Hast du den Bogen raus?

Parabeln und Halbkreise

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an einem Pfeiler entlang des Poppelsdorfer Weihers sowie an einer Bogenbrücke vor dem Poppelsdorfer Schloss in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

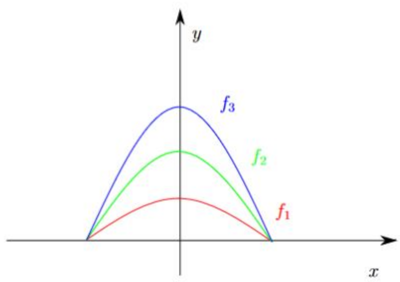
A1 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ wird als quadratische Funktion und der zugehörige Funktionsgraph als Parabel mit Scheitelpunkt $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ bezeichnet. Die Ermittlung des Scheitelpunktes folgt durch eine Umformung mittels quadratischer Ergänzung in die sogenannte "Scheitelpunktform":

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

Eine zweite Möglichkeit, den Scheitelpunkt nachzuweisen, ist die Berechnung der Extremstelle von f. Die zweite Ableitung ist $f''(x) = 2a$. Somit besitzt f für $a > 0$ einen Tiefpunkt an der Nullstelle der ersten Ableitung ($-\frac{b}{2a}$) und analog für $a < 0$ einen Hochpunkt.

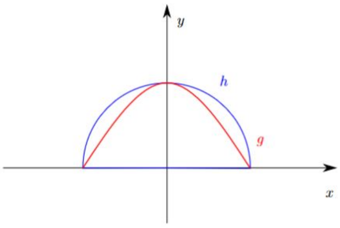
A2 Die x-Achse des Koordinatensystems kann in der Höhe der Position der Hände angelegt werden. Die y-Achse wird genau in der Mitte, also an der Stelle, an welchem der Gegenstand die maximale Höhe erreicht, angelegt. Wir verwenden einen Maßstab, in dem eine Längeneinheit einem Meter entspricht. Da die Versuchspersonen zwei Meter auseinander stehen, ergeben sich die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Der Scheitelpunkt $S(0, y_*)$ ist abhängig von der Wurfhöhe y_*.
Angenommen der Gegenstand erreicht am höchsten Punkt eine Höhe von 50 Zentimetern, dann ist $y_* = 0,5$ und der Scheitelpunkt der Parabel ist $S(0, y_*) = S(0, \frac{1}{2})$. Die Graphen der drei quadratischen Funktionen sind beispielhafte Skizzen für $x \in [-1, 1]$ für die Wurfhöhen

- 50 Zentimeter ($f_1(x)$)
- 100 Zentimeter ($f_2(x)$)
- 150 Zentimeter ($f_3(x)$)

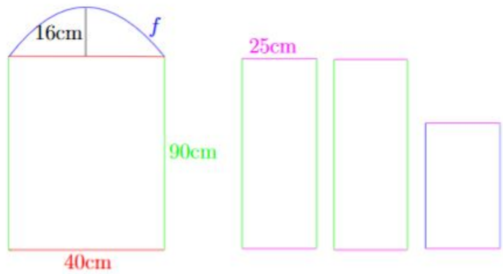


Dabei kann man beobachten, dass die Parabel gestreckter ist, wenn man den Gegenstand höher wirft und die Parabel gestauchter ist, wenn man den Gegenstand flacher wirft.

A3 Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, die zu einem festen Punkt F, welcher Brennpunkt genannt wird, und zu einer Geraden l, der Leitgeraden, den selben Abstand haben.
Ein Kreis mit Radius r ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die zu einem festen Punkt M, welcher Mittelpunkt genannt wird, denselben Abstand haben.
Im folgenden sind die Graphen der Funktionen g und h mit $g(x) = -x^2+1$ und $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ für $x \in [-1, 1]$ gezeichnet.



B1 In Aufgabenteil **B** werden beispielhaft Rechnungen an einem Pfeiler entlang des Poppelsdorfer Weihers in Bonn durchgeführt. Dessen rechteckige Fläche der Vorder- und Rückseite ist 40 Zentimeter breit und 90 Zentimeter hoch. Die Rundung ist am höchsten Punkt nochmal 16 Zentimeter höher. Es gibt zwei Seitenflächen, die 90 Zentimeter hoch und 25 Zentimeter breit sind. Die gewölbte Fläche ist 25 Zentimeter breit und die Bogenlänge beträgt $53,35$ Zentimeter. Damit ergeben sich die folgenden Zeichnungen:



B2 Wir können in die Zeichnung der Vorderseite des Pfeilers ein Koordinatensystem derart anlegen, dass die y-Achse die Fläche in zwei gleichgroße Hälften teilt und die x-Achse die Trennung zwischen Rechteck und gebogener Fläche darstellt. Anschließend stellen wir fest, dass die Entfernung vom Ursprung zu den Seitenlinien jeweils 20 Zentimeter und die Entfernung vom Ursprung zum höchsten Punkt 16 Zentimeter beträgt. Folglich kann hier eine Parabelgleichung mithilfe der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ und der Punkte $S(0, 16)$, $N_1(-20, 0)$ und $N_2(20, 0)$ aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} f(0) = 16 \quad &\Rightarrow \quad c = 16 \\ f(-20) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 400a - 20b + 16 = 0 \\ f(20) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 400a + 20b + 16 = 0 \end{aligned}$$

Die zweite und dritte Gleichung liefern gemeinsam:

$$400a - 20b + 16 = 400a + 20b + 16 \quad \Rightarrow \quad 40b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

Daraus folgt

$$400a + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{16}{400} = -\frac{1}{25}$$

Die gesuchte Parabel ist $f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 16$.

B3 Für die Berechnung der Oberfläche kann die Oberfläche des Pfeilers wie folgt in vier Teilflächen unterteilt werden:

(i) Parabelsegment auf der Vorder- und Rückseite mit der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 16$. Wir berechnen die Fläche zwischen f und der x-Achse. Dafür bilden wir zunächst eine Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{75} \cdot x^3 + 16x$

Nun folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\int_{-20}^{20} f(x)\,dx &= F(20) - F(-20) = -\frac{8000}{75} + 320 - \left(-\frac{-8000}{75} - 320\right) \\ &= -\frac{320}{3} + \frac{960}{3} - \frac{320}{3} + \frac{960}{3} = \frac{1280}{3}\end{aligned}$$

Für Vorder- und Rückseite erhalten wir eine Fläche von $\frac{1280}{3} \cdot 2 = \frac{2560}{3} \approx 853,3$. Das Parabelsegment auf der Vorder- und Rückseite hat also einen ungefähren Flächeninhalt von 853 Quadratzentimetern.

(ii) Rechteck auf der Vorder- und Rückseite mit der gemessenen Breite 40 Zentimeter und Höhe 90 Zentimeter:

$$40 \text{ cm } \cdot 90 \text{ cm } \cdot 2 = 7200 \text{ cm}^2$$

Wir erhalten für die rechteckige Vorder- und Rückseite einen Flächeninhalt von 7200 Quadratzentimetern.

(iii) Rechtecke an den Seiten des Pfeilers mit der gemessenenen Breite 25 Zentimeter und Höhe 90 Zentimeter:

$$25 \text{ cm } \cdot 90 \text{ cm } \cdot 2 = 4500 \text{ cm}^2$$

Wir erhalten für die Seiten des Pfeilers einen Flächeninhalt von 4500 Quadratzentimetern.

(iv) Rechteck an der Oberseite des Pfeilers mit der gemessenen Seitenlänge 25 Zentimeter und Bogenlänge $53,35$ Zentimeter:
(Fortgeschrittene Schülerinnen und Schüler können die gebogene Länge auch mittels der Formel für die Bogenlänge eines Parabelsegmentes nachrechnen.)

$$53,35 \text{ cm } \cdot 25 \text{ cm } = 1333,75 \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt der Oberseite des Pfeilers beträgt ungefähr 1334 Quadratzentimeter.

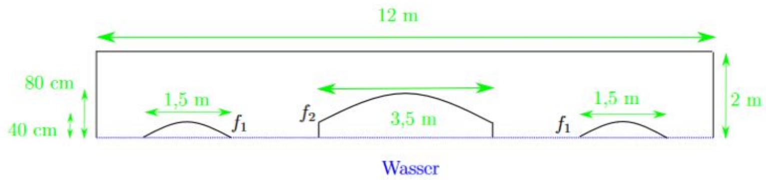
Ein Pfeiler besitzt also den Oberflächeninhalt

$$853,3 \text{ cm} + 7200 \text{ cm}^2 + 4500 \text{ cm}^2 + 1333,75 \text{ cm}^2 = 13887,05 \text{ cm}^2 \approx 1,3887 \text{ m}^2$$

Entlang des in diesem Beispiel betrachteten Weihers stehen 116 solcher Pfeiler. Somit haben alle Pfeiler zusammen einen Flächeninhalt von $116 \cdot 1,3887\text{m}^2 = 161,0892 \text{ m}^2$.

Der Street-Art-Künstler benötigt pro Quadratmeter 200 Milliliter Farbe, also insgesamt $161,0892\text{m}^2 \cdot 200 \frac{\text{ml}}{\text{m}^2} = 32.217,84$ ml. Dafür muss er 40 mal eine 800-Milliliter-Dose und einmal eine 400-Milliliter-Dose Farbe einkaufen.

C1 In Aufgabenteil **C** werden beispielhaft Rechnungen an der Bogenbrücke vor dem Poppelsdorfer Schloss in Bonn durchgeführt.



Die Messungen können je nach Wasserstand des Poppelsdorfer Weihers abweichen. Außerdem werden die abgerundeten Enden der Brücke nicht beachtet.

C2 Wir stellen wieder fest, dass die halbe Breite des Bogen größer ist als die Höhe des Bogens, sodass die Kurve eher durch eine Parabel als durch einen Halbkreis beschrieben werden kann.

Um die Parabelgleichungen aufzustellen, wird wieder die y-Achse als Spiegelachse der Parabel genutzt und die x-Achse als Trennung zwischen Rechteck und gebogener Fläche.
Für f_1 erhalten wir (in Metern) die Punkte $S\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $N_1\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ und $N_2\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ und können die Funktionsgleichung der Form $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ bestimmen:

$$
\begin{aligned}
f_1(0) = \frac{2}{5} \quad &\Rightarrow \quad c = \frac{2}{5} \\
f_1\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 = f_1\left(\frac{3}{4}\right) \quad &\Rightarrow \quad \frac{9}{16}\,a - \frac{3}{4}\,b + \frac{2}{5} = \frac{9}{16}\,a + \frac{3}{4}\,b + \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $\frac{6}{4}b = 0$ und folglich $b = 0$. Daraus folgt dann $\frac{9}{16}\,a + \frac{2}{5} = 0$, was man zu $a = -\dfrac{32}{45}$ vereinfachen kann. Folglich ist die gesuchte Funktionsgleichung

$$f_1(x) = -\frac{32}{45}\,x^2 + \frac{2}{5}$$

Für f_2 erhalten wir (in Metern) die Punkte $S\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $N_1\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ und $N_2\left(\frac{7}{4}, 0\right)$ und können analog die Funktionsgleichung der Form $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ bestimmen:

$$
\begin{aligned}
f_2(0) = \frac{2}{5} \quad &\Rightarrow \quad c = \frac{2}{5} \\
f_2\left(-\frac{7}{4}\right) = 0 = f_2\left(\frac{7}{4}\right) \quad &\Rightarrow \quad b = 0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt nach Einsetzen des Punktes N_2 die Gleichung $\frac{49}{16}\,a + \frac{2}{5} = 0$, was sich zu $a = -\dfrac{32}{245}$ vereinfachen lässt. Folglich ist die gesuchte Funktionslgeichung

$$f_2(x) = -\frac{32}{245}\,x^2 + \frac{2}{5}$$

C3 Die gemessenen Größen der rechteckigen Fassade sind in der Abbildung in Teilaufgabe **C1** dargestellt.

C4 Um den Flächeninhalt der Fassade $(A_{\text{Brücke}})$ zu berechnen, ist es (zumindest an dieser Beispielbrücke) sinnvoll von dem kompletten Rechteck die Öffnungen abzuziehen.
Dann ist

$$\begin{aligned} A_{\text{Brücke}} &= 2\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} - \left(2 \cdot \int_{-0{,}75}^{0{,}75} f_1(x)\,dx + \left(\frac{2}{5}\,\text{m} \cdot \frac{7}{2}\,\text{m} + \int_{-1{,}75}^{1{,}75} f_2(x)\,dx\right)\right) \\ &= 24\,\text{m}^2 - \left(2 \cdot \frac{2}{5}\,\text{m}^2 + \frac{7}{5}\,\text{m}^2 + \frac{14}{15}\,\text{m}^2\right) \\ &= \frac{313}{15}\,\text{m}^2 \approx 20{,}87\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Das Angebot des Malerunternehmens wird sich auf $21\text{m}^2 \cdot 25\,\frac{€}{\text{m}^2} = 525\,€$ belaufen.

Didaktischer Kommentar

In zahlreichen Tragwerken von Brücken oder Gewölben treten bei einer Belastung zuvorderst vertikale Kräfte auf, welche an allen Stellen des Gewölbebogens ungefähr gleich groß sind. Solche Tragwerke werden oft parabelförmig gebaut, da so die vertikalen Kräfte auf die Fundamente übertragen werden können und das Auftreten von Querkräften, welche das Bauwerk verbiegen könnten, vermieden wird. Auch im Alltag begegnen uns solche "nach unten geöffneten" Parabeln immer wieder: unter anderem an Bushaltestellen, Mülleimern oder Begrenzungspfeilern.

Aus diesem Grund bieten in der Architektur vorkommende Parabeln eine hervorragende Gelegenheit für einen mathematischen Spaziergang. Die Aufgaben rund um die Parabel können sowohl zeitlich flexibel als auch ortsunabhängig gestaltet werden. Da sich in den Aufgabenteilen auf Objekte und Bauwerke der Architektur bezogen wird, ist es im Sinne der Aufgaben förderlich, wenn die Lehrkraft vor Absolvieren dieses mathematischen Spazierganges die Gegebenheiten vor Ort auskundschaftet und einen geeigneten Lernort auswählt. Es ist jedoch auch möglich, die Schülerinnen und Schüler mit dem Arbeitsauftrag selbst ein geeignetes Objekt oder ein Bauwerk in einer verkehrsfreien oder -beruhigten Zone suchen zu lassen. Beispiele für solche geeigneten Objekte und Bauwerke finden sich in den einzelnen Aufgaben.
Grundsätzlich ist es möglich, die Aufgabenteile nicht in der vorgegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. So kann Aufgabenteil **C** auch vor Aufgabenteil **B** bearbeitet werden.
Aufgabenteil **A** sollte aber vor der Bearbeitung von den Aufgabenteilen **B** und **C** bearbeitet worden sein, da hier für die folgenden Aufgabenteile relevante Grundkenntnisse wiederholt werden.

In Teilaufgabe **A1** sollen die Schülerinnen und Schüler ihr gelerntes Wissen über Parabeln aus dem Mathematikunterricht aktivieren. Anschließend soll in **A2** die Modellierung einer Parabel anhand der bekannten Nullstellen und des Scheitelpunktes geübt werden. Die Modellierung einer Parabel mit diesen drei charakteristischen Punkten wird in allen drei weiteren Aufgabenteilen eine wichtige Rolle spielen. Nachfolgend sollen die Schülerinnen und Schüler in Teilaufgabe **A3** in Partnerarbeit die Unterschiede einer Halbkreis- und einer Parabelmodellierung diskutieren.

In Aufgabenteil **B** müssen die Schülerinnen und Schüler einen alltäglichen Gegenstand in ein ma-

thematisches Modell übertragen. Hierzu sind jeweils unterschiedliche Sachkontexte gegeben, in denen unter dem Oberthema „Parabelmodellierung“ gemessen, überlegt und gerechnet werden muss. Die Schülerinnen und Schüler sollen eine Flächenberechnung mit dem Integral oder mit der Flächeninhaltsformel des Halbkreises durchführen. In Aufgabenteil **C** sollen Parabeln mit negativem Streckfaktor a an Gebäuden und Bauwerken gesucht werden. Im Gegensatz zu Aufgabenteil **B** sollen die Schülerinnen und Schüler in Aufgabenteil **C** die Fläche unter einem Funktionsgraphen von der eigentlichen Grundfläche abziehen.
Für die Bearbeitung der Aufgaben benötigen die Schülerinnen und Schüler Schreibmaterial, einen Taschenrechner und einen Zollstock.

Es bietet sich an, diesen Spaziergang in einem Grundkurs oder Leistungskurs der Sekundarstufe 2 nach der Einführung des Integralbegriffes durchzuführen. Aufgrund der geringen Komplexität und der Reduzierung der Integralrechnung auf die Flächenberechnung in Aufgabenteil **B** und **C**, kann dieser in Verbindung mit Aufgabenteil **A** auch bereits in einem leistungsstarken Kurs der Sekundarstufe 1 nach der Einführung der Parabel durchgeführt werden, um ein Gefühl für den zukünftigen Unterrichtsinhalt zu bekommen.