Fließende Übergänge

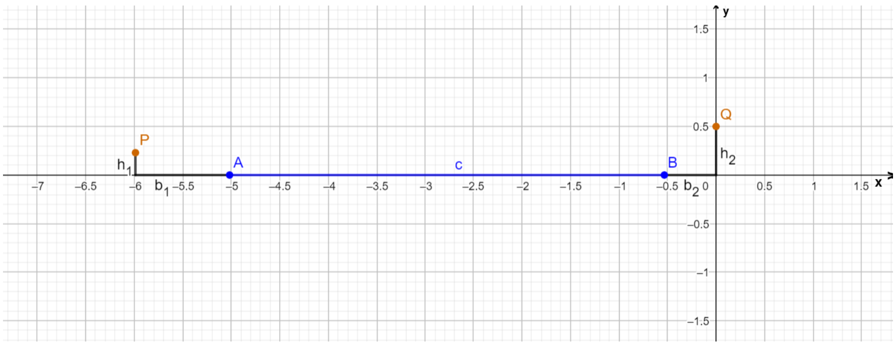
Modellierung eines Flussbettes

Lösungsvorschlag

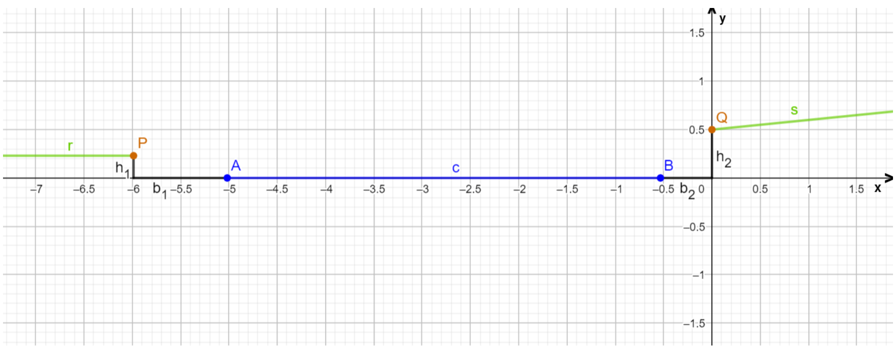
Diese Lösung wurde am Wahnbach entlang eines Wanderweges an der Wahnbachtalstraße zwischen der Kreuzung Wahnbachtalstraße/Talstraße und der Mündung des Wanderweges auf die Raiffeisenstraße in 53819 Neunkirchen-Seelscheid erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A2 Der Bach ist hier ca. $c = 4,48$ Meter breit, die linke Uferzone ist $h_1 = 0,23$ Meter hoch und $b_1 = 0,97$ Meter breit, die rechte Uferzone ist $h_2 = 0,5$ Meter hoch und $b_2 = 0,53$ Meter breit.

A3



A4, A5 Die linke Uferzone hat nahezu Steigung 0 und die rechte Uferzone eine geschätzte Steigung von $\frac{1}{10}$. Damit ergeben sich $r(x) = h_1 \approx 0,23$ und $s(x) = \frac{1}{10}x + h_2 \approx \frac{1}{10}x + \frac{1}{2}$.



A6 Mit den charakteristischen Punkten P und Q gilt für $g_{a,b}(x) = ax^2 + e^x + b$:

$$\begin{aligned} g_{a,b}(-6) &= a(-6)^2e^{-6} + b = 0,23 \\ g_{a,b}(0) &= a(0)^2e^0 + b = 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0,5 \end{aligned}$$

Einsetzen von $b = 0,5$ in die erste Gleichung liefert:

$$\frac{36a}{e^6} + 0.5 = 0,23 \quad \Rightarrow \quad a \approx -3,0$$

Die Funktion $g(x) = -3x^2e^x + \frac{1}{2}$ mit $x \in [-6,0]$, $a = -3$ und $b = \frac{1}{2}$ beschreibt die Profilkurve des Flussbettes.

A7 Die Brücke lässt sich als lineare Funktion durch die beiden Punkte $P = (-6|0,23)$ und $Q = (0|0,5)$ modellieren. Durch Einsetzen der beiden Punkte in die lineare Gleichung $y = mx + n$ ergeben sich folgende Gleichungen:

$$0,23 = m \cdot (-6) + n$$
$$0,5 = m \cdot 0 + n \Leftrightarrow n = 0,5$$

Setzt man $n = 0,5$ in die erste Gleichung ein, so erhält man:

$$0,23 = -6m + 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad -0,27 = -6m \quad \Leftrightarrow \quad m = 0,045$$

Die Brücke lässt sich somit durch folgende Gleichung beschreiben: $y = 0,045 \cdot x + 0,5$. Dass die Steigung 4,5 % beträgt, lässt sich an der Gleichung einfach ablesen.

Die Länge der Brücke L lässt sich mithilfe des Satzes des Phythagoras und mit einem Steigungsdreieck berechnen. Gesucht ist die Hypotenuse im Dreieck, bei denen die Katheten jeweils die positive Differenz der x-Werte und die positive Differenz der y-Werte der beiden Punkte P und Q sind.

$$\Delta x = 0 - (-6) = 6 \text{ und } \Delta y = 0,5 - 0,23 = 0,27$$

Es gilt dann $L^2 = 6^2 + 0,27^2$. Daraus folgt $L^2 = 36,0729$. Wir interessieren uns nur für die positive Lösung $L \approx 6,01$. Die Brücke hat also eine Länge von circa 6,01 Metern.

A8 Gesucht ist der Tiefpunkt der Funktion g.

$$g(x) = -3x^2e^x + 0,5$$

Die erste Ableitung lautet:

$$g'(x) = -6xe^x - 3x^2e^x$$

Gesucht werden nun die Nullstellen der ersten Ableitung. Sie sind Kandidaten für Tiefpunkte:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -6xe^x - 3x^2e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x(-6x - 3x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x = x(x+2) = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$. Die zweite Ableitung lautet:

$$g''(x) = -3(x^2 + 4x + 2)e^x$$

Einsetzen der beiden Nullstellen der ersten Ableitung liefert

$$g''(-2) = -3(4 - 8 + 2)e^{(-2)} \approx 0,812 > 0 \quad \text{und} \quad g''(0) = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -6 < 0$$

Somit liegt an der Stelle $x = -2$ ein Tiefpunkt der Funktion g vor. Es gilt

$$g(-2) = -3 \cdot (-2)^2 \cdot e^{(-2)} + 0,5 \approx -1,12$$

Die maximale Tiefe beträgt also etwa $1,12$ Meter.

B1 Zum Messzeitpunkt wurden die folgenden drei Durchschnittsgeschwindigkeiten dadurch ermittelt, dass die Zeiten, innerhalb welcher ein Stück Holz zehn Meter auf dem Wasser zurückgelegt hat, gemessen wurden. Die Geschwindigkeit des Holzstückes sollte nicht direkt zu Beginn gemessen werden, da sich die Geschwindigkeit des auf dem Wasser treibenden Holzstückes erst an die Fließgeschwindigkeit des Baches oder Flusses anpassen muss.

1. Auf den ersten zehn Metern benötigte das Holzstück 15 Sekunden.
   Die Fließgeschwindigkeit beträgt also $\frac{10}{15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{2}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,\overline{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
2. Auf einem zweiten zehn Meter langen Stück benötigte das Holzstück 6 Sekunden.
   Die Fließgeschwindigkeit beträgt also $\frac{10}{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{5}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,\overline{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
3. Auf den letzten zehn Metern benötigte das Holzstück 30 Sekunden.
   Die Fließgeschwindigkeit beträgt also $\frac{10}{30}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,\overline{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

B2

$$\frac{\frac{2}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{5}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{1}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3} = \frac{8}{9}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,\overline{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

B3 Wir benötigen den Flächeninhalt A_{Fluss} des Flussquerschnittes aus Aufgabenteil **A**. Dazu nutzen wir die beiden Messwerte für die Nullstellen von g aus Teilaufgabe **A1**:

$$n_1 = -0,53 \quad \text{und} \quad n_2 = -0,53 - 4,48 = -5,01$$

Der Flächeninhalt des Flussquerschnitts in Quadratmetern ist dann gemäß des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gegeben durch

$$A_{\text{Fluss}} = -\int\limits_{-5{,}01}^{-0{,}53} g(x)\,dx = -\big(G(-0,53) - G(-5,01)\big)$$

Dabei ist G eine Stammfunktion von g, die es noch zu berechnen gilt.
Wir berechnen zunächst das Integral $\int x^2 e^x\,dx$ durch partielle Integration mit

$$u'(x) = e^x \quad u(x) = e^x \quad v(x) = x^2 \quad v'(x) = 2x$$

und erhalten

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2 e^x - 2\int xe^x\,dx$$

Das entstehende Integral $\int xe^x\,dx$ berechnen wir mit erneuter partieller Integration mit

$$u'(x) = e^x \quad u(x) = e^x \quad v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

Wir erhalten diesmal

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x = e^x(x-1)$$

Daraus folgt

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

Wenn wir alles zusammenfügen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int g(x)\, dx &= \int \Big(-3x^2 e^x + \frac{1}{2}\Big)\, dx \\ &= -3 \int x^2 e^x \, dx + \int \frac{1}{2}\, dx \\ &= -3(x^2 - 2x + 2)e^x + \frac{1}{2}x \\ &= G(x)\end{aligned}$$

Unsere gesuchte Fläche beträgt damit

$$A_{\text{Fluss}} = -\int_{-5{,}01}^{-0{,}53} g(x)\, dx = -\big(G(-0,53) - G(-5,01)\big) = -(-6,16 - (-3,25) = 2,91$$

Der Flächeninhalt des Flussquerschnittes beträgt also ungefähr 2,91 Quadratmeter.

Für die Durchflussrate berechnen wir das folgende Produkt: $2,91$ m$^2 \cdot \frac{8}{9}$ m/s $= 2,58\overline{6}$ m^3/s. Die Durchflussrate des Baches an dem ausgewählten Abschnitt beträgt etwa $2,6$ Kubikmeter pro Sekunde.

Didaktischer Kommentar

In dieser Aufgabe soll ein Flussbett modelliert werden. Bei der Wahl des Lernortes ist es wichtig, einen Bach oder Fluss mit einer möglichst großen Windung zu wählen. Ansonsten besteht das Flussbett nicht wie in der Aufgabe beschrieben aus einem Prall- und einem Gleithang. Die Aufgabe kann auch an einer kleinen Bachkurve mit geringer Fließgeschwindigkeit durchgeführt werden. In diesem Fall sollte diskutiert werden, dass die Modellierung aufgrund der Gegebenheiten nur eine grobe Näherung darstellt. Wichtig ist, dass es sich um einen natürlichen Bach- oder Flusslauf und nicht um einen künstlich angelegten Kanal handelt, da Kanäle meist rechteckig eingelassen sind. Außerdem ist es wichtig, dass die Fläche des Baches oder Flusses gut einsehbar ist, sodass ein auf dem Fluss treibendes Holzstück gesehen werden kann.

Bei diesem Mathematischen Spaziergang sollen die Schülerinnen und Schüler elementare mathematische Regeln und Verfahren zum Lösen von komplexen Aufgaben aus dem Bereich Differential- und Integralrechnung nutzen.
Ein Grundverständnis des Integralbegriffes ist Voraussetzung zum Lösen dieser Aufgabe. Aufgrund der Komplexität dieses mathematischen Spazierganges sollten die Aufgaben in einem Leistungskurs oder zum Ende der Qualifikationsphase von einem leistungsstarken Grundkurs bearbeitet werden.

In Aufgabenteil **B** wird die partielle Integration benötigt. Schulklassen, die diese noch nicht im Unterricht behandelt haben, können problemlos Aufgabenteil **A** bearbeiten.