundarstufe 1 bekannt sein. In Teilaufgabe **A4** soll die Schaukelschwingung in ein Zeit-Bogenlänge-Diagramm gezeichnet werden. Anhand der Messungen ihrer Schaukelbewegung skizzieren die Schülerinnen und Schüler eine Sinusfunktion.
Teilaufgabe **B1** dient als Wiederholung der Eigenschaften der allgemeinen Sinusfunktion. In Teilaufgabe **B2** approximieren die Schülerinnen und Schüler die gezeichnete Funktion durch eine Transformation der allgemeinen Sinusfunktion.
In Teilaufgabe **C1** wird das Zeichnen einer Ableitungsfunktion geübt und den Schülerinnen und Schülern wird nochmals in Erinnerung gerufen, dass die Cosinusfunktion die Ableitung der Sinusfunktion ist. Dies sollte aus der Einführungsphase bereits bekannt sein. In Teilaufgabe **C2** wird das Verständnis der Ableitung im Sachzusammenhang als Geschwindigkeit vertieft. In Teilaufgabe **C3** soll die maximale Geschwindigkeit mithilfe eines Hochpunktes der Ableitung errechnet werden. Für diese Teilaufgabe wird die Kettenregel benötigt.