Grundgerüst der analytischen Geometrie

Analytische Geometrie am Schaukelgerüst

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an der Schaukel in der Abtstraße in Bonn Geislar erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Die Punkte haben folgende Koordinaten: $A\,(13\,|\,0\,|\,0)$, $D\,(0\,|\,0\,|\,0)$, $E\,(6{,}5\,|\,3{,}5\,|\,24)$.

A2 Mithilfe von Messungen und Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften ergeben sich folgende Koordinaten: $B\,(13\,|\,36\,|\,0)$, $C\,(0\,|\,36\,|\,0)$, $F\,(6{,}5\,|\,32{,}5\,|\,24)$.

B1 Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck mit mindestens zwei gleich langen Seiten. Für das Dreieck $\triangle ADE$ gilt:

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -6{,}5 \\ -3{,}5 \\ -24 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -3{,}5 \\ -24 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

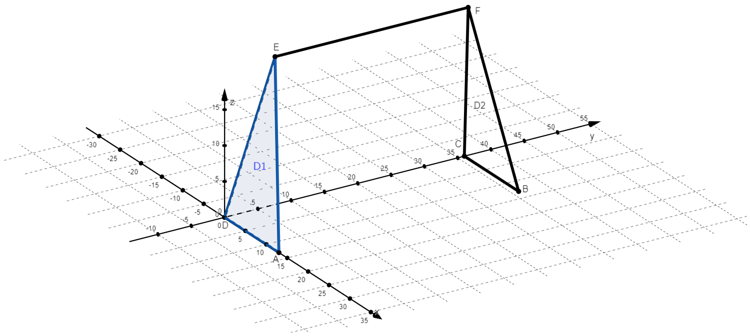
Damit ist:

$$|\overrightarrow{ED}| = \sqrt{(-6{,}5)^2 + (-3{,}5)^2 + (-24)^2} \approx 25{,}1 \text{ [Dezimeter]}$$

$$|\overrightarrow{EA}| = \sqrt{6{,}5^2 + (-3{,}5)^2 + (-24)^2} \approx 25{,}1 \text{ [Dezimeter]}$$

$$\text{und } |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{13^2 + 0^2 + 0^2} = 13 \text{ [Dezimeter]}.$$

Das Dreieck ist also gleichschenklig mit einer Schenkellänge von etwa 25 Dezimetern, beziehungsweise 2,50 Metern. Nachmessen bestätigt das Ergebnis.



B2 Um zu überprüfen, ob die Ebenen parallel zueinander sind, müssen die Ebenengleichungen gleichgesetzt werden. Die Ebenen der Dreiecke werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$D_1\colon \vec{x} = \overrightarrow{OD} + r \cdot \overrightarrow{DA} + s \cdot \overrightarrow{DE} = r \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 3{,}5 \\ 24 \end{pmatrix},$$

$$D_2\colon \vec{x} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CF} + u \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -3{,}5 \\ 24 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen liefert:

$$\begin{aligned} 13r + 6{,}5s &= 6{,}5t + 13u && (1)\\ 3{,}5s &= 36 - 3{,}5t && (2)\\ 24s &= 24t && (3) \end{aligned}$$

Gleichung (3) liefert: $s = t$. Mit Gleichung (2) folgt: $t = \frac{36}{7}$ und mit Gleichung (1) folgt: $r = u$.

Einsetzen in D_1 liefert : $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{36}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 3{,}5 \\ 24 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{234}{7} \\ 18 \\ \frac{864}{7} \end{pmatrix}$

Das lineare Gleichungssystem liefert eine Schnittgerade der Ebenen. Die Dreiecke D_1 und D_2 sind also nicht parallel zueinander.

B3 Um die Schnittgerade zu bestimmen, müssen die beiden Ebenengleichungen gleichgesetzt werden (siehe Lösung zu **B2**). Die Gleichung der Schnittgeraden S_1 lautet:

$$S_1 : \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{234}{7} \\ 18 \\ \frac{864}{7} \end{pmatrix}$$

Es kann direkt abgelesen werden, dass sich die Ebenen auf einer Höhe von $\frac{864}{7} \approx 123,43$ Dezimetern schneiden.

B4 Falls die Ebenen aus Teilaufgabe **B2** parallel sind, entsteht direkt ein Prisma. Dann gilt für das Volumen $V = G \cdot h$, wobei die Grundfläche einem gleichschenkligen Dreieck entspricht (siehe Teilaufgabe **B1**).
Da die Dreiecke $D1$ und $D2$ hier nicht parallel zueinander verlaufen, wird der Körper in ein Prisma und zwei volumengleiche schiefe Pyramiden aufgeteilt (siehe Abbildung unten). Der Schnitt verläuft parallel zur x-Achse, 3,5 Dezimeter beziehungsweise 32,5 Zentimeter von ihr entfernt.

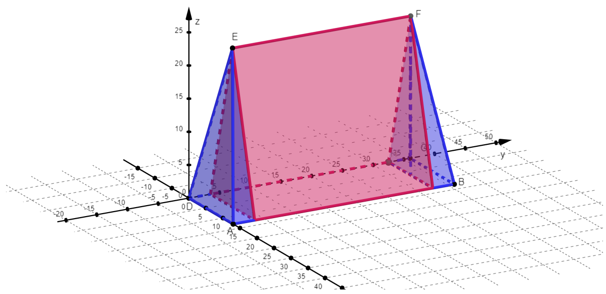
Die Höhe des Prismas ist gegeben durch $|\overrightarrow{EF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{29^2} = 29$ [Dezimeter].

Für die Grundseite des Prismas werden die Höhe und die Länge der Grundseite des Dreiecks benötigt. Die Höhe des Dreiecks beträgt 24 Dezimeter (z-Koordinate der Punkte E und F). Für die Länge der Grundseite gilt $|\overrightarrow{B'C'}| = 13$ [Dezimeter].

Damit ist das Volumen: $V_{\text{Prisma}} = G \cdot h = (\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 24) \cdot 29 = 4524$ [Kubikdezimeter]
Da das Schaukelgerüst symmetrisch ist, reicht es aus, das Volumen einer Pyramide zu berechnen. Die Höhe beträgt, wie beim Prisma, 24 Dezimeter. Für die rechteckige Grundfläche werden die Längen $|\overrightarrow{B'B}| = 3{,}5$ [Dezimeter] und $|\overrightarrow{BC}| = 13$ [Dezimeter] miteinander multipliziert.

Damit beträgt das Volumen:
$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (3{,}5 \cdot 13) \cdot 24 = 364$ [Kubikdezimeter]

Das Gesamtvolumen ist also:
$V_{\text{Prisma}} + 2 \cdot V_{\text{Pyramide}} = 5252$ [Kubikdezimeter] $= 5{,}252$ [Kubikmeter]



C1 Die Grundfläche des Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck (entweder $\triangle\ A'D'E$ oder $\triangle\ B'C'F$). Die Koordinaten der gesuchten Punkte lauten:
$A'\,(13\,|\,3{,}5\,|\,0)$, $B'\,(13\,|\,32{,}5\,|\,0)$, $C'\,(0\,|\,32{,}5\,|\,0)$ und $D'\,(0\,|\,3{,}5\,|\,0)$.

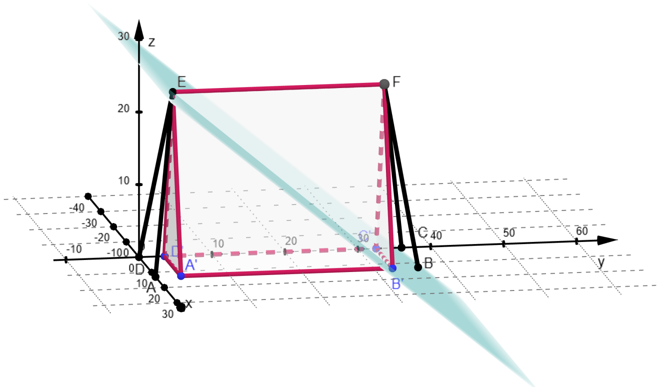
C2 Mit den Koordinaten $B'\,(13\,|\,32{,}5\,|\,0)$, $C'\,(0\,|\,32{,}5\,|\,0)$ und $E\,(6{,}5\,|\,3{,}5\,|\,24)$ ist eine Gleichung der Schnittebene gegeben durch:

$$S_2 \colon \vec{x} = \overrightarrow{OB'} + v \cdot \overrightarrow{B'C'} + w \cdot \overrightarrow{B'E} = \begin{pmatrix} 13 \\ 32{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -6{,}5 \\ -29 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

C3 Durch den Schnitt entstehen zwei Pyramiden. Der Teilkörper $B'C'FE$ ist eine dreiseitige Pyramide mit Grundfläche $B'C'F$ und Höhe $\overrightarrow{FE}$. Die Grundfläche und die Höhe der Pyramide stimmen jeweils mit der des Prismas überein.

Für die Volumina gelten: $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ und $V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \tfrac{1}{3} \cdot V_{\text{Prisma}} \;\Rightarrow V_{\text{Rest}} = \tfrac{2}{3} \cdot V_{\text{Prisma}} \;\Rightarrow V_{\text{Rest}} \neq V_{\text{Pyramide}}$$



C4 Gewählt wurde der Standpunkt $V_1\,(0\,|\,4\,|\,0)$. Es wird geprüft, ob eine Person mit einer Körpergröße von 1,70 Metern im aufrechten Stand unter die Schnittebene passt. Dazu wird die Person zunächst als Gerade dargestellt:

$$p_1 \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist jetzt der Schnittpunkt der Schnittebene S_2 und der Geraden p_1. Gleichsetzen liefert folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 13 & - & 13v & - & 6{,}5w & = & 0 \qquad (4) \\ 32{,}5 & & & - & 29w & = & 4 \qquad (5) \\ & & & & 24w & = & n \qquad (6) \end{array}$$

$\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $w \approx 0{,}98$ $\overset{(6)}{\Rightarrow}$ $n = 23{,}58$. Einsetzen in p_1 liefert den Schnittpunkt $(0\,|\,4\,|\,23{,}58)$. Dieser befindet sich in einer Höhe von 2,36 Metern. Daher kann sich eine 1,70 Meter große Person an dem gewählten Standpunkt aufrecht unter die Schnittebene stellen.

C5 Vereinfachend wird der Standort gesucht, an dem sich die Schnittebene S und die Gerade, welche den Stand der 1,70 Meter großen Person visualisiert, schneiden. Das bedeutet, wir suchen den Wert von y mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + 17 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 32{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -6{,}5 \\ -29 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Dies liefert folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrr} 13 & - & 13v & - & 6{,}5w & = & 0 & \quad (7) \\ 32{,}5 & & & - & 29w & = & y & \quad (8) \\ & & & & 24w & = & 17 & \quad (9) \end{array}$$

Mit (9) folgt: $w = \frac{17}{24}$. Mit (8) folgt: $y = 32,5 - 29 \cdot \frac{17}{24} \approx 11,46$. Somit lauten die Koordinaten des Standpunktes, an dem die Person gerade noch unter die Schnittebene passen würde: $V_2\,(0\,|\,11,46\,|\,0)$.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang greift elementare Themenfelder und Inhalte der analytischen Geometrie auf und kann in der Sekundarstufe 2 mit einem fortgeschrittenen Grund- oder mit einem Leistungskurs durchgeführt werden.
Die grundlegenden Inhalte in den Themenbereichen Vektoren und Ebenen müssen im Vorfeld besprochen worden sein. Die Schülerinnen und Schüler müssen lineare Gleichungssysteme lösen können. Inhaltlich wird außerdem ein elementares Wissen über Geometrie vorausgesetzt. Die Volumenformeln von Prismen und Pyramiden, die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks und Eigenschaften besonderer Dreiecke müssen bekannt sein.

In Aufgabenteil **A** verschaffen sich die Schülerinnen und Schüler zunächst einen Überblick über den Lernort und betrachten das Schaukelgerüst in einem mathematischen Kontext. Sie reflektieren auftretende Schwierigkeiten lösungsorientiert und vereinfachen gemeinsam die Realsituation. Anschließend erfassen sie das Schaukelgerüst als geometrisches Objekt. Aufgabenteil **B** leitet zur Berechnung des vom Schaukelgerüst eingefassten Volumens an. Zuletzt wird das Schaukelgerüst genutzt, um durch eine Schnittebene entstehende Teilkörper auf einer abstrakteren Ebene anschaulich darzustellen. Eine Skizze kann die Erstellung eines Lösungsplans unterstützen und die Erarbeitungsphase verkürzen. Verschiedene Formen der Körper und Symmetrien sind hierdurch leichter ersichtlich. Um den Bezug zur Realsituation wiederherzustellen, agieren die Schülerinnen und Schüler in den Teilaufgaben **C4** und **C5** selbst im Koordinatensystem. Damit wird das räumliche Vorstellungsvermögen gefördert, welches beispielsweise im Themenbereich Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen sehr hilfreich sein kann.