# Hier gehts hoch hinaus

## Exponentielles Wachstum

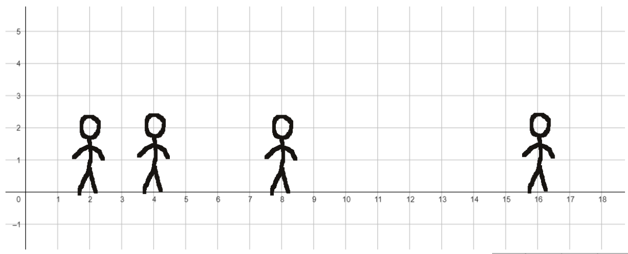
## Lösungsvorschlag

*Hinweis: Diese Lösung wurde auf dem neuen Universitätscampus Bonn Poppelsdorf erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.*

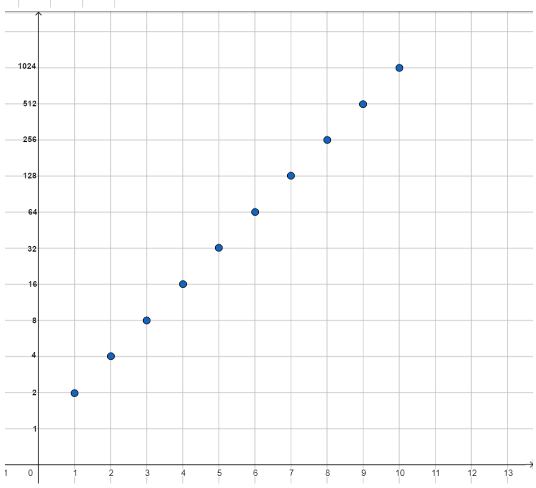
**A1** Die vervollständigte Tabelle sieht wie folgt aus:

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^k$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

**A2** Folgendes Bild kann die Ergebnisse aus Teilaufgabe **A1** visualisieren:



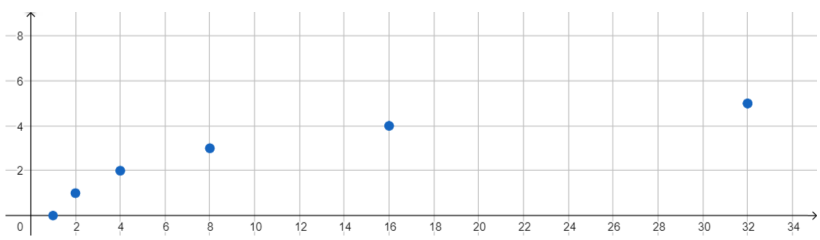
**A3** Es ist schwierig, die Punkte in ein Koordinatensystem einzuzeichnen, da die Abstände schnell sehr groß werden. Wir können die Markierungen auf der $y$-Achse näher zusammenbringen, indem wir die Abstände auf der $y$-Achse entsprechend wählen. Wir können zum Beispiel die Werte auf der $y$-Achse in jedem Schritt verdoppeln. Eine mögliche Skalierung des Koordinatensystemes sieht wie folgt aus:



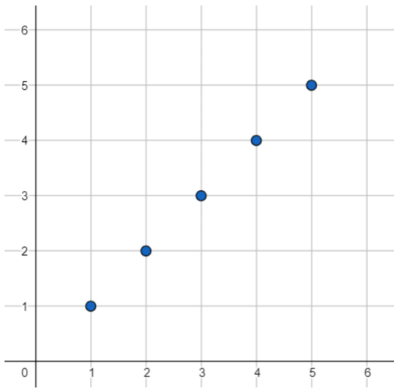
**A4** Wir vervollständigen die Wertetabelle für $\log_2(x)$:

| x | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_2(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Das entsprechende Koordinatensystem kann wie folgt aussehen:



**A5** Wir berechnen für $k = 1$ bis $k = 8$ jeweils $\log_2(2^k)$ und tragen die jeweiligen Werte in ein Koordinatensystem ein.




**A6** Es fällt auf, dass für jedes $k$ das Ergebnis wieder $k$ selbst ist und alle unsere Punkte auf einer Geraden liegen. Es fällt außerdem auf, dass wir ein Ergebnis erhalten, welches sehr ähnlich zu dem aus Teilaufgabe **A3** ist. Der Logarithmus kehrt die Werte der Exponentialfunktion also um. Wenden wir erst die Exponentialfunktion und danach die passende Logarithmusfunktion an, dann erhalten wir die Identitätsabbildung. Außerdem eignet sich eine logarithmische Achseneinteilung im Koordinatensystem gut, um schnell größer werdende Werte darzustellen.

**B1** Der Umfang $U$ der Erde lässt sich mit der Formel $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ bestimmen, wenn der Erdradius $r$ bekannt ist. Es folgt:

$$U = 2 \cdot \pi \cdot 6.378{,}137 \text{ km} \approx 40.075{,}0167 \text{ km}$$

Der Umfang der Erde beträgt demnach ungefähr $40.075{,}0167$ Kilometer.

**B2** Ein Stein hat eine Länge von 30 Zentimetern.

$$30 \text{ cm} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}0003 \text{ km}$$

Teilt man den Erdumfang durch die Länge eines Steines, erhält man:

$$40.075{,}0167 \text{ km} \div 0{,}0003 \text{ km} = 133.583.389$$

Setzen wir die Tabelle aus Teilaufgabe **A1** fort sehen wir, dass $2^{26} = 67.108.864$ der letzte Wert von $2^k$ ist, der noch unter $133.583.389$ ist. Bei 30 Zentimeter langen Steinen benötigt man also 26 Personen, um auf diese Weise die Erde zu umrunden, ohne eine zweite Umrundung der Erde zu beginnen.

**B3** Um den genauen Wert für $k$ anzugeben muss $\log_2(133.583.389)$ berechnet werden.

$$\log_2(133.583.000) \approx 26{,}9932$$

Mit $2^{26{,}9932}$ Steinen würde man also die Erde fast genau umrunden.

**B4** Für eine Klasse mit 31 Schülerinnen und Schülern ergeben sich folgende Rechnungen:

$$2^{31} = 2.147.483.648$$
$$2.147.483.648 \cdot 0{,}0003 \text{ km} \approx 644.245{,}0944 \text{ km}$$
$$644.245{,}0944 \text{ km} \div 40.075{,}0167 \text{ km} \approx 16{,}08$$

Die Steinlinie müsste also circa 644.245 Kilometer lang sein, was in etwa 16 Erdumrundungen entspricht.

**C1** Die Anzahl der Stufen unserer Treppe ergibt sich aus der Entfernung zum Mond geteilt durch die Höhe der Stufen, wir rechnen also:

$$385.000 \text{ km} \div 0{,}0003 \text{ km} \approx 1.283.333.333{,}34$$

Die nötige Personenanzahl nach unserem Muster ergibt sich dann als:

$$\log_2(1.283.333.333{,}34) \approx 30{,}26$$

Die einunddreißigste Person wäre demnach die erste auf dem Mond.

**C2** Eine weitere klassische Demonstration für das schnelle Wachstum von Exponentialfunktionen ist die Visualisierung mithilfe eines Schachbretts und Reiskörnern. Dabei soll auf das erste Feld des Schachbretts ein Reiskorn gelegt werden und die Anzahl an Reiskörnern auf jedem folgenden Feld verdoppelt werden. Hierbei steigt die Anzahl der benötigten Reiskörner quasi ins Unermessliche.

**D1** An dieser Stelle kann diskutiert werden, inwiefern der Wunsch nach Reis wertvoll ist. Schülerinnen und Schüler, die die Reiskornlegende bereits kennen oder die Reismenge für die ersten paar Schachfelder ausgerechnet haben, werden schnell feststellen, wie groß die Menge an Reis wird, die Budiram am Ende bekommt.

**D2** Die folgende Tabelle gibt die Reismenge für die ersten 10 Felder an:

| Feld | Anzahl Reiskörner |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 8 |
| 5 | 16 |
| 6 | 32 |
| 7 | 64 |
| 8 | 128 |
| 9 | 256 |
| 10 | 512 |

**D3** Die Anzahl der Reiskörner verdoppelt sich von Feld zu Feld. Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt mit folgender Exponentialfunktion beschreiben: $f(x) = 2^{x-1}$

**D4** Auf dem 64. Feld würden $2^{64-1} \approx 9,223 \cdot 10^{18}$ Reiskörner liegen.

**D5** Die gesamte Reismenge lässt sich mithilfe der geometrischen Summenformel berechnen:

$$\sum_{k=1}^{64} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{63} 2^k = \frac{1-2^{63+1}}{1-2} \approx 1,84 \cdot 10^{19}$$

Insgesamt bekäme Budiram also $1,84 \cdot 10^{19}$ Reiskörner. Was für eine unvorstellbar große Zahl!

**D6** 650 000 000 Tonnen Reis = $6,50 \cdot 10^8$ Tonnen Reis = $6,50 \cdot 10^{11}$ Kilogramm Reis.
Da ein Kilogramm Reis aus circa 33.333 Körnern Reis besteht, wurden im Jahr 2007 etwa $2,17 \cdot 10^{16}$ Körner Reis produziert (denn: $33333 \cdot 6,50 \cdot 10^{11} \approx 2,17 \cdot 10^{16}$).
Teilt man nun die Anzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett ($1,8 \cdot 10^{19}$) durch die Anzahl der Körner der Weltproduktion pro Jahr ($2,17 \cdot 10^{16}$) erhält man die Anzahl an Jahren, die benötigt werden, um die Reismenge auszuliefern:

$$\frac{1,8 \cdot 10^{19}}{2,17 \cdot 10^{16}} \approx 829,49$$

Es würde also circa 829 Jahre dauern, um die gewünschte Reismenge auszuliefern, wenn der König über den weltweit produzierten Reis bestimmten dürfte.

**D7**

| k | $2^k$ | $0,5^k$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0,5 |
| 2 | 4 | 0,25 |
| 3 | 8 | 0,125 |
| 4 | 16 | 0,0625 |
| 5 | 32 | 0,03125 |
| 6 | 64 | 0,015625 |
| 7 | 128 | 0,0078125 |
| 8 | 256 | 0,00390625 |
| 9 | 512 | 0,001953125 |
| 10 | 1024 | 0,0009765625 |

Während sich die Zahlen in der zweiten Spalte von Schritt zu Schritt verdoppeln, halbieren sich die Zahlen in der dritten Spalte mit jedem Schritt. Mit $2^k$ wird exponentielles Wachstum und mit $0,5$ exponentieller Zerfall dargestellt.

## Didaktischer Kommentar

Dieser mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 und behandelt das Thema Exponential- und Logarithmusfunktionen. Die Aufgaben dienen dazu, ein grundlegendes Verständnis und Gefühl für exponentielles Wachstum und Zerfall zu entwickeln, welches dann im anschließenden Unterricht vertieft werden kann.

Grundlagen aus diesem Themenbereich sollten vor dem Mathematischen Spaziergang bereits behandelt worden sein.
Alle drei Aufgabenteile dienen zur Visualisierung des exponentiellen Wachstums. Die Schülerinnen und Schüler sollen vor Ort und mithilfe von Gedankenexperimenten erfahren, was es heißt, dass etwas exponentiell wächst. Mit Aufgabenteil **A** sollen sie zusätzlich ein Verständnis des Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion entwickeln.

Insgesamt wurde für diesen Spaziergang eine Zeit von etwa 120 Minuten angesetzt. Da Aufgabenteil **D** jedoch etwas mehr Zeit in Anspruch nehmen kann, kann dieser Aufgabenteil als Zusatzteil behandelt werden.