# Helm auf und los!

## Statistische Verkehrsbeobachtung

## Lösungsvorschlag

*Hinweis: Diese Lösung wurde an dem Fahrradweg neben der Kennedybrücke in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.*

**A1** Die relative Häufigkeit lässt sich bestimmen, indem man für die Radfahrenden mit und ohne Helm jeweils eine Strichliste führt und die Anzahl der Radfahrerinnen und Radfahrer mit Helm durch die Gesamtanzahl teilt.
In einer realen Messung ergab sich die relative Häufigkeit $\frac{15}{85} \approx 17,65\%$.

**A2** Da nicht alle Radfahrerinnen und Radfahrer beobachtet wurden, sondern nur eine Stichprobe, stimmt die relative Häufigkeit im Allgemeinen nicht mit der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit überein. Nach dem Gesetz der großen Zahlen kann der Fehler aber minimiert werden, wenn die Stichprobe größer gewählt wird.

**A3** Es macht Sinn anzunehmen, dass es für jeden einzelnen Radfahrer eine Wahrscheinlichkeit $p$ dafür gibt, dass er oder sie einen Helm trägt. Zudem kann man annehmen, dass die Ereignisse, dass zwei verschiedene Personen jeweils einen Helm tragen, unabhängig voneinander sind. Beobachtet man $n$ Personen nacheinander und ist $X_i$ die Zufallsgröße, die den Wert $1$ oder $0$ annimmt je nachdem, ob ein Helm getragen wird oder nicht, so ist $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$. Dann ist $X = X_1 + \cdots + X_n$ die Anzahl der helmtragenden Personen unter den $n$ beobachteten Personen. Die Binomialverteilungsannahme ist also gerechtfertigt.
Kritisch anmerken könnte man, dass bei Familien das Helmtragen evtl. doch nicht unabhängig voneinander ist.
Zudem ist anzumerken, dass das Schätzen von $p$ uhrzeitbedingt fehlerbehaftet sein kann, da zum Beispiel morgens viele Schulkinder mit Helm unterwegs sind, im Laufe des Tages aber mehr Erwachsene ohne Helm radeln.

**B1** In dem gemessenen Zeitabschnitt von 10 Minuten haben 85 Radfahrerinnen und Radfahrer den Standort passiert. Die Messung wurde in einem verkehrsberuhigten Zeitabschnitt zur Mittagszeit vorgenommen. Es ist davon auszugehen, dass der Standpunkt zu Stoßzeiten (etwa morgens, wenn viele Radfahrerinnen und Radfahrer zur Arbeit/zur Schule fahren) doppelt so frequentiert befahren ist. Wenn man weiter davon ausgeht, dass bis etwa 7 Uhr nur sehr wenig Radfahrende die Strecke passieren, kommt man hochgerechnet auf etwa 1700 Radfahrerinnen und Radfahrer, die den Standort bis zum aktuellen Zeitpunkt passiert haben.

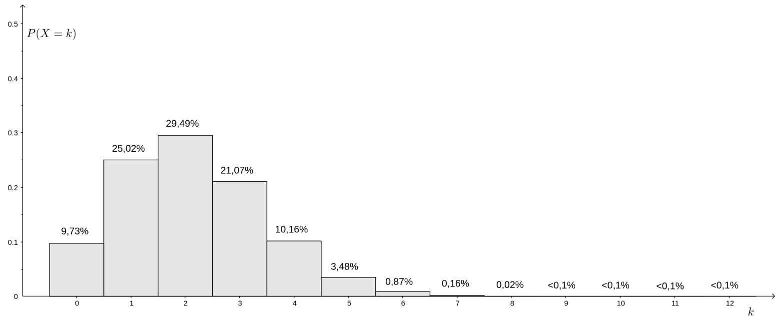
**B2** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand einen Helm trägt, beträgt nach Aufgabenteil **A** $17,65$ Prozent. Also ist $p = 0,1765$.
Da berechnet werden soll, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass heute weniger als die Hälfte der Radfahrenden an der Messstelle einen Helm trug, muss die Anzahl der Radfahrenden zunächst durch zwei geteilt werden: $\frac{1700}{2} = 850$
Es muss also folgende Wahrscheinlichkeit berechnet werden: $P(X < 850)$
Mit dem Taschenrechner ergibt sich $P(X < 850) \approx 1$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also fast $100$ Prozent.

**B3** Gesucht ist der Erwartungswert der angegebenen Zufallsgröße. Mit $n = 1700$ und $p = 0,1765$ ergibt sich für den Erwartungswert

$$\mu = n \cdot p = 1700 \cdot 0,1765 = 300,05 \approx 300.$$

$P(X = 300) = \binom{1700}{300}(0,1765)^{300}(1 - 0,1765)^{1700-300} \approx 0,025 = 2,5$%. Obwohl es sich um den Erwartungswert handelt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er erreicht wird, nur etwa $2,5$%. Der Grund dafür ist, dass die Stichprobe groß ist und dadurch die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Wert niedrig wird.

**B4**




**B5** Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 12 \cdot 0,1765 = 2,118$
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{12 \cdot 0,1765 \cdot 0,8235} \approx 1,3207$

**B6** $\mu - \sigma = 2,118 - 1,3207 = 0,7973$ $\qquad \mu + \sigma = 2,118 + 1,3207 = 3,4387$
Nach Vorgabe muss $\mu - \sigma$ ab- und $\mu + \sigma$ aufgerundet werden. Also ist

$$P(0 \leq X \leq 4) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 4) \approx 0.9546 = 95,46\%.$$

Man sieht im Histogramm, dass die Wahrscheinlichkeiten für $k = 0, 1, 2, 3$ und 4 am größten sind und zusammen den größten Teil der Fläche aller Balken einnehmen.

**B7** Nun ist wieder beispielhaft $n = 1700$. Der Erwartungswert ist $\mu = 300,05$ und die Standardabweichung $\sigma \approx 15,7191$.
Dann ist nach der Sigma-Regel a)

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(284,3309 \leq X \leq 315,7691) \approx 68,3\%.$$

Da die Wahrscheinlichkeit nicht kleiner sein darf, muss der untere Wert ab- und der obere Wert aufgerundet werden auf $P(284 \leq X \leq 316) \approx 70,62$%.

Analog ist nach der Sigma-Regel f)

$$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx P(259,49 \leq X \leq 340,60) \approx P(259 \leq X \leq 341) \approx 99\%.$$

**C1** Von insgesamt 24 beobachteten Fußgängerinnen und Fußgängern schauten 4 auf ihr Smartphone. Damit ist der Anteil $p = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

**C2** Sei $Y$ eine binomialverteilte Zufallsgröße mit dieser Erfolgswahrscheinlichkeit $p$. Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass eine Sigma-Regel angewendet werden muss. Das Ergebnis soll ein Bereich ganzer Prozentzahlen sein. Aus dem Grund ist es sinnvoll, als Versuchsanzahl

$n = 100$ zu wählen. Der Erwartungswert ist $\mu = 100 \cdot \frac{1}{6} = \frac{50}{3} \approx 16,6667$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{500}}{6} \approx 3,7268.$
Dann gilt mit der Sigma-Regel c)

$$99,7\% \approx P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) \approx P(5,47 \leq Y \leq 27,85).$$

Da die Wahrscheinlichkeit beim Runden nicht kleiner werden darf, muss der untere Wert ab- und der obere Wert aufgerundet werden. Der gesuchte prozentuale Bereich ist also $[5\%, 28\%]$. In diesem Bereich liegt der Anteil der Personen, die an dieser Stelle beim Gehen aufs Smartphone schauen, zu einer Wahrscheinlichkeit von über $99,7\%$.

## Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 und kann im Rahmen einer Unterrichtsreihe zur Statistik durchgeführt werden. Vor der Bearbeitung der Aufgaben sollten sich die Schülerinnen und Schüler bereits mit binomialverteilten Zufallsgrößen, deren Erwartungswert und deren Standardabweichung auseinandergesetzt haben. Im Verlauf der Aufgabe werden die Sigma-Regeln eingeführt. Es ist daher nicht nötig, dass die Schülerinnen und Schüler diese bereits aus dem Unterricht kennen.

In der ersten Teilaufgabe **A1** sollen die Schülerinnen und Schüler den Anteil der vorbeifahrenden Helmträgerinnen und Helmträger in einem vorgegebenen Zeitraum bestimmen. Durch die hohe Anzahl an passierenden Fahrrädern reicht der Zeitraum von zehn Minuten aus, um eine ausreichend große Stichprobe zu erhalten. Da es sich dennoch nur um eine Stichprobe handelt, wird in Teilaufgabe **A2** auf das Gesetz der großen Zahlen aufmerksam gemacht. Der Name des Gesetzes sollte den Schülerinnen und Schülern bekannt sein.

In Teilaufgabe **A3** sollen sich die Lernenden überlegen, warum der Binomialverteilungsansatz hier ein gutes Modell liefert. In Teilaufgabe **B2** wird dann nach der kumulierten Wahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgröße gefragt. Da sie den Satz von De Moivre-Laplace nicht kennen und das Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeit per Hand nicht umsetzbar ist, müssen sie auf ihren Taschenrechner zurückgreifen. Alternativ kann auch eine Tabelle der kumulierten Binomialverteilung genutzt werden.

Der Parameter $n$ hat in Teilaufgabe **B3** den Wert $12$, damit das Histogramm mit nicht allzu hohem Aufwand per Hand gezeichnet werden kann. Die Berechnung der Werte kann mit einem Taschenrechner durchgeführt werden.

Da die Intervallgrenzen im Allgemeinen nicht ganzzahlig sind, müssen sie gerundet werden. In Teilaufgabe **B6** wird die Rundung so vorgegeben wie sie später auch bei den Sigma-Regeln angewandt wird.

In Aufgabenteil **B7** trainieren die Schülerinnen und Schüler ihre Problemlösekompetenz, indem sie die Sigma-Regeln auf die konkrete Fragestellung anwenden.

In Teilaufgabe **C2** soll erneut eine der Sigma-Regeln angewendet werden. Im Gegensatz zu Teilaufgabe **B6** ist hier jedoch nach einem prozentualen Bereich gefragt. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass der Parameter $n = 100$ gewählt werden kann und die resultierenden Intervallgrenzen als Prozentsätze aufzufassen sind.