Extreme Kurven

Integration an der Halfpipe

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an der Halfpipe in der Bonner Rheinaue erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Mit $P(0|0,1)$ und $Q(-4|4,4)$, d.h. $q_1 = 4$, erhalten wir das Polynom $f(x) \approx 0,017x^4 + 0,1$.

A2

$$F(x) = 0,0034x^5 + 0,1x$$

A3 Für den Flächeninhalt unterhalb des Polynoms erhalten wir:

$$\int_{-4}^{0} (0,017x^4 + 0,1)\,dx = \Big[0,0034x^5 + 0,1x\Big]_{-4}^{0} = 3,8816 \approx 3,88$$

Diese Fläche gibt es insgesamt vier Mal, also:

$$3,88\ \text{m}^2 \cdot 4 = 15,52\ \text{m}^2$$

Für den Flächeninhalt der linken und rechten Seitenwand erhalten wir:

$$2 \cdot (12\ \text{m} \cdot 4,4\ \text{m}) = 105,60\ \text{m}^2$$

Für die Flächenstücke der Vorderansicht, die nicht durch den Flächeninhalt unterhalb des Polynoms erfasst werden, erhalten wir:

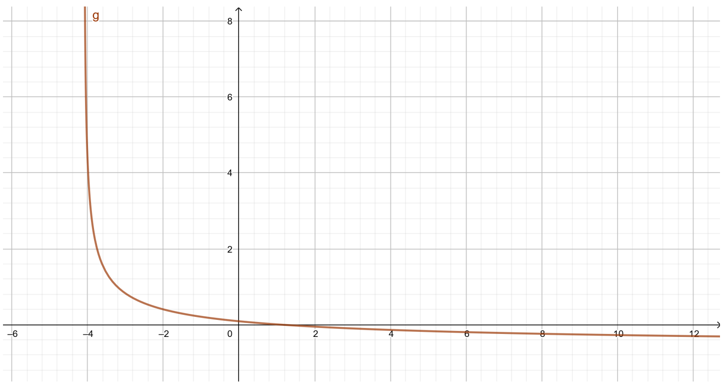
$$4 \cdot (2,45\ \text{m} \cdot 4,4\ \text{m}) + 2 \cdot (3,6\ \text{m} \cdot 0,10\ \text{m}) = 43,12\ \text{m}^2 + 0,72\ \text{m}^2 = 43,84\ \text{m}^2$$

Alle Flächen müssen wir nun addieren und mit 49 Euro pro Quadratmeter multiplizieren, um die Kosten zu erhalten:

$$(15,52\ \text{m}^2 + 105,6\ \text{m}^2 + 43,84\ \text{m}^2) \cdot \frac{49\ €}{\text{m}^2} = 8083,04\ €$$

Die Erneuerung der Außenverkleidung der Halfpipe kostet die Stadt $8083,04$ Euro.

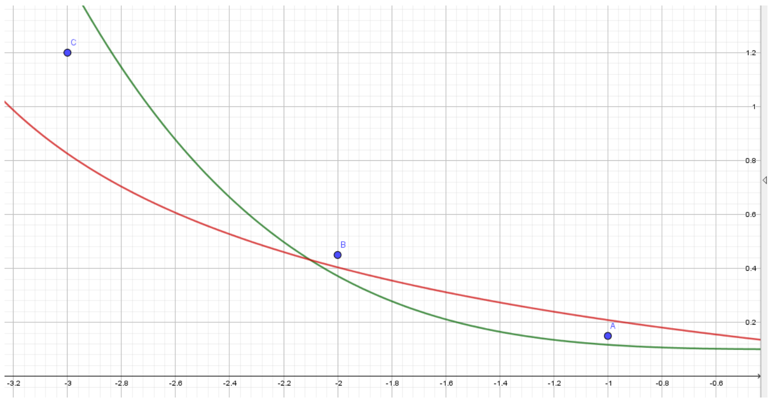
B1 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *g* mit den Parametern $a = 1,6$, $b = 4,1$ und $c = 0,7$.



Es wurden folgende Punkte gemessen: $A(-1|0,15)$, $B(-2,0,45)$ und $C(-3|1,2)$.
Die Abweichungen der Funktionen f und g zu den gemessenen Punkten können der folgenden Tabelle entnommen werden.

Punkt	Funktionswert von f	Abweichung der Funktion f	Funktionswert von g	Abweichung der Funktion g
$A(-1\|0,15)$	$f(-1)=0,117$	$0,033$	$g(-1)\approx 0,209$	$0,059$
$B(-2\|0,45)$	$f(-2)=0,372$	$0,078$	$g(-2)\approx 0,404$	$0,032$
$C(-3\|1,2)$	$f(-3)=1,477$	$0,277$	$g(-3)\approx 0,826$	$0,374$
		Summe: $0,388$		Summe: $0,465$

Die Funktionen f und g sind also ähnlich gut als Annäherung geeignet. Die Funktion f erscheint geringfügig besser, da die Abweichung zu den gemessenen Punkten geringer ist. Das folgende Bild illustriert die Güte der Approximation:



B2 Für die Stammfunktion berechnen wir:

$$\int \left(\frac{1,6}{\sqrt{(x+4,1)}} - 0,7\right) dx$$

Substituiere: $u = x + 4,1$; $\frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow du = dx$

$$\int \left(\frac{1,6}{\sqrt{(x+4,1)}}-0,7\right) dx = \int \left(\frac{1,6}{\sqrt{u}}-0,7\right) du = 1,6\cdot 2\cdot\sqrt{u}-0,7u = 3,2\cdot\sqrt{x+4,1}-0,7(x+4,1)$$

Daraus folgt für den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_{-4}^{0} \left(\frac{1,6}{\sqrt{(x+4,1)}} - 0,7\right) dx = \left[3,2\cdot\sqrt{x+4,1} - 0,7(x+4,1)\right]_{-4}^{0} \approx 2,67 \text{ m}^2$$

Für die Fläche unterhalb des Graphen der Funktion $g(x)$ würden im Intervall $[-4,0]$ etwa $2,67$ Quadratmeter Holz benötigt.

B3 Flächeninhalt unterhalb der Funktion aus Teilaufgabe **A1**: $3,88$ m^2
Flächeninhalt unterhalb der Funktion aus Teilaufgabe **B1**: $2,67$ m^2

Der Kostenvoranschlag ist bei der Modellierung mit dem Polynom 4. Grades teurer, da die zu kalkulierende Fläche größer ist.

C1 Der Flächeninhalt des Rechtecks soll maximiert werden:

$$A(u) = (u - (-4)) \cdot f(u) = (u + 4) \cdot f(u)$$

Zielfunktion:

$$A(u) = (u + 4) \cdot (0,017u^4 + 0,1) = 0,017u^5 + 0,068u^4 + 0,1u + 0,4$$

$$A'(u) = 0,085u^4 + 0,272u^3 + 0,1$$
$$A''(u) = 0,34u^3 + 0,816u^2$$

$A'(u) = 0$ gilt für $u_1 \approx -0,787$ und $u_2 \approx -3,163$. Es gilt $A''(-0,787) \approx 0,34 > 0$ und $A''(-3,163) \approx -2,6 < 0$. Also liegt an der Stelle u_1 ein lokales Minimum und an der Stelle u_2 ein lokales Maximum vor. Es gilt $A(u_2) = A(-3,163) = 1,51$.
Die Randwertbetrachtung ergibt mit $A(0) = 0,4$ und $A(-4) = 0$ keine besseren Funktionswerte. Damit handelt es sich beim lokalen Maximum tatsächlich um das gesuchte Optimum.
Der optimale Punkt R hat die Koordinaten $R = (-3.163, f(-3.163)) \approx (-3.163, 1.8)$.
Bei $R = (-3.163, 1.8)$ wird der Flächeninhalt des Rechtecks maximal. Er beträgt dann $1,51$ Quadratmeter.

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe soll zu einem tieferen Verständnis der Integralrechnung führen und bietet sich für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II an. Für die Bearbeitung der Aufgabe ist ein souveräner Umgang mit dem grafikfähigen Taschenrechner von Vorteil. Kenntnisse der Differentialrechnung, das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen sowie das Ermitteln des Werts eines bestimmten Integrals mit dem grafikfähigen Taschenrechner werden vorausgesetzt.

Um Teilaufgabe **A1** zu bearbeiten, sollte den Schülerinnen und Schülern bekannt sein, wie sie mittels einzelner Punkte ein Polynom aufstellen können. Des Weiteren sollten die Schülerinnen und Schüler hinreichende Kenntnisse in der Integralrechnung besitzen. In den Teilaufgaben **A2** und **A3** bestimmen die Schülerinnen und Schüler Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen und berechnen anschließend Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen.

In Teilaufgabe **B2** müssen die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse zur Integration mittels Substitution anwenden.

Teilaufgabe **C1** beschäftigt sich mit einer Extremwertaufgabe im Aufgabenkontext der Halfpipe.