

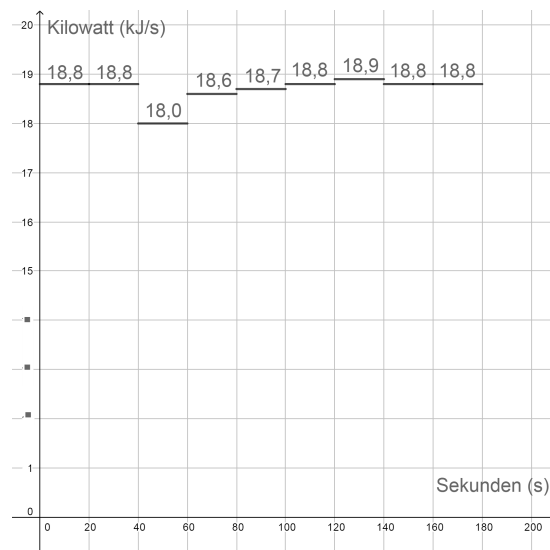
# Energie und Geschwindigkeit in den Alltag integriert

## Integralrechnung an Treppenfunktionen

### Lösungsvorschlag

*Hinweis: Dieser Lösungsteil wurde an der Anzeigetafel an der Kennedybrücke in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab. Die Angaben der Anzeigetafel stammen vom 02.05.2019.*

**A1** Folgende Abbildung stellt die Leistung in einem Zeitraum von drei Minuten dar:



**A2** Rechnung:

$$\begin{aligned}
 & 20s \cdot (18,8 + 18,8 + 18,0 + 18,6 + 18,7 + 18,8 + 18,9 + 18,8 + 18,8) \frac{\text{kJ}}{\text{s}} \\
 &= 20 \cdot (18,8 + 18,8 + 18,0 + 18,6 + 18,7 + 18,8 + 18,9 + 18,8 + 18,8) \text{ kJ} \\
 &= 20 \cdot 168,2 \text{ kJ} = \frac{20 \cdot 168,2}{3600} \text{ kWh} \approx 0,93 \text{ kWh}
 \end{aligned}$$

In den beobachteten drei Minuten wurde eine Energie von circa 0,93 Kilowattstunden produziert.

**A3** In dieser Beispiellösung wurden die Flächeninhalte der einzelnen Säulen aus der Grafik in Teilaufgabe **A1** addiert. Dazu wurden zunächst alle Höhen (in  $\frac{\text{kJ}}{\text{s}}$ ) addiert und dann mit 20s multipliziert. Man hätte auch zunächst Säulen derselben Höhe zusammenfassen können und dann die breiteren Rechteckflächen addieren können. Wichtig ist, dass die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der  $x$ -Achse die produzierte Energie in dem entsprechenden Zeitraum darstellt, denn der Flächeninhalt entspricht der Zeit mal der Leistung.

*Hinweis: Dieser Lösungsteil wurde an der Geschwindigkeitsanzeiganlage an einem Städt. Kindergarten in Bonn Lessenich-Messdorf erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab. Die Angaben der Anzeigetafel stammen vom 03.10.2022.*

**B1** Die angezeigten Geschwindigkeiten sind im Folgenden aufgezählt:

$$a_1 = 31 \text{ km/h}, a_2 = 32 \text{ km/h}, a_3 = 35 \text{ km/h}, a_4 = 29 \text{ km/h}, a_5 = 26 \text{ km/h},$$

$$a_6 = 29 \text{ km/h}, a_7 = 23 \text{ km/h}, a_8 = 27 \text{ km/h}, a_9 = 26 \text{ km/h}, a_{10} = 28 \text{ km/h}$$

**B2**

$$w_1 = 31 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{31}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,13\bar{7} \text{ km} \approx 138 \text{ m},$$

$$w_2 = 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{32}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,14\bar{2} \text{ km} \approx 142 \text{ m},$$

$$w_3 = 35 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{35}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,1\bar{5} \text{ km} \approx 156 \text{ m},$$

$$w_4 = 29 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{29}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,12\bar{8} \text{ km} \approx 129 \text{ m},$$

$$w_5 = 26 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{26}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,11\bar{5} \text{ km} \approx 116 \text{ m},$$

$$w_6 = 29 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{29}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,12\bar{8} \text{ km} \approx 129 \text{ m},$$

$$w_7 = 23 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{23}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,10\bar{2} \text{ km} \approx 102 \text{ m},$$

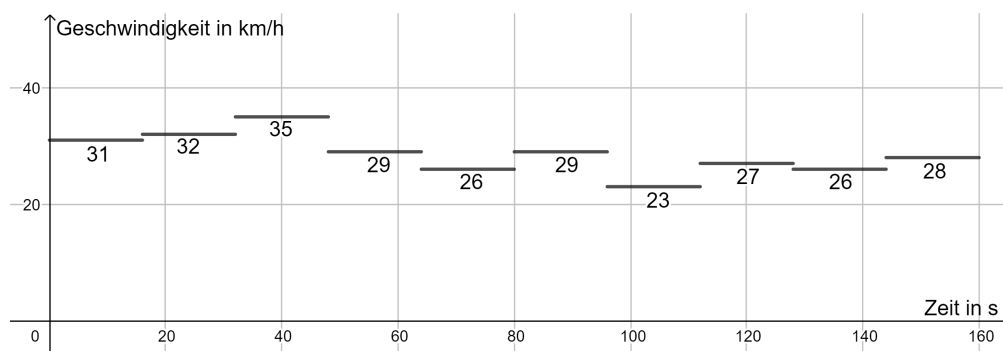
$$w_8 = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{27}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,12 \text{ km} = 120 \text{ m},$$

$$w_9 = 26 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{26}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,11\bar{5} \text{ km} \approx 116 \text{ m},$$

$$w_{10} = 28 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} = \frac{28}{3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 0,12\bar{4} \text{ km} \approx 124 \text{ m}$$

Die Hälfte der jeweiligen Strecke kann dann jeweils vor und nach der Anzeigetafel am Boden markiert werden.

**B3** Folgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeiten der verschiedenen Autos nebeneinander:



Durch die Integration dieser Treppenfunktion kann der Gesamtweg aller Autos berechnet werden:

$$\begin{aligned} w_{\text{gesamt}} &= 31 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} + 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} + 35 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} + 29 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} + 26 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} \\ &+ 29 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} + 23 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} + 27 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} + 26 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} + 28 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 16 \text{ s} \\ &= 0,137 \text{ km} + 0,142 \text{ km} + 0,15 \text{ km} + 0,128 \text{ km} + 0,115 \text{ km} + 0,128 \text{ km} \\ &+ 0,102 \text{ km} + 0,12 \text{ km} + 0,115 \text{ km} + 0,124 \text{ km} = 1,271 \text{ km} \end{aligned}$$

## Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 und behandelt das Thema der Integration einer Treppenfunktion. Dazu muss im Unterricht noch keine weitreichende Einführung in die Integralrechnung erfolgt sein. Die Aufgabe arbeitet auf ein Grundverständnis des Integralbegriffs hin und ist somit sowohl für den Leistungskurs als auch den Grundkurs geeignet.

Die beiden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar, sodass sie auch einzeln bearbeitet werden können, wenn beispielsweise die Solaranlage und die Geschwindigkeitsanzeige nicht an einem Lernort zu finden sind.

Der Informationstext dient dazu, dass sich die Schülerinnen und Schüler zunächst mit dem Kontext der Solarenergie und den verschiedenen Einheiten vertraut machen. Die Lehrkraft sollte an dieser Stelle für eventuelle Nachfragen bezüglich der Einheiten Kilowatt und Kilowattstunde bereitstehen. In Teilaufgabe **A1** sollen die Schülerinnen und Schüler alle wichtigen Informationen erfassen und dann den passenden Graphen zeichnen. Neben der Wiederholung und der Festigung des Verständnisses des Zusammenhangs von momentaner Änderungsrate und Gesamtänderung dient Teilaufgabe **A2** als Einstiegsaufgabe zur Berechnung von Flächeninhalten mittels Rechteckflächen. Verschiedene Möglichkeiten der Herangehensweise sollen dann in Teilaufgabe **A3** diskutiert werden. In Aufgabenteil **B** soll ein ähnliches Verfahren an einem zweiten Lernort wiederholt werden. Aus der Geschwindigkeit in einer festgelegten Zeitspanne sollen die Schülerinnen und Schüler den zurückgelegten Weg der Autos ermitteln. Dafür wird modellhaft eine konstante Geschwindigkeit für 16 Sekunden angenommen.