LGS: Lauch, Gurke, Salat

Lineare Gleichungssysteme im Alltag

Lösungsvorschlag

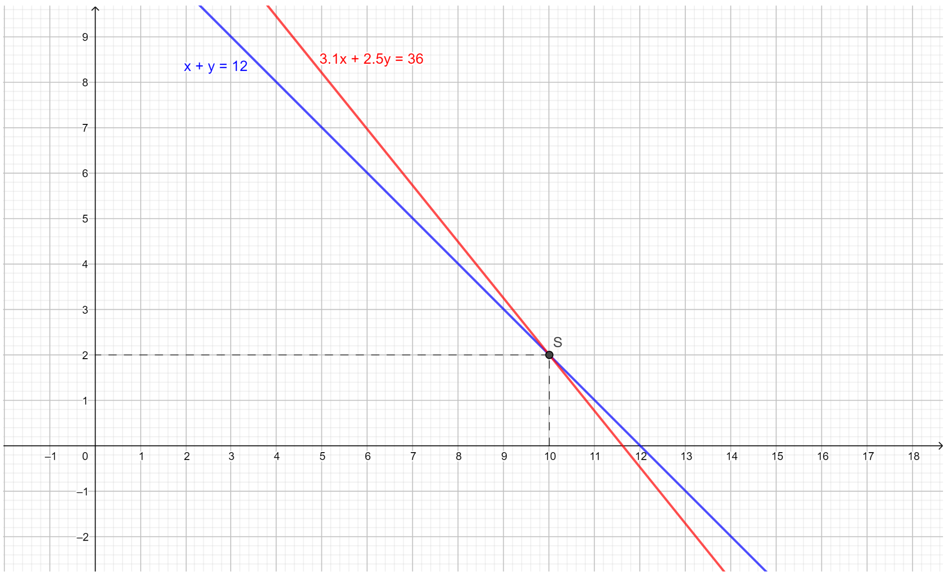
Hinweis: Diese Lösung wurde auf dem Bonner Wochenmarkt erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Sei x die Menge an Erdbeeren in Kilogramm und y die Menge an Bananen in Kilogramm. Es ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen aufzustellen. Angenommen die Klasse umfasst 30 Schülerinnen und Schüler, sodass 36 Euro zur Verfügung stehen. Weiterhin muss der Einkauf 12 Kilogramm umfassen. Wir verwenden hier in der Lösung beispielhafte Preise von $3,10$ Euro pro Kilogramm Erdbeeren und $2,50$ Euro pro Kilogramm Bananen. Das zu lösende lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} x + y &= 12 \\ 3,1x + 2,5y &= 36 \end{aligned}$$

Setzt man $x = 12 - y$ in die zweite Gleichung ein, so erhält man $3,1(12 - y) + 2,5y = 36$ und daraus folgt $y = 2$ sowie $x = 10$. Das lineare Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung. Man muss 10 Kilogramm Erdbeeren und 2 Kilogramm Bananen einkaufen.

A2



A3 Sei z die Menge an Äpfeln in Kilogramm. Wir verwenden beispielhaft einen Preis von $3,00$ € pro Kilogramm Äpfel. Wir erhalten nun ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 3,1x + 2,5y + 3z &= 36 \end{aligned}$$

Subtrahieren wir das Dreifache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 12 \\ 0,1x-0,5y &= 0 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir $y = t$ frei wählen können und erhalten $x = 5t$ und $z = 12 - y - x = 12 - t - 5t = 12 - 6t$. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems hat die Form

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Da jede Komponente des Lösungsvektors nichtnegativ sein muss (Negative Obstmengen kann man nicht kaufen!), muss offensichtlich $12 - 6t \geq 0$ sein, also $t \leq 2$. Zudem muss $t \geq 0$ sein, damit auch die anderen Obstmengen nichtnegativ sind. Es gibt nun viele Lösungen, denn t kann beliebig aus dem Intervall $[0,2]$ gewählt werden. Die Lösungen für ganzzahlige Werte von t seien an dieser Stelle exemplarisch aufgeführt:

t	x	y	z
0	0	0	12
1	5	1	6
2	10	2	0

A4 Wir arbeiten auch hier mit beispielhaften Lösungen. Wir stellen uns vor, die drei Kinder einigen sich auf folgende Einkäufe:

	Menge Tomaten in kg	Menge Weintrauben in kg	Menge Zucchini in kg
Einkauf von Emma	1	1	2
Einkauf von Ben	1	2	1
Einkauf von Isabell	2	3	3

Außerdem stellen wir uns vor, dass die Preise wie folgt sind:

	Preis Tomaten pro kg	Preis Weintrauben pro kg	Preis Zucchini pro kg
erster Stand (Emma)	2,00	4,80	3,20
zweiter Stand (Ben)	2,50	5,00	1,80
dritter Stand (Isabell)	2,70	4,20	2,50

Es entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 13,20 = 1 \cdot 2,00 + 1 \cdot 4,80 + 2 \cdot 3,20 \\ x+2y+z &= 14,30 = 1 \cdot 2,50 + 2 \cdot 5,00 + 1 \cdot 1,80 \\ 2x+3y+3z &= 25,50 = 2 \cdot 2,70 + 3 \cdot 4,20 + 3 \cdot 2,50 \end{aligned}$$

Man stellt reativ einfach fest, dass dieses lineare Gleichungssstem keine Lösung hat, da Isabell nicht die Summe der Preise von Emma und Ben bezahlt hat. Das liegt an der Tatsache, dass die

Preise x, y und z an den drei Ständen verschieden sind.

A5 Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eigene Fragestellungen und diskutieren die Lösungsmengen.

Didaktischer Kommentar

Mathematisch beschäftigt sich die Aufgabe mit dem Lösen linearer Gleichungssysteme und den dabei auftretenden Fällen. Daher sollte vorher im Unterricht behandelt werden, wie man lineare Gleichungssysteme mit bis zu drei Gleichungen und bis zu drei Variablen lösen kann. Folgende Themen sollten insbesondere im Unterricht angesprochen worden sein:

- Wie kann man aus einem Anwendungskontext heraus die Gleichungen für das lineare Gleichungssystem aufstellen?
- Wie kann ich die Lösungsmenge aufschreiben, wenn ich eine frei wählbare Variable habe?
- Das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Variablen kann man als Schnittpunktbestimmung zweier Geraden im zweidimensionalen Koordinatensystem auffassen.
- Welche Fälle können bei der Lösungsmenge auftreten (genau eine Lösung, unendliche viele Lösungen, keine Lösung)?

Insbesondere ist es hilfreich, wenn nicht nur die Spezialfälle zwei Gleichungen, zwei Variablen und drei Gleichungen, drei Variablen im Unterricht behandelt wurden, sondern auch Beispiele, bei denen die Anzahl der Variablen und Gleichungen verschieden ist.

In Teilaufgabe **A1** soll das aufgestellte lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung haben. In dem vorgegebenen Kontext, dass jeder Schüler und jede Schülerin 1,20 Euro zur Verfügung hat und 400 Gramm bekommen soll, ist es daher notwendig, dass die Erdbeeren mehr als 3 Euro und die Bananen weniger als 3 Euro pro Kilogramm kosten. Sollte dies in der Realität nicht der Fall sein, müssen die 1,20 Euro pro Schüler oder die 400 Gramm pro Schüler geeignet angepasst werden.