Eben(e) noch Sonne! Gerade wieder Schatten!

Geometrie an der Markise

Lösungsvorschlag

Diese Lösung wurde an einer Markise in der Friedrich-Breuer-Straße in Bonn-Beuel erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Die Koordinaten der Punkte lauten:
$A\,(1{,}78\,|\,0\,|\,2{,}42)\,,\ B\,(1{,}78\,|\,4{,}8\,|\,2{,}42)\,,\ C\,(0\,|\,4{,}8\,|\,2{,}95)$ und $D\,(0\,|\,0\,|\,2{,}95)\,.$

A2 Eine Ebenengleichung ist gegeben durch $E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AD}$.
Damit ergibt sich in Parameterform $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ 0 \\ 2{,}42 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1{,}78 \\ 0 \\ 0{,}53 \end{pmatrix}.$

Ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ von E muss zu den Richtungsvektoren orthogonal sein, also gilt $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$. Hieraus folgt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 0n_1 & + & 4{,}8n_2 & + & 0n_3 & = & 0 \\ -1{,}78n_1 & + & 0n_2 & + & 0{,}53n_3 & = & 0 \end{array}$$

Damit ist $n_2 = 0$ und $-1{,}78n_1 + 0{,}53n_3 = 0$. Wählt man beispielsweise $n_1 = 1$, so erhält man $n_3 = \frac{1{,}78}{0{,}53} \approx 3{,}36. \Rightarrow E\colon x + 0y + 3{,}36z = d$
Einsetzen von A in E liefert $d = 1\cdot 1{,}78 + 0\cdot 0 + 3{,}36\cdot 2{,}42 \approx 9{,}91$.
$E\colon x + 3{,}36z = 9{,}91$ ist also die Ebenengleichung der Markise in Koordinatenform.

B1 Die Gerade $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ 0 \\ 2{,}42 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreibt die Vorderkante der Markise.

B2 Sei W der Punkt auf $\overrightarrow{AB}$, an dem der Leuchtstrahler befestigt wird. W liegt auf der Geraden g mit $r = \frac{1}{4}$ oder $r = \frac{3}{4}$. Dann ist

$$\overrightarrow{OW_1} = \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ 0 \\ 2{,}42 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ 1{,}2 \\ 2{,}42 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{OW_2} = \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ 0 \\ 2{,}42 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ 3{,}6 \\ 2{,}42 \end{pmatrix}.$$

Die möglichen Positionen des Leuchtstrahlers sind $W_1\,(1{,}78\,|\,1{,}2\,|\,2{,}42)$ und $W_2\,(1{,}78\,|\,3{,}6\,|\,2{,}42)$.

B3 Das Ergebnis dieser Teilaufgabe hängt von der eigenen Körpergröße ab. Exemplarisch wird im Folgenden eine Größe von 1,70 Meter verwendet.
Die Koordinaten der Oberkante des Kopfes einer 1,70 Meter großen Person parallel zur Kante $\overrightarrow{CB}$ sind gegeben durch $K\,(k_1\,|\,4{,}8\,|\,1{,}7)$. k_1 kennzeichnet dabei den Abstand zur Hauswand.

Damit der Schutz den Kopf nicht berührt, muss die Strecke $\overrightarrow{BK}$ länger als die Länge des Schutzes, also länger als 90 Zentimeter sein. Wir berechnen die Länge des Vektors $\overrightarrow{BK}$.

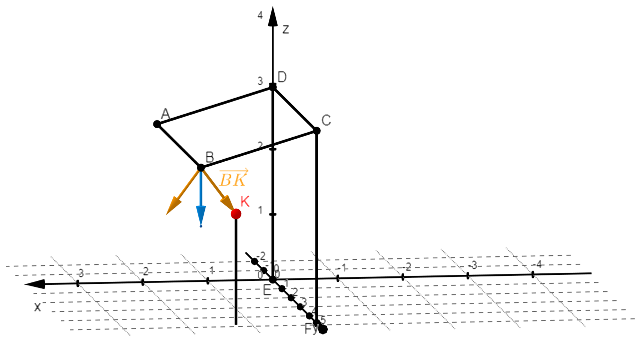
$$|\overrightarrow{BK}| = \sqrt{(k_1 - 1{,}78)^2 + (4{,}8 - 4{,}8)^2 + (1{,}7 - 2{,}42)^2} \approx \sqrt{(k_1 - 1{,}78)^2 + 0{,}52}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{(k_1 - 1{,}78)^2 + 0{,}52} &> 0{,}9 && |[]^2 \\ (k_1 - 1{,}78)^2 + 0{,}52 &> 0{,}81 && | - 0{,}52 \\ (k_1 - 1{,}78)^2 &> 0{,}29 && |\sqrt{[]} \\ |k_1 - 1{,}78| &> 0{,}54 \end{aligned}$$

$\Rightarrow k_1 < 1{,}24$ oder $k_1 > 2{,}32$

Damit kann eine 1,70 Meter große Person weniger als 1,24 Meter oder mehr als 2,32 Meter von der Hauswand entfernt stehen, ohne mit dem Kopf den Schutz zu berühren.



C1 Der Schnittwinkel α von der Markise E mit Normalenvektor $\vec{n}$ und E_{Wand} mit Normalenvektor $\vec{m}$ ist gegeben durch $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}$. Die Wand wird durch die y-z-Ebene mit $E_{\text{Wand}}: x = 0$ beschrieben. Damit ist der Normalenvektor der Wand gegeben durch $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Einsetzen liefert $\alpha = \arccos\left(\frac{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3{,}36\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+3{,}36^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}}\right) \approx \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{12{,}29}}\right) \approx 73{,}43°$.

Der Neigungswinkel beträgt $90° - 73{,}43° = 16{,}57°$, die Vorgaben werden also eingehalten.

C2 Der Abstand der gegenüberliegenden Straßenseite zur y-Achse beträgt hier etwa 11 Meter. Wir wissen, dass die Schnittgerade zwischen der fortgesetzten Markise und dem Boden parallel zur y-Achse verläuft, da die Markisen-Außenkanten parallel zueinander verlaufen und gleich lang sind. Es muss also die Markisen-Ebene mit dem Boden geschnitten werden und wenn die x-Koordinate des Stützvektors der Schnittgerade kleiner ist als 11, trifft die Markise nicht auf der anderen Straßenseite auf.

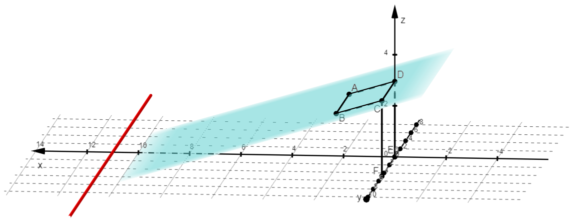
Der Boden wird durch die x-y-Ebene beschrieben mit $E_{\text{Boden}}: z = 0$. Aus Teilaufgabe **A3** ist eine Koordinatengleichung der Markise bekannt. Die Ebenengleichungen bilden das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 3{,}36z &= 9{,}91 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Alle Punkte der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,91 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen das Gleichungssystem.

Die Schnittgerade hat also die Gleichung $p\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 9{,}91 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Schnittgerade von Boden und Markise hat von der y-Achse einen Abstand von 9,91 Metern (x-Koordinate des Stützvektors). Daher würde die Markise bereits auf der Straße und nicht auf der anderen Straßenseite aufkommen.
Alternativ kann der Schnittpunkt zwischen der Gerade einer Außenkante der Markise und dem Boden berechnet werden.



C3 Unter der Annahme, dass der Boden eine horizontale Ebene bildet, handelt es sich bei dem Winkel zwischen Boden und verlängerter Markise um einen Wechselwinkel zum Winkel α aus Teilaufgabe **C1**. Somit gilt auch hier $\beta \approx 16,57$ Grad. Alternativ kann der Schnittwinkel ähnlich wie in **C1** berechnet werden. Dazu werden die Markisen-Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ und E_{Boden} mit Normalenvektor $\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ benötigt und es gilt $\cos(\beta) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{l}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{l}|}$. Damit ist $\beta = \arccos\left(\frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3{,}36 \cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+3{,}36^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+1^2}}\right) \approx \arccos\left(\frac{3{,}36}{\sqrt{12{,}29}}\right) \approx 16{,}58°$.

D1 Hier werden zunächst die Koordinaten des Punktes E sowie die Geradengleichung der Markisen-Außenkante benötigt. E hat die Koordinaten $E\,(0\,|\,4{,}8\,|\,0)$ und die Geradengleichung der Außenkante $\overrightarrow{CB}$ ist gegeben durch:

$$s\colon \vec{x} = \overrightarrow{OC} + u \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}8 \\ 2{,}95 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ 0 \\ -0{,}53 \end{pmatrix}$$

Der Geradengleichung s entsprechen die Punkte $S\,(1{,}78u\,|\,4{,}8\,|\,2{,}95 - 0{,}53u)$. Der Richtungsvektor des Stützbalkens ist damit $\overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} 1{,}78u \\ 0 \\ 2{,}95 - 0{,}53u \end{pmatrix}$. Dieser soll zu $\overrightarrow{CB}$ orthogonal sein also gilt $\overrightarrow{ES} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. Hieraus folgt: $1{,}78u \cdot 1{,}78 + 0 \cdot 0 + (2{,}95 - 0{,}53u) \cdot (-0{,}53) = 0$ und damit $u \approx 0{,}45$. Daraus folgt $\overrightarrow{ES} \approx \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0 \\ 2{,}71 \end{pmatrix}$.

D2 Die Länge des Stützbalkens entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{ES}$, also
$|\overrightarrow{ES}| = \sqrt{0{,}8^2 + 0^2 + 2{,}71^2} \approx 2{,}83$ Meter.

D3 Es kann passieren, dass ein solcher Stützbalken nicht umsetzbar ist, zum Beispiel, wenn die Markise zu schief ist oder diese nicht weit genug ausgefahren ist.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 und lässt sich zum Abschluss des Themas *Abstände und Winkel* durchführen. Da die Schülerinnen und Schüler Ebenen auch in Koordinatenform darstellen und Schnittwinkel zwischen Ebenen berechnen müssen, ist die Aufgabe mit einem Leistungskurs durchzuführen.
Damit der Spaziergang erfolgreich unternommen werden kann, müssen Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum vorher ausführlich besprochen worden sein. Ebenfalls ist zu empfehlen, dass sich die Schülerinnen und Schüler bereits mit Geraden und Ebenen im Sachkontext auseinandergesetzt haben, sodass zur Lösung der Fragestellungen die richtigen Hilfsmittel ausgewählt werden können.
Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Markise mathematisch zu modellieren und gleichzeitig verschiedene Themen aus der Analytischen Geometrie zu vertiefen.
In Aufgabenteil **A** erlangen die Schülerinnen und Schüler einen Überblick über den Lernort, indem sie eine Markise vermessen und mathematisch modellieren. Anschließend setzen sie sich im Sachkontext mit Geraden und Abständen auseinander. Die Teilaufgaben **B1** und **B2** fordern dabei Grundlagen. In Teilaufgabe **B3** ist das räumliche und logische Verständnis gefragt. Daran schließen Fragestellungen zu Schnittwinkeln im Sachkontext an. Hierbei sind verschiedene Lösungswege möglich. Teilaufgabe **C3** kann auch ohne eine Rechnung mit Mathematik der Unterstufe gelöst werden. Hier wird deutlich, dass ein reflektierendes Vorgehen Arbeitsaufwand ersparen kann. Dies wird insbesondere auch in Teilaufgabe **D1** benötigt. Zuletzt setzen sich die Schülerinnen und Schüler mit der Modellierung selbst auseinander, indem sie die Annahmen und Ergebnisse kritisch hinterfragen.