

Läuft bei euch!

Stochastik auf der Laufbahn

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung beruht auf fiktiven Werten. Je nach Lerngruppe weichen die Ergebnisse ab.

A1 Im Kurs sind 25 Schülerinnen und Schüler und es stehen fünf Laufbahnen zur Verfügung. Es sollen also aus 25 Personen fünf ausgewählt werden. Damit liegt der Fall „Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge“ vor. Somit gibt es $\binom{25}{5} = 53.130$ Möglichkeiten.

A2 Es sollen nun fünf Personen auf fünf Laufbahnen verteilt werden. Daher liegt der Fall „Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge“ vor. Somit gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten.

B1 Es wurden fünf Fünfergruppen gebildet. Da jeweils ein Gruppenmitglied die Zeit stoppt, treten jeweils vier Schülerinnen und Schüler im 100-Meter-Sprint gegeneinander an. Folgende Zeiten wurden innerhalb einer Gruppe gemessen:

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. Person: 16,09 s | 2. Person: 17,10 s |
| 3. Person: 17,40 s | 4. Person: 18,60 s |

B2 Der Mittelwert beträgt $\frac{16,09+17,10+17,40+18,60}{4} = \frac{69,19}{4} \approx 17,30$.

Die Schülerinnen und Schüler der Gruppe haben im Durchschnitt also 17,3 Sekunden für die 100-Meter-Strecke benötigt.

Für die empirische Standardabweichung gilt es zunächst die empirische Varianz zu berechnen. Die empirische Varianz beträgt:

$$s^2 = \frac{1}{4-1} \cdot ((16,09 - 17,3)^2 + (17,10 - 17,3)^2 + (17,4 - 17,3)^2 + (18,6 - 17,3)^2) \approx 1,068$$

Die empirische Standardabweichung ist die Wurzel aus der empirischen Varianz. Damit folgt:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,068} \approx 1,033$$

Die Standardabweichung beschreibt die durchschnittliche Abweichung vom Mittelwert. Je höher der Wert der empirischen Standardabweichung ist, desto mehr weichen die einzelnen Werte vom bestimmten Mittelwert ab.

B3 Folgende Zeiten wurden im 400-Meter-Sprint gemessen:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1. Person: 1:22 min = 82 s | 2. Person: 1:31 min = 91 s |
| 3. Person: 1:34 min = 94 s | 4. Person: 1:40 min = 100 s |

Damit ergibt sich folgender Mittelwert:

$$\frac{82 + 91 + 94 + 100}{4} = \frac{367}{4} = 91,75 \text{ s} \approx 1 : 32 \text{ min}$$

Die empirische Varianz beträgt:

$$s^2 = \frac{1}{4-1} \cdot ((82 - 91,75)^2 + (91 - 91,75)^2 + (94 - 91,75)^2 + (100 - 91,75)^2) \approx 56,25$$

Damit ergibt sich für die empirische Standardabweichung:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{56,25} \approx 7,5$$

Die gemessenen Werte weichen also im Mittel um 7,5 Sekunden vom Mittelwert ab.

B4 Multipliziert man den Mittelwert des 100-Meter-Sprints aus Teilaufgabe **B2** mit vier, ergibt sich:

$$17,3 \text{ s} \cdot 4 = 69,2 \text{ s}$$

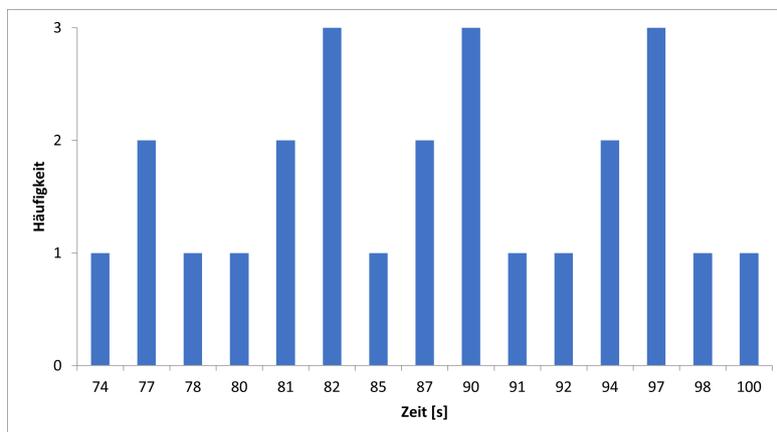
Vergleicht man diesen Wert mit dem Mittelwert des 400-Meter-Sprints aus Teilaufgabe **B3** fällt auf, dass der Wert des 400-Meter-Sprints deutlich größer ist. Dies liegt daran, dass man die Geschwindigkeit aus dem 100-Meter-Sprint nicht über einen langen Zeitraum aufrecht erhalten kann. Nach einer Weile schwindet die Energie und man wird langsamer.

B5 Für alle 25 Schülerinnen und Schüler des Kurses ergibt sich folgende Strichliste:

- 74 sek: I
- 77 sek: II
- 78 sek: I
- 80 sek: I
- 81 sek: II
- 82 sek: III
- 85 sek: I
- 87 sek: II
- 90 sek: III
- 91 sek: I
- 92 sek: I
- 94 sek: II
- 97 sek: III
- 98 sek: I
- 100 sek: I

Der Mittelwert beträgt 87,32 Sekunden. Die empirische Varianz beträgt ungefähr 58,48. Damit beträgt die empirische Standardabweichung ungefähr 7,65 Sekunden.

Die Werte liefern folgendes Histogramm:



C1 Von den 25 Schülerinnen und Schülern wird eine Person ausgewählt, sodass 24 Person auf Vierer-Teams aufgeteilt werden können. Beim Aufteilen der Vierer-Teams liegt der Fall „Ziehen

ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge“ vor. Somit gibt es $\binom{24}{4} = 10.626$ Möglichkeiten, ein Vierer-Team zu bilden.

Berechnet man auch noch die Anzahl der Möglichkeiten, die gesamten 24 Schülerinnen und Schüler in Vierer-Teams aufzuteilen, dann erhält man

$$\frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}}{6!} = \frac{10626 \cdot 4845 \cdot 1820 \cdot 495 \cdot 70 \cdot 1}{720} \approx 4,5 \cdot 10^{12}$$

Im Zähler sieht man, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein erstes bis sechstes Vierer-Team zu bilden. Da wir den Vierer-Teams aber keine Nummern geben wollen und sie unsortiert betrachten wollen, teilen wir durch die Anzahl, diese 6 Vierer-Teams anzuordnen. Es sind dennoch ganz schön viele Möglichkeiten!

C2 Es wurden folgende Zeiten gemessen:

- Team 1: 74 s
- Team 2: 76 s
- Team 3: 77 s
- Team 4: 80 s

C3 Der Mittelwert beträgt:

$$\frac{74 + 76 + 77 + 80}{4} \text{ s} = 76,75 \text{ s}$$

Die empirische Varianz beträgt:

$$s^2 = \frac{1}{4-1} \cdot ((74 - 76,75)^2 + (76 - 76,75)^2 + (77 - 76,75)^2 + (80 - 76,75)^2) = 6,25$$

Damit ergibt sich für die empirische Standardabweichung:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6,25} \approx 2,5$$

Die gemessenen Werte weichen also im Mittel um 2,5 Sekunden vom Mittelwert ab. Die Standardabweichung bei der 4x100-Meter-Staffel ist somit geringer als beim 400-Meter-Sprint (vgl. Teilaufgabe **B5**). Dies kann unter anderem daran liegen, dass die Teams gleich stark ausgewählt wurden und dass jeder nur 100 m läuft, wobei weniger Schwankungen in den Leistungsunterschieden vorliegen.

Didaktischer Kommentar

Dieser mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II und lässt sich in das Thema *Kombinatorik* einordnen. Im sportlichen Kontext wenden die Schülerinnen und Schüler die beiden kombinatorischen Fälle „Ziehen ohne Zurücklegen mit bzw. ohne Beachtung der Reihenfolge“ an. Um eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben gewährleisten zu können, ist es wichtig, dass den Schülerinnen und Schülern die Formeln für diese kombinatorischen Fälle aus dem Unterricht bekannt sind. Weiter sollten die Schülerinnen und Schüler wissen, wie man den Mittelwert und die empirische Standardabweichung berechnet und was beide Werte im Sachzusammenhang bedeuten. Im Laufe der Aufgabe legen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Distanzen zurück und vergleichen die gemessenen Zeiten miteinander.

Als Lernort eignet sich ein Sportplatz mit mehreren Laufbahnen. An Material werden ein Taschenrechner, eine Stoppuhr, Schreibmaterial sowie Sportbekleidung benötigt.