Kennst du die Kettenregel?

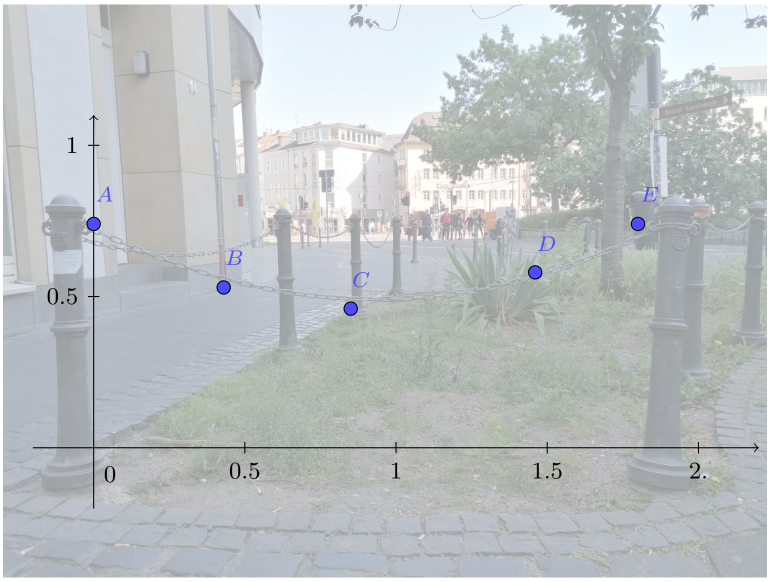
Kettenlinien im Alltag

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an Kettenlinien vor dem Bonner Stadthaus erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Bei näherer Betrachtung lässt sich die Form annähernd als *Parabel* beschreiben.

A2 Es wurden beispielhaft die folgenden fünf Punkte in Metern vermessen: $A(0|0,80)$, $B(0,5|0,65)$, $C(0,90|0,60)$, $D(1,30|0,64)$ und $E(1,80|0,80)$. Damit gilt also $n = 0,80$. In einem Koordinatensystem eingetragen ergibt sich das folgende Bild:

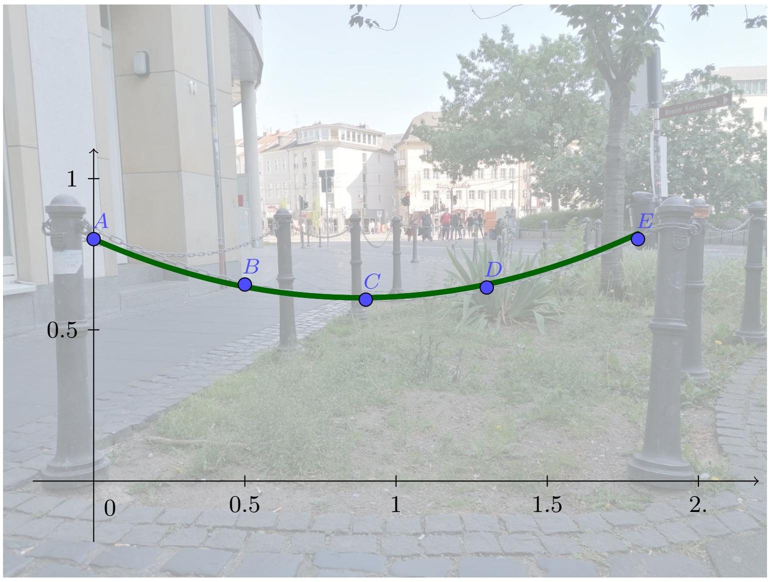


A3 Wir wählen den Ansatz $f(x) = ax^2+bx+c$. Wir setzen die Punkte $A(0|0,80)$, $C(0,90|0,60)$ und $E(1,80|0,80)$ ein und erhalten (mit Rundung):

$$\begin{array}{rclcrcr}
0,80 & = & & & & & c \\
0,60 & = & 0,81a & +0,90b & + & & c \\
0,80 & = & 3,24a & +1,80b & + & & c
\end{array}$$

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems erhalten wir $a \approx 0,25$, $b \approx -0,44$ und $c = 0,80$. Damit ergibt sich nach Rundung $f(x) = 0,25x^2 - 0,44x + 0,8$, wobei wir uns nur für das Intervall $[0; 1,80]$ interessieren. Die gerundeten Abweichungen können der folgenden Tabelle entnommen werden:

x-**Achse**	0 m	0,5 m	0,90 m	1,30 m	1,80 m
y-**Achse gemessen**	0,80 m	0,65 m	0,60 m	0,64 m	0,80 m
y-**Achse berechnet**	0,8 m	0,64 m	0,60 m	0,65 m	0,82 m
Fehler absolut	0 m	0,01 m	0 m	0,01 m	0,02 m
Fehler relativ	0 %	1,5 %	0 %	1,6 %	2,5 %



Modellierung durch eine quadratische Funktion

Tatsächlich interpoliert die gegebene Polynomfunktion die Messpunkte nur beim ersten und dritten Punkt korrekt. Bei den anderen Punkten ist die Abweichung aber kleiner als zwei Zentimeter und fällt aufgrund der Rundung hier nicht ins Gewicht. Damit ist die Parabel ein probates Mittel zur Beschreibung der Kettenlinie.

B1 Die Länge der Kette wurde mit Hilfe eines Bindfadens gemessen, indem dieser an die Kettenaufhängungen an zwei Pollern gehängt und soweit gelockert wurde, bis der Bindfaden die gleiche Form wie die Kette einnahm. Es ergibt sich eine Länge von etwa $1,85$ m. Die Länge $L(k)$ des Parabelbogens im Intervall $[0;k]$ von der Funktion $f(x) = ax^2 + c$ ist gegeben durch

$$L(k) = \frac{1}{4a} \ln\left(2ak + \sqrt{(2ak)^2 + 1}\right) + \frac{1}{2}k\sqrt{(2ak)^2 + 1}$$

Da die Länge der Parabelkurve unter der Verschiebung entlang der y-Achse invariant ist, kann aus unserer bestimmten Funktion $f(x) = 0,25x^2 - 0,44x + 0,8 \approx 0,25(x - 0,88)^2 + 0,61$ der Koeffizient $a = 0,25$ entnommen und $k = 0,88 \approx 0,9$ gesetzt werden. Damit erhält man die Länge der halben Kette. Wir müssen also die Länge des berechneten Parabelbogens verdoppeln. Durch Einsetzen ergibt sich $L(0,9) \approx 0,93$. Verdoppeln liefert eine Kettenlänge von $1,86$ Metern. Dies entspricht etwa der gemessenen Länge.

B2 Der absolute Überschuss der Kettenlänge ist die Differenz von Kettenlänge und Abstand der Poller. Der relative Überschuss ist der Quotient aus dem absoluten Überschuss und dem Abstand der Poller. Der Abstand der Poller beträgt $1,75$ m. Dies ergibt einen absoluten Überschuss von $0,11$ m und einen relativen Überschuss von $6,2$%. Je mehr eine Kette durchhängt, desto höher ist ihr Überschuss. Der berechnete Überschuss ist vergleichsweise niedrig. Es geht entsprechend keine besonders hohe Gefahr von den Ketten aus, da die Ketten nicht zu weit durchhängen.

C1 Es gilt als notwendige Bedingung für $g \neq 0$

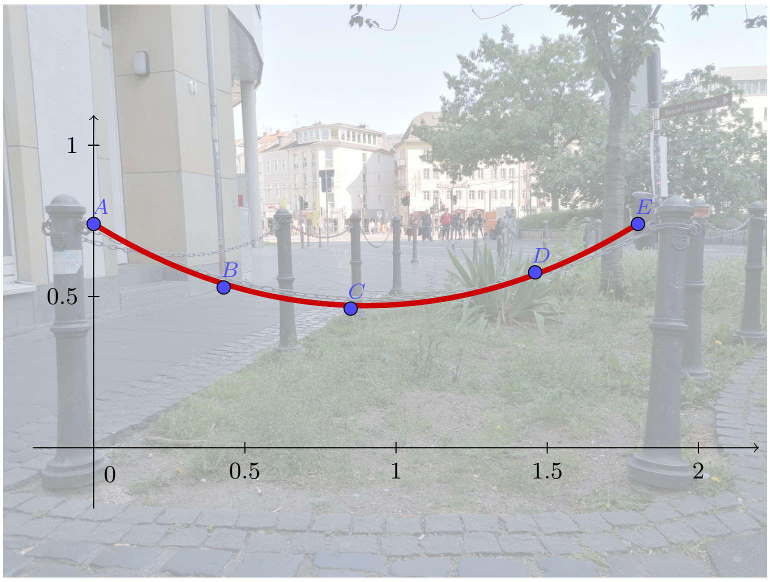
$$l'(x) = \frac{g}{2}\left(\frac{e^{\left(\frac{h+x}{g}\right)}}{g} - \frac{e^{\left(-\frac{h+x}{g}\right)}}{g}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h+x}{g} = -\frac{h+x}{g} \quad \Leftrightarrow \quad x = -h$$

Für die hinreichende Bedingung muss $l'(x) = 0$ und $l''(x) \neq 0$ gelten. Wegen

$$l''(x) = \frac{g}{2}\left(\frac{e^{\left(\frac{h+x}{g}\right)}}{g^2} + \frac{e^{\left(-\frac{h+x}{g}\right)}}{g^2}\right)$$

und $g > 0$ gilt $l''(-h) = \frac{1}{g} > 0$, so dass es sich bei $x = -h$ um eine lokale Minimalstelle von l handelt.

C2 Es ergibt sich $h = -0,9$ und durch graphische Anpassung der Kurve an die Kettenlinie $g = 2,03$ und $j = -1,43$ bestimmt. Somit ergibt sich die Näherungsformel für den Cosinus hyperbolicus zu $l(x) = 2,03 \cosh\left(\frac{x-0,9}{2,03}\right) - 1,43$.
Eine Zeichnung zeigt, dass der Cosinus hyperbolicus, ähnlich wie die Parabel, die Kettenlinie hervorragend beschreibt.



Modellierung durch die cosh-Funktion

Es fällt auf, dass der cosh die Messpunkte und damit auch die Kettenlinie nahezu exakt beschreibt. Die Parabel zeigt sich in den Fehlerwerten ebenfalls sehr gut. Insofern stellt sie ein probates Mittel zur Annäherung des cosh dar. Damit ist auch klar, warum die Kettenlinie umgekehrt lange Zeit für eine Parabel gehalten wurde und hängende Ketten als Zeichenvorlage für Parabeln galten. Man weiß dass sich bereits Galileo Galilei 1564 mit der Form von hängenden Seilen und Ketten beschäftigte. Er beschrieb sie jedoch fälschlicherweise als Parabeln. Joachim Jung konnte 1669 zeigen, dass es sich nicht um eine Parabel handelt. Schließlich konnten Christiaan Huygens, Gottfried Wilhelm Leibniz und Johann Bernoulli 1691 unabhängig voneinander die Katenoide als Cosinus hyperbolicus identifizieren.

Didaktischer Kommentar

Die historisch spannende Frage nach der Katenoide erfährt in dieser Aufgabe eine praktische Diskussion über qualitative Vergleiche und eine Modellierung verschiedener Funktionen. Umgesetzt wird die Aufgabe an Straßenpollern, wie sie sich oft in Innenstädten finden.

Ziel der Aufgabe soll es sein, ein Verständnis dafür zu erlangen, dass Natur, Physik und Mathematik eng miteinander verwoben sind und Polynome eine (zumindest sehr gute) Näherung für komplexere Funktionen darstellen. Bevor die Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe bearbeiten, sollten folgende Inhalte im Unterricht behandelt worden sein: die Scheitelpunktform und Normaldarstellung einer Parabelfunktion, die Eigenschaften von Parabelfunktionen und natürlichen Exponentialfunktionen, die Abgrenzung von absolutem und relativem Fehler sowie das Lösen von Steckbriefaufgaben.

Für die Durchführung wichtig, aber für gewöhnlich nicht Teil des Curriculums, sind folgende Inhalte, welche zum besseren Verständnis ebenfalls eingeführt werden sollten: die Darstellung des Cosinus hyperbolicus als arithmetisches Mittel zweier natürlicher Exponentialfunktionen sowie der Verlauf des Graphen des Cosinus hyperbolicus und die Transformation durch Parameter.
Der Cosinus hyperbolicus als unvertrauter Funktionstyp tritt zwar in Erscheinung, die durchzuführenden Rechnungen basieren aber ausschließlich auf den bekannten Parabelfunktionen und der natürlichen Exponentialfunktion. Schwächere Schülerinnen und Schüler brauchen also nicht zurückschrecken.

Im Anschluss an diese Aufgabe bietet es sich an, weitere Polynomfunktionen mit höherem Grad und ihre Eigenschaften (z.B. Symmetrien) zu untersuchen.