

Sicher mit Helm

Wahrscheinlichkeiten beim Radfahren

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an einem Fahrradweg am Bonner Rheinufer erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1/A2

Merkmal	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
Erwachsene mit Helm	31	0.19
Erwachsene ohne Helm	55	0.34
Kinder mit Helm	28	0.18
Kinder ohne Helm	47	0.29

Es liegt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vor, da die Summe aller relativen Häufigkeiten den Wert 1 ergibt: $0.19 + 0.34 + 0.18 + 0.29 = 1$

Für die weiteren Teilaufgaben halten wir folgende Anzahlen und folgende Definitionen der Ereignisse hier fest:

Anzahl aller Radfahrer/innen = 161

A = Radfahrende/r trägt Helm

Anzahl der Helmträger/innen = 59

B = Radfahrer/in ist erwachsen

Anzahl der Erwachsenen = 86

C = Radfahrer/in ist ein Kind

Anzahl der Kinder = 75

A3 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte erwachsene Person einen Helm trägt. Die Bedingung ist also B . Mit der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{31}{161}}{\frac{86}{161}} = \frac{31}{86} \approx 0.3605$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte erwachsene Person einen Helm trägt, liegt bei 36,05 Prozent.

A4 Die Aufgabe ist analog zu **A3**, nur dass jetzt C die Bedingung ist. Mit der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{28}{161}}{\frac{75}{161}} = \frac{28}{75} \approx 0.3733$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Kind einen Helm trägt, liegt bei 37,33 Prozent.

(P) A5 Im hier vorliegenden Beispiel gibt es scheinbar kaum einen Unterschied im Verantwortungsbewusstsein. Erwartungen würden vielleicht eher von einer höheren Wahrscheinlichkeit bei Kindern ausgehen.

A6 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein/e zufällig ausgewählte/r Helmträger/in erwachsen ist. Die Bedingung ist hier also A . Mit der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich somit:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{31}{161}}{\frac{59}{161}} = \frac{31}{59} \approx 0.5254$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein/e zufällig ausgewählte/r Helmträger/in erwachsen ist, liegt bei 52,54 Prozent.

A7 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein/e zufällig ausgewählte/r Helmträger/in ein Kind ist. Die Bedingung ist hier also A . Mit der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich somit:

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{28}{161}}{\frac{59}{161}} = \frac{28}{59} \approx 0.4746$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein/e zufällig ausgewählte/r Helmträger/in ein Kind ist, liegt bei 47,46 Prozent. Das hätten wir alternativ auch berechnen können, indem wir die Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses aus Teilaufgabe **A6** bestimmt hätten.

A8 Die Vierfeldertafel sieht dann wie folgt aus:

	mit Helm	ohne Helm	
Kinder	$\frac{28}{161}$	$\frac{47}{161}$	$\frac{75}{161}$
Erwachsene	$\frac{31}{161}$	$\frac{55}{161}$	$\frac{86}{161}$
	$\frac{59}{161}$	$\frac{102}{161}$	1

Die Vierfeldertafel ist korrekt, wenn die unterste Zeile und die letzte Spalte addiert jeweils den Wert 1 ergeben. Da die Zwischenergebnisse der vorherigen Aufgaben hier wieder auftauchen, sind auch deren Endergebnisse korrekt.

A9 Die stochastische Unabhängigkeit lässt sich an der Vierfeldertafel überprüfen, indem das jeweils Produkte der Zeilen und Spaltensummen bildet und das Ergebnis mit dem Eintrag in der entsprechenden Zeile und Spalte vergleicht. Ist dieses Produkt gleich der Wahrscheinlichkeit in der entsprechenden Zelle, so sind die Ereignisse stochastisch unabhängig.

In unserem Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \frac{75}{161} \cdot \frac{59}{161} &= \frac{4425}{25921} \approx \frac{28}{161} & \frac{75}{161} \cdot \frac{102}{161} &= \frac{7650}{25921} \approx \frac{47}{161} \\ \frac{86}{161} \cdot \frac{59}{161} &= \frac{5074}{25921} \approx \frac{31}{161} & \frac{86}{161} \cdot \frac{102}{161} &= \frac{8772}{25921} \approx \frac{55}{161} \end{aligned}$$

Bei unseren Messwerten gibt es also annähernd eine stochastische Unabhängigkeit, so dass scheinbar das Helmtragen und das Erwachsen-/Kindsein unabhängig voneinander sind. Das kann natürlich bei euren Erhebungen anders sein.

A10 Die Diskussion soll das Bewusstsein für eine Entscheidung für oder gegen einen Helm beim Radfahren ansprechen. Wie in der „Wusstest du schon?“-Box beschrieben kann eine Helmpflicht zu einer negativen Entwicklung im Radverkehr führen. Dennoch bleibt die Sicherheit der Menschen ein überzeugendes Argument. Die Grundlage der Diskussion ist wieder von den Meinungen der Schülerinnen und Schüler abhängig und wird daher hier nicht abgebildet.

Didaktischer Kommentar

In dieser Aufgabe geht es um bedingte Wahrscheinlichkeiten und um die stochastische Unabhängigkeit. Es werden dabei wichtige stochastische Regeln überprüft und benutzt. Dazu gehören die Bedingungen an eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Formel zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit und die Anforderungen für die stochastische Unabhängigkeit. Damit richtet sich diese Aufgabe an die Sekundarstufe 2. Zur Bearbeitung dieser Aufgabe sollten die Formeln für die bedingte Wahrscheinlichkeit und das Erstellen einer Vierfeldertafel bekannt sein. Im Vorfeld dieser Aufgabe kann es nützlich sein, wenn die Schülerinnen und Schüler die Thematik bereits mit Baumdiagrammen behandelt haben, da dies den Zugang erleichtern kann. Im Anschluss an die Bearbeitung der Aufgabe kann dann zum Beispiel der Satz von Bayes oder der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit im Unterricht behandelt werden.

Die Aufgabe ist so gestellt, dass sie vorwiegend in Einzelarbeit gelöst werden kann. Jedoch ist es durchaus möglich, Gruppen- oder Partnerarbeitsphasen einzubauen. Dies wäre vor allem dann sinnvoll, wenn das Thema noch sehr neu ist und die entsprechenden Formeln und Regeln noch nicht vollständig verinnerlicht wurden. Dann können diese Phasen für neue Denkanstöße sorgen und die Arbeit voranbringen. Es gibt außerdem Diskussionsphasen, in denen die berechneten Daten gemeinsam interpretiert werden sollen.

Als Lernort eignet sich ein Park oder eine Promenade, an der Radfahrerinnen und Radfahrer beobachtet werden können. Die Bearbeitungszeit beträgt circa sechzig Minuten.