Läufst du noch oder radelst du schon?

Unterwegs mit Bernoulli

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung nutzt beispielhafte Ergebnisse einer Erhebung und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichend die Ergebnisse ab.

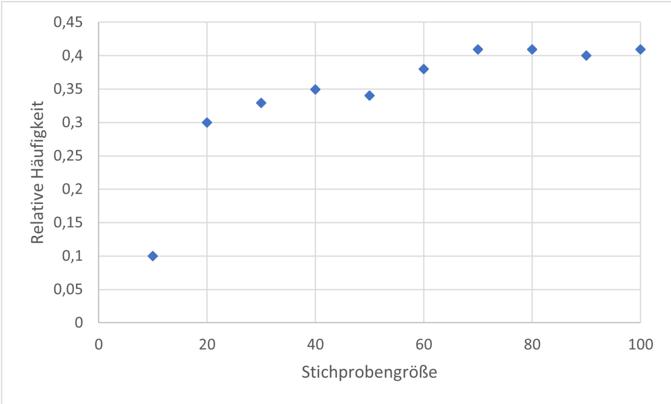
A1

Abschnitt	Anzahl Fahrradfahrer*innen	Anzahl Fußgänger*innen
1	1	9
2	5	5
3	4	6
4	4	6
5	3	7
6	6	4
7	6	4
8	4	6
9	3	7
10	5	5

A2 Die Tabelle mit den Häufigkeiten bis zur Stichprobe n = 100 ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

n = Stichprobe	$H(n)$	$h(n)$
10	1	0,10
20	6	0,30
30	10	0,33
40	14	0,35
50	17	0,34
60	23	0,38
70	29	0,41
80	33	0,41
90	36	0,40
100	41	0,41

A3 Dem folgenden Streudiagramm ist zu entnehmen, dass die Schwankungen zu Beginn noch groß sind und zum Ende dann kleiner werden. Der Wert der relativen Häufigkeiten nähert sich also einem Durchschnittswert an.



B1 Damit ein Zufallsexperiment vorliegt, müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- Der Versuch muss in gleicher Weise beliebig oft wiederholbar sein.
- Es muss mindestens zwei verschiedene Versuchsausgänge geben.
- Die möglichen Ergebnisse müssen bekannt sein.

Wenn wir vernachlässigen, dass die Versuchsbedingungen möglicherweise nicht zu jeder Uhrzeit und zu jedem Tag exakt gleich sind, sind die genannten Bedingungen erfüllt. Es ist jederzeit möglich, Personen zu beobachten und es gibt zwei bekannte Versuchsausgänge. Zudem liegt hier ein einfaches Zufallsexperiment vor, da nach der Beobachtung direkt ein Ergebnis vorliegt. Es kann hier noch angeführt werden, unter welchen Bedingungen kein Zufallsversuch vorliegt. Zum Beispiel ist das der Fall, wenn man die Beobachtung auf einem Fahrradweg durchführt. Hier sollte es im Normalfall nur Radfahrer geben und die Bedingung, dass es mindestens zwei Ausgänge geben muss, wäre verletzt.

B2 Anhand der Messdaten können folgende Wahrscheinlichkeiten geschätzt werden:

$$\mathbb{P}(F=1)=0,4 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(F=0)=1-0,4=0,6$$

C1 Wird ein Bernoulli-Experiment mit den beiden sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen *A* und $\bar{A}$ *n*-mal nacheinander ausgeführt und gibt die Zufallsgröße *X* die Anzahl der Versuche an, in denen das Ereignis *A* eintritt, so ist die Zufallsgröße *X* binomialverteilt.
Bei der Diskussion um die Frage, ob bei dem beschriebenen Experiment eine binomialverteilte Zufallsvariable vorliegt, gilt es die Unabhängigkeit der einzelnen Realisationen zu berücksichtigen. Wenn beispielsweise eine Familie mit 4 Fahrrädern vorbeikommt, sind die Realisationen nicht unabhängig voneinander, sodass die Zufallsgröße *X* nicht binomialverteilt sein kann.

C2 Es gilt $n = 100$, da in unserem Experiment 100 Personen beobachtet wurden. Die Erfolgswahrscheinlichkeit p wurde bereits in Teilaufgabe **B2** bestimmt: $p = 0,4$.

C3 Der Erwartungswert, die Standardabweichung und die Varianz lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} E[X] &= n \cdot p = 100 \cdot 0,4 = 40 \\ Var[X] &= n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 24 \\ sd[X] &= \sqrt{Var[X]} = \sqrt{24} \approx 5 \end{aligned}$$

Für das Beispiel hier müssen die Zahlen auf ganze Stellen gerundet werden, da wir hier eine diskrete Zufallsvariable vorliegen haben und wir nur Anzahlen betrachten können. Der Erwartungswert beziffert hier die erwartete Anzahl der Fahrräder, wenn man 100 Personen beobachtet. Die Varianz wird auch als mittlere quadratische Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert definiert. Die Standardabweichung gibt an, wie weit die Messwerte im Mittel vom Erwartungswert entfernt sind.

C4 Wie wahrscheinlich ist es, dass genau die Hälfte (*n*=50) Personen mit dem Fahrrad fahren?

$$\mathbb{P}(X=50)=\binom{100}{50}\cdot 0,4^{50}\cdot(1-0,4)^{100\text{-}50}=\binom{100}{50}\cdot 0,4^{50}\cdot 0,6^{50}\approx 0,01$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt bei etwa einem Prozent.

Wie wahrscheinlich ist es, dass zwischen 40 und 60 Personen mit dem Fahrrad fahren?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(40\leq X\leq 60)&=\mathbb{P}(X\leq 60)-\mathbb{P}(X\leq 39)\\&=\sum_{i=0}^{60}\binom{100}{i}\cdot 0,4^{\text{i}}\cdot(1-0,4)^{100\text{-i}}-\sum_{i=0}^{39}\binom{100}{i}\cdot 0,4^{\text{i}}\cdot(1-0,4)^{100\text{-i}}\\&\approx 0,99-0,46=0,53\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt bei etwa 53 Prozent.

Wie wahrscheinlich ist es, dass weniger als ein Drittel der Personen mit dem Fahrrad fahren?

$$\mathbb{P}(X<33)=\mathbb{P}(X\leq 32)=\sum_{i=0}^{32}\binom{100}{i}\cdot 0,4^{\text{i}}\cdot(1-0,4)^{100\text{-i}}\approx 0,06$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt bei etwa 6 Prozent.

C5 Unterschiedliche Lösungen sind möglich. Untersucht werden können beispielsweise Eigenschaften wie das Tragen von Fahrradhelmen oder das Heraushalten der Hand beim Abbiegen.

Didaktischer Kommentar

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einem Zufallsversuch und mit der Binomialverteilung. In der Regel wird diese Thematik in der Sekundarstufe 2 behandelt. Es werden zunächst Daten gesammelt und ausgewertet, mit denen dann entschieden werden kann, ob die Voraussetzungen für einen Zufallsversuch erfüllt sind. Im weiteren Verlauf der Aufgabe werden die Binomialverteilung und deren Kennwerte betrachtet. Die Vorkenntnisse dafür sollten vorab im Unterricht behandelt worden sein. Die Aufgabe kann dementsprechend gut zum Ende der Behandlung der Binomialverteilung bearbeitet werden, um zu überprüfen, ob alle Schülerinnen und Schüler den Stoff so weit gut verstanden haben und die berechneten Werte auch interpretieren können.

In dieser Aufgabe werden die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X=k)$ und die kumulierten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X\leq k)$ mithilfe des Taschenrechners bestimmt. Es macht Sinn, solche Wahrscheinlichkeiten im Unterricht für kleine Werte von n und k händisch auszurechnen, um die Formel für die Binomialverteilung zu verinnerlichen und die Berechnung durch den Taschenrechner nicht als “Black-Box” zu verstehen.