Polynome in einem Rutsch

Steigungen am Spielplatz

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde am Spielplatz im Grünzug Bonn-Nord erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Messungen ergeben $s = 3$, $h = 2,10$ und $k = 0,40$. Die Rutsche startet also im Punkt $(0|2,10)$ und endet im Punkt $(3|0,40)$. Mithilfe des Differenzenquotienten ergibt sich die durchschnittliche Steigung:

$$m_{\text{gesamt}} = \frac{2,10 - 0,40}{0 - 3} = -\frac{1,7}{3} = -0,5\overline{6}$$

Analog dazu geht man bei der Berechnung der mittleren Steigung im Intervall $[1,25; 1,75]$ vor:

$$m_{[1,25;1,75]} = \frac{1,49 - 1,13}{1,25 - 1,75} = -0,72$$

A2 Um die Abweichung der mittleren Steigung um den Mittelpunkt von der mittleren Steigung der kompletten Rutsche zu bestimmen, muss $m_{[1,25;1,75]}$ von m_{gesamt} subtrahiert werden:

$$-0,5\overline{6} - (-0,72) = 0,15\overline{3}$$

Dies entspricht einer prozentualen Abweichung von 27,06 Prozent. In der Mitte ist die Rutsche deutlich steiler als im Durchschnitt.

B1 Gesucht ist ein Polynom der Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$). Die notwendigen Bedingungen für die Polynomfunktion f lauten:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2,10 &&\Leftrightarrow \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2,10\\
f(3) &= 0,40 &&\Leftrightarrow \quad a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 0,40\\
f'(0) &= 0 &&\Leftrightarrow \quad 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0\\
f'(3) &= 0 &&\Leftrightarrow \quad 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = 0.
\end{aligned}$$

Das zugehörige lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & d = 2,10\\
\text{II} & 27a + 9b + 3c + d = 0,40\\
\text{III} & c = 0\\
\text{IV} & 27a + 6b + c = 0
\end{array}$$

B2 Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet: $a \approx 0,126$, $b \approx -0,567$, $c = 0$ und $d = 2,10$. Daraus resultiert die Funktionsgleichung: $f(x) = 0,126x^3 - 0,567x^2 + 2,10$.

B3 Die steilste Stelle der Rutsche ist dort, wo die Wendestelle vorliegt. Diese muss zunächst bestimmt werden:

$$f'(x) = 0,378x^2 - 1,134x \qquad f''(x) = 0,756x - 1,134$$

Für $f''(x) = 0$ erhält man die Lösung $x = 1,50$ (Wendestelle, da $f'''(x) \neq 0$). Die Steigung ergibt sich dann mittels $f'(x)$: $f'(1,50) = -0,8505$. Um den Steigungswinkel α zu bestimmen, löst man folgende Gleichung:

$$\tan(\alpha) = -0,8505$$

Hieraus resultiert $\alpha \approx -40,38°$. Die Rutsche ist also nur etwas über 40 Grad gegen die Horizontale geneigt und entspricht somit den Anforderungen.

C1 Diese Aufgabe lässt sich lösen, indem man ein Steigungsdreieck an der Rutsche entwirft. Die Höhe lässt sich hier schlecht messen. Die Hypotenuse lässt sich aber leicht mit einem Maßband messen. Sie ist ungefähr $6,25$ Meter lang. Nun kann mit mehreren Zollstöcken die Länge des Dreiecks in der Waagerechten bestimmt werden. Das Ergebnis ist hier etwa $5,82$ Meter. Somit lässt sich mithilfe des Satzes von Pythagoras die Höhe bestimmen:

$$h = \sqrt{6,25^2 - 5,82^2} \approx 2,28$$

Daraus ergibt sich für die durchschnittliche Steigung:

$$m_{\text{Rutsche2}} = \frac{2,28}{5,82} \approx 0,39$$

Die Rutsche ist flacher als die erste. Dass die Steigung hier ein positives Vorzeichen hat, liegt an der gewählten Orientierung des Koordinatensystems und muss gut interpretiert werden.

C2 Da die Rutsche in der Mitte horizontal verläuft, beträgt die momentane Steigung hier 0. Dies weicht stark von der mittleren Steigung ab. Folgende Erkenntnisse sind wichtig:

- Bei linearen Verläufen sind mittlere Steigung und momentane Steigung identisch.
- Ist eine Funktion annähernd linear, so sind beide Größen ähnlich groß.
- Falls Extrempunkte oder Sattelpunkte im Intervall liegen, ist die Sekante eine ungeeignete Annäherung für die momentane Steigung.

Didaktischer Kommentar

Idealerweise bearbeiten die Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe nach Einführung in das Thema „Funktionsgleichungen anhand von gegebenen Eigenschaften bestimmen“ (Steckbriefaufgaben) und nachdem der Begriff der Steigung ausführlich unterrichtet wurde. Die Aufgabenteile **A** und **C** beschäftigen sich mit der mittleren Steigung in einem Intervall. Der Aufgabenteil **C** findet an einer etwas anders geformten Rutsche statt. Die Aufgabenstellung bleibt jedoch unverändert.
Die Teilaufgaben **B1** und **B2** thematisieren eine Steckbriefaufgabe. Zur Bearbeitung der Teilaufgabe **B1** sollten die Lernenden in der Lage sein, charakteristische Punkte der gegebenen Rutsche zu erkennen, um anschließend ein lineares Gleichungssystem aufzustellen, welches den Sachverhalt modelliert. In Teilaufgabe **B2** gilt es dann, das lineare Gleichungssystem mithilfe des grafikfähigen Taschenrechners zu lösen. Teilaufgabe **B3** erfordert folgende Kenntnis von Seiten der Schülerinnen und Schüler: Die steilste Stelle der Rutsche ist dort, wo der Wendepunkt vorliegt. Die Steigung in diesem Punkt muss zunächst bestimmt werden, um im Anschluss den Steigungswinkel mithilfe des Tangens zu ermitteln.
In der Aufgabe wird unter anderem der Unterschied zwischen der durchschnittlichen und der momentanen Steigung einer Funktion thematisiert. Es bietet sich daher an, im Anschluss an den Spaziergang den Mittelwertsatz der Differentialrechnung im Unterricht zu behandeln.