Eiskalt kombiniert

Kombinatorische Abzählverfahren

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung beruht auf rein fiktiven Werten und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Es gibt 25 verschiedene Sorten Eis. Daher stehen für die Auswahl der ersten Kugel 25 Möglichkeiten zur Verfügung. Nun sollen die ausgewählten Sorten verschieden sein. Daher gibt es für die zweite Kugel 24 Möglichkeiten und für die dritte Kugel schließlich noch 23 Möglichkeiten, um diese auszuwählen. Werden diese Werte nun miteinander multipliziert, gibt es also $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13.800$ Möglichkeiten, drei verschiedene Sorten in einer bestimmten Reihenfolge auszuwählen.

A2 Darf nun noch eine weitere von den anderen verschiedene Sorte ausgewählt werden, gibt es für diese vierte Kugel 22 Möglichkeiten. Wird dies mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe **A1** multipliziert, gibt es also $13.800 \cdot 22 = 303.600$ Möglichkeiten, vier verschiedene Sorten in einer bestimmten Reihenfolge auszuwählen.

A3 Wenn nun Sorten mehrfach ausgewählt werden dürfen, stehen für jede Kugel immer wieder 25 Möglichkeiten zur Verfügung. Daraus ergeben sich $25^3 = 15.625$ Möglichkeiten, drei beliebige Kugeln in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen.

A4 Es gibt 15.625 Möglichkeiten, drei Eissorten in einer bestimmten Reihenfolge mit Zurücklegen auszuwählen. Es gibt aber nur 13.800 Möglichkeiten, drei Eissorten in einer bestimmten Reihenfolge auszuwählen, wenn diese nicht mehrfach ausgewählt werden dürfen (ohne Zurücklegen). Der Unterschied zwischen beiden Fällen liegt also bei $15.625 - 13.800 = 1.825$ Möglichkeiten. Der Unterschied kommt dadurch zustande, dass beim dem Fall ohne Mehrfachauswahl der gleichen Kugel für die nächsten Kugeln weniger Auswahlmöglichkeiten übrig bleiben.

A5 Dürften nun nur 2 Kugeln ausgewählt werden, gäbe es $25^2 = 625$ Möglichkeiten.

B1 Es gibt 12 Fruchteissorten.

B2 Analog zu Teilaufgabe **A1** stehen für die erste Kugel 12 Sorten zur Verfügung, für die zweite Kugel 11, für die dritte Kugel 10 und für die vierte Kugel 9. Daraus ergeben sich dann $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11.880$ Möglichkeiten.

B3 Es werden die Sorten Mango (M), Erdbeere (E), Himbeere (H) und Kiwi (K) ausgewählt. Die folgenden Kombinationen sind möglich:

M	E	H	K	E	M	H	K	K	E	H	M	H	E	M	K
M	E	K	H	E	M	K	H	K	E	M	H	H	E	K	M
M	K	E	H	E	K	M	H	K	M	E	H	H	K	E	M
M	K	H	E	E	K	H	M	K	M	H	E	H	K	M	E
M	H	E	K	E	H	M	K	K	H	E	M	H	M	E	K
M	H	K	E	E	H	K	M	K	H	M	E	H	M	K	E

Um den Überblick zu behalten, ist es sinnvoll, sich eine bestimmte Struktur zu überlegen. Dazu kann eine „Anfangsfrucht“ gewählt werden, die zunächst immer identisch bleibt. Anschließend wird die zweite Frucht ausgewählt, die auch erst einmal so lange ihren Platz behält, bis alle Anordnungsmöglichkeiten der zwei letzten Sorten aufgelistet wurden. Ist dies geschehen, wird aus den letzten beiden Sorten eine neue zweite Sorte gewählt. Die erste Sorte bleibt weiterhin gleich. Wurden alle Möglichkeiten notiert, bei der die erste Kugel gleich bleibt, lässt sich schon die Gesamtanzahl an Möglichkeiten durch Multiplikation mit 4 berechnen. Es ergeben sich insgesamt 24 Möglichkeiten.

B4 Es sollen 4 verschiedene Sorten in eine Reihenfolge gebracht werden. Analog zu Teilaufgabe **A1** gibt es für die Auswahl der ersten Sorte 4 Möglichkeiten, für die zweite Sorte 3, für die dritte Sorte 2 und für die letzte Sorte nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt gibt es also $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ Möglichkeiten.

B5 Wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt, gibt es nach Teilaufgabe **B2** 11.880 Möglichkeiten vier verschiedene Fruchteissorten auszuwählen. Es gibt nach Teilaufgabe **B3** und Teilaufgabe **B4** 24 Möglichkeiten, die Kugeln anzuordnen. Dann gibt es $\frac{11.880}{24} = 495$ Möglichkeiten, die vier Kugeln ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen auszuwählen.

B6 Es ist $n = 12$, da es insgesamt 12 Fruchteissorten zur Auswahl gibt. Es ist $k = 4$, da vier Fruchteissorten ausgewählt werden sollen. Um zu berechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, vier verschiedene Fruchteissorten aus 12 auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt, ergibt sich mit dem Binomialkoeffizienten:

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \cdot (12-4)!} = \frac{479.001.600}{24 \cdot 40.320} = 495$$

Übrigens haben wir hier zwar einmal Zähler und Nenner getrennt ausgerechnet, um die Anwendung des Binomialkoeffizienten aufzuzeigen. Wenn ihr aber $\binom{12}{4}$ ausrechnen wollt, ist das praktisch gar nicht nötig. Ihr könnt zuerst kürzen und stellt fest, dass $\frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$. Daraus folgt

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 11 \cdot 9 \cdot 5 = 495$$

So klappt das sogar ohne Taschenrechner!

C1 Joghurt, Vanille und Stracciatella werden als beliebte Eissorten ausgewählt, während Malaga, Pfefferminz und Waldmeister die weniger beliebten Sorten sind.

C2 Es gibt 25 Eissorten, von denen 3 Sorten nicht ausgewählt werden sollen. Damit gibt es also $22^4 = 234.256$ Möglichkeiten. Es liegt der Fall „Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge“ vor.

C3 Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Möglichkeiten. Es liegt der Fall „Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge“ vor.

C4 Die drei beliebten Sorten sind Joghurt (J), Vanille (V) und Straciatella (S). Es sollen zwei aus drei Sorten ausgewählt werden, wobei die Reihenfolge egal ist und jede Sorte mehrfach ausgewählt werden darf (mit Zurücklegen). Folgende Variationsmöglichkeiten stehen zur Wahl:

J & J   J & V   J & S   V & V   V & S   S & S

Beim Aufschreiben wurde so vorgegangen, dass zuerst eine Sorte fest ausgewählt wurde und anschließend mit den anderen Sorten ergänzt wurde. Doppelte Kombinationen wurden herausgestrichen. Es gibt also insgesamt 6 Möglichkeiten, zwei aus drei Sorten auszuwählen.
Mit folgender Formel kann der Fall: „Ziehen mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge" berechnet werden:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Dabei ist n die Anzahl der Kugeln, aus denen ausgewählt werden kann und k die Anzahl der Kugeln, die ausgewählt werden sollen. Hier im Beispiel ergibt sich somit:

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

C5 Es liegt der Fall „Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge" vor.
Die Vorgabe *mindestens zwei der drei beliebten Sorten* besagt, dass zwei oder alle drei beliebten Sorten dabei sein sollen.
Wir berechnen zunächst, wie viele Möglichkeiten es gibt, genau zwei der drei beliebten Sorten dabei zu haben.
Anzahl der Möglichkeiten, 2 der beliebten Sorten auszuwählen: $\binom{3}{2} = 3$
Anzahl der Möglichkeiten, 2 der anderen Sorten auszuwählen: $\binom{22}{2} = 231$
Anzahl der Möglichkeiten, 4 Sorten auszuwählen, darunter 2 der beliebten: $3 \cdot 231 = 693$

Wir berechnen nun, wie viele Möglichkeiten es gibt, bei denen alle drei beliebten Sorten dabei sind.
Anzahl der Möglichkeiten, die 3 beliebten Sorten auszuwählen: $\binom{3}{3} = 1$
Anzahl der Möglichkeiten, eine weitere Sorte auszuwählen: $\binom{22}{1} = 22$
Anzahl der Möglichkeiten, 4 Sorten auszuwählen, darunter alle drei beliebten Sorten: $1 \cdot 22 = 22$

Es gibt also $693 + 22 = 715$ Möglichkeiten, 4 Sorten auszuwählen, wobei mindestens zwei der beliebten Sorten darunter sind.

Didaktischer Kommentar

Dieser Mathematische Spaziergang kann im Rahmen des Unterrichtsthemas *Kombinatorik* in der Sekundarstufe 2 durchgeführt werden. Er eignet sich vor allem für den Leistungskurs, kann aber auch mit einem starken Grundkurs bearbeitet werden. In diesem Fall können die schwierigeren Teilaufgaben zum Knobeln angeboten werden.
Bevor der Spaziergang durchgeführt wird, sollten die kombinatorischen Fälle „Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge" und „Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge" bereits im Unterricht thematisiert worden sein, da die Aufgaben an diesen Kenntnisstand anknüpfen. Es ist jedoch nicht erforderlich, dass die Schülerinnen und Schüler schon sicher in dem Thema sind. Die einzelnen Teilaufgaben sollen vielmehr dabei helfen, die im Unterricht gelernten Formeln nachzuvollziehen, zu vertiefen und anzuwenden.

Die Teilaufgabe **A1** soll den Schülerinnen und Schülern zunächst helfen, sich mit dem Lernort vertraut zu machen, und wichtige Daten für die darauffolgenden Teilaufgaben zu sammeln. Außerdem soll diese Teilaufgabe, zusammen mit den Teilaufgaben **A2** bis **A5**, den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit bieten, die Herleitung der im Unterricht gelernten Formeln noch

einmal anhand relativ kleiner Zahlen nachzuvollziehen.
In den Teilaufgaben **B1** bis **B6** wird die Formel für den Fall „Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge" schrittweise hergeleitet, wobei vor allem die Teilaufgabe **B3** den Schülerinnen und Schülern noch einmal vor Augen führen soll, wie sich die Formel für die Anzahl der Permutationen herleiten lässt. Durch ein strukturiertes Verfahren und die Anwendung der Ideen aus dem Unterricht lässt sich die Teilaufgabe schnell lösen und die Schreibarbeit verkürzen. Die letzte Teilaufgabe aus diesem Aufgabenteil (**B5**) weist einen hohen Schwierigkeitsgrad auf und sollte daher als Angebot zum Knobeln benutzt werden.
In Teilaufgabe **C4** wird der Fall „Ziehen mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge" behandelt. Dieser wird in der Schule oftmals beiseite gelassen, kann aber an dieser Stelle an einem leichten Beispiel nachvollzogen werden.
Durchgeführt wird dieser Mathematische Spaziergang an einer Eisdiele. Am besten eignet sich eine Eisdiele, die über eine Außentheke verfügt und für die Schülerinnen und Schüler ausreichend viel Platz vor der Theke bietet. Zudem ist es praktisch, wenn in der Nähe der Eisdiele ein paar Bänke bereitstehen, damit die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben in Ruhe lösen können. Neben Schreibmaterial werden ansonsten lediglich ein Taschenrechner und gegebenenfalls ein bisschen Geld für eine Kugel Eis benötigt.