Ganz schön komplex

Komplexe Zahlen auf dem Schachbrett

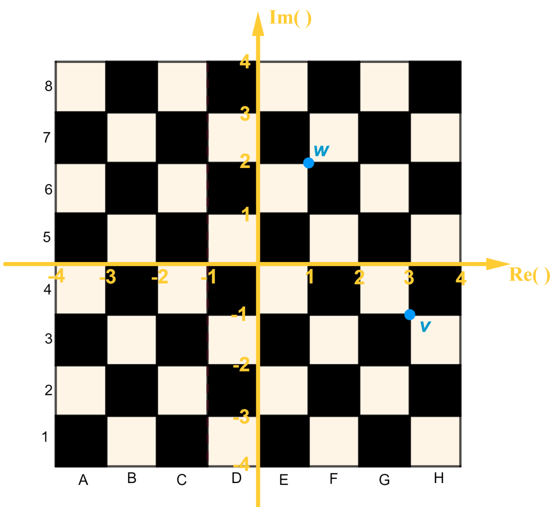
Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an einem Schachfeld auf dem Brüser Berg (Borsigallee, Bonn) erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Da die Zahlengerade bereits komplett mit den zuvor kennengelernten Zahlenmengen belegt ist, weichen wir von der eindimensionalen Gerade auf eine zweidimensionale Fläche aus. Diese wird durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben, in dem der Realteil auf der x-Achse und der Imaginärteil auf der y-Achse eingetragen wird.
Alternativ könnten auch Real- und Imaginärteil mit verschiedenen Farben auf einer Zahlengerade eingetragen werden. Zudem müssten, wenn zwei verschiedene Achsen verwendet werden, diese nicht orthogonal zueinander stehen. Beides eignet sich jedoch nicht im Kontext des Schachbrettes.

A2 Die Schnüre sollen wie abgebildet über das Schachbrett gespannt werden:

A3 Im Folgenden sei $v := 3 - i \cdot 1$ und $w := 1 + i \cdot 2$. In der folgenden Abbildung sind v und w auf dem Schachbrett dargestellt:



A4 Mit den in Teilaufgabe **A3** gewählten komplexen Zahlen ergeben sich folgende Lösungen:

$$v + w = (3 - i \cdot 1) + (1 + i \cdot 2) = 3 - i \cdot 1 + 1 + i \cdot 2 = 4 + i \cdot 1$$

$$v - w = (3 - i \cdot 1) - (1 + i \cdot 2) = 3 - i \cdot 1 - 1 - i \cdot 2 = 2 - i \cdot 3$$

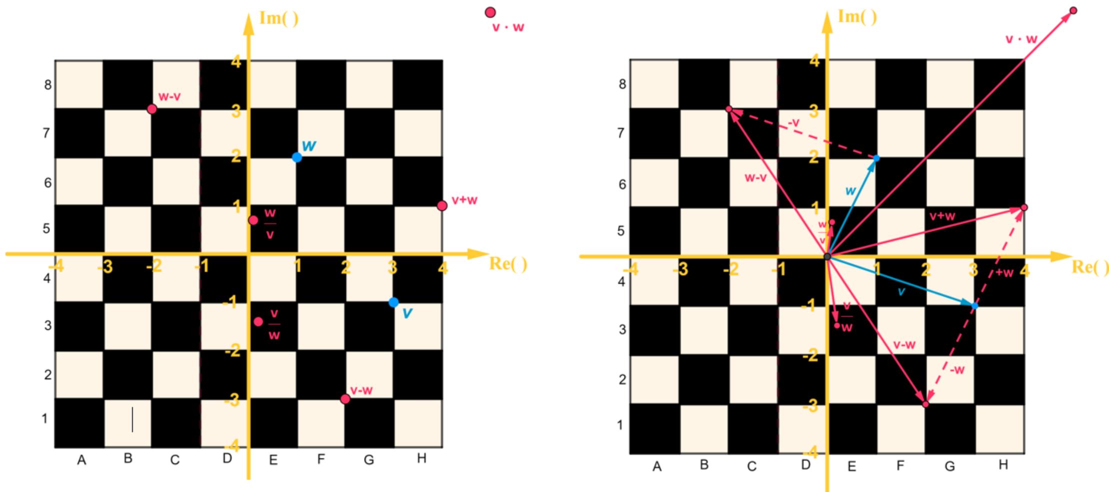
$$w - v = (1 + i \cdot 2) - (3 - i \cdot 1) = 1 + i \cdot 2 - 3 + i \cdot 1 = -2 + i \cdot 3$$

$$v \cdot w = (3 - i \cdot 1) \cdot (1 + i \cdot 2) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot i \cdot 2 - i \cdot 1 \cdot 1 - i^2 \cdot 2 \cdot 1 = 3 + 5 \cdot i + 2 = 5 + 5 \cdot i$$

$$\frac{v}{w} = \frac{3 - i \cdot 1}{1 + i \cdot 2} = \frac{(3 - i \cdot 1) \cdot (1 - i \cdot 2)}{(1 + i \cdot 2) \cdot (1 - i \cdot 2)} = \frac{3 - i \cdot 1 - 6 \cdot i + i^2 \cdot 2}{1 - i^2 \cdot 4} = \frac{1 - i \cdot 7}{5} = \frac{1}{5} - i \cdot \frac{7}{5}$$

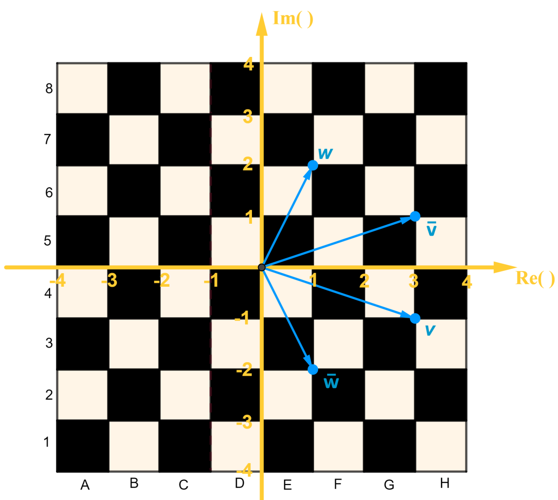
$$\frac{w}{v} = \frac{1 + i \cdot 2}{3 - i \cdot 1} = \frac{(1 + i \cdot 2)(3 + i \cdot 1)}{(3 - i \cdot 1)(3 + i \cdot 1)} = \frac{3 + i + i \cdot 6 + i^2 \cdot 2}{9 + 1} = \frac{3 - 2 + i \cdot 7}{10} = \frac{1}{10} + i \cdot \frac{7}{10}$$

A5 Die Darstellung der Ergebnisse aus Teilaufgabe **A4** ist in der folgenden Abbildung zu finden. Im linken Schachfeld ist die Positionen der Schüler:innen dargestellt, im rechten findet sich zusätzlich die mit Vektoren vergleichbare graphische Interpretation.



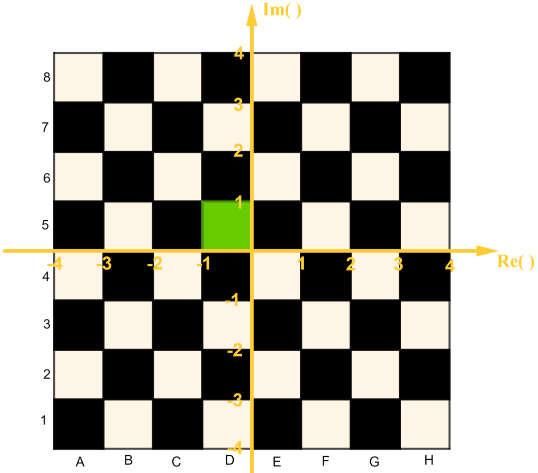
In $\mathbb{C}$ lässt sich teilweise (bei der Addition und bei der Subtraktion) wie mit Vektoren rechnen.

B1 In der grafischen Darstellung lässt sich die komplexe Konjugation einer Zahl als Spiegelung der Ausgangszahl an der reellen Achse verstehen (siehe Abbildung). Bei erneuter komplexer Konjugation erhält man die Ausgangszahl zurück.



B2 Die komplexen Zahlen $-\overline{v}$ und $-\overline{w}$ stellen die Spiegelungen von v bzw. w an der imaginären Achse dar.

C1 Hier sind verschiedene Lösungen möglich. Das Feld mit den Koordinaten (0,1) ist in der folgenden Abbildung grün gefärbt. Das Feld B2 hat die Koordinaten (-2,-2).



C2 In der folgenden Abbildung sind die Spielzüge graphisch dargestellt. Der Springer auf Position D4 kann folgende Positionen mit einem Spielzug erreichen, welche folgenden komplexen Zahlen zugeordnet werden können:

(1) Position F5 entspricht $z_1 = 2 + i \cdot 1$

(2) Position E6 entspricht $z_2 = 1 + i \cdot 2$

(3) Position C6 entspricht $z_3 = -1 + i \cdot 2$

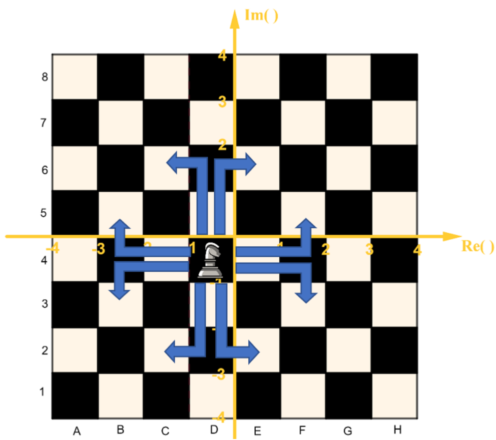
(4) Position B5 entspricht $z_4 = -2 + i \cdot 1$

(5) Position B3 entspricht $z_5 = -2 - i \cdot 1$

(6) Position C2 entspricht $z_6 = -1 - i \cdot 2$

(7) Position E2 entspricht $z_7 = 1 - i \cdot 2$

(8) Position F3 entspricht $z_8 = 2 - i \cdot 1$



C3 Alle acht komplexen Zahlen lassen sich aus zwei komplexen Zahlen durch ihre komplexe Konjugation und andere Vorzeichenwechsel darstellen. So seien $z_1 := 2 + i \cdot 1$ und $z_2 := 1 + i \cdot 2$ aus Aufgabenteil **C2** gegeben. Dann lassen sich daraus die übrigen komplexen Zahlen $z_3, \ldots, z_8$ wie folgt darstellen:

$$z_3 = -\overline{z_2};\ z_4 = -\overline{z_1};\ z_5 = z_1 \cdot (-1) = -z_2;\ z_6 = z_1 \cdot (-1) = -z_1;\ z_7 = \overline{z_2};\ z_8 = \overline{z_1}$$

Die komplexen Zahlen z_1 und z_2 gehen zudem durch eine Spiegelung an der Diagonalen Im$(z) =$ Re(z) mit $z \in \mathbb{C}$ auseinander hervor. Dies impliziert:

$$\text{Re}(z_1) = \text{Im}(z_2) \text{ und } \text{Re}(z_2) = \text{Im}(z_1).$$

C4 In Teilaufgabe **A3** wurden v und w wie folgt gewählt: $v := 3 - i \cdot 1$ und $w := 1 + i \cdot 2$. Der Betrag/die Länge eines Vektors lässt sich folgendermaßen berechnen:
Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$. Dann ist

$$|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Betrachten wir $\mathbb{C}$ analog zum $\mathbb{R}^2$, so lassen sich $|v|$ und $|w|$ wie folgt berechnen:

$$|v| = (3^2 + (-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (9+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

$$|w| = (1^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}} = (1+4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

Alternativ kann der Betrag einer komplexen Zahl auch über den Satz des Pythagoras hergeleitet werden.

D1 Die Gleichungen können folgendermaßen gelöst werden:

a) $x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\cdot(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ oder $x = 1$
Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-1 + i \cdot 0,\ 1 + i \cdot 0\}$. Dabei haben wir die dritte binomische Formel verwendet.

b) $x^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\cdot(x^2+x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ oder $\underbrace{x^2 + x + 1 = 0}_{\text{Lösen durch pq-Formel}}$

pq-Formel:
$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{i^2 \cdot \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{1 + i \cdot 0,\ -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Dabei haben wir verwendet, dass $i^2 = -1$ gilt.

c) $x^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1)\cdot(x^2-1) = 0$
Wir haben wieder die dritte binomische Formel verwendet. Wir betrachten zunächst den ersten Faktor:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = i \text{ oder } x = -i$$

Wir betrachten nun den zweiten Faktor:

$$(x^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ oder } x = -1$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{1 + i \cdot 0,\ -1 + i \cdot 0,\ 0 + i \cdot 1,\ 0 - i \cdot 1\}$.

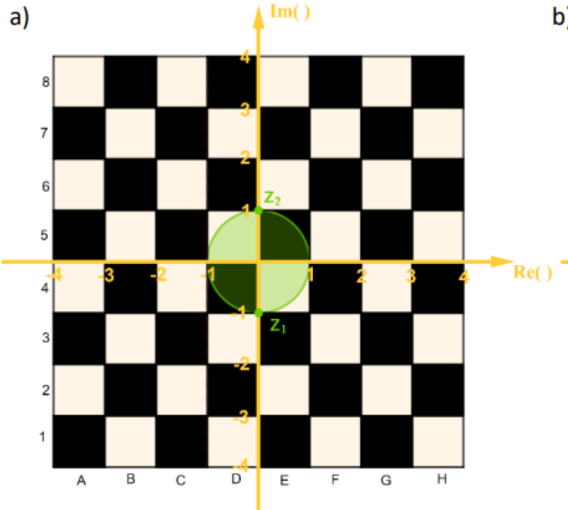
d) $x^6 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^3)^2 - 1 = 0 \underset{\text{3.bin. Formel}}{\Leftrightarrow} \underbrace{(x^3-1)}_{\text{b)}} \cdot \underbrace{(x^3+1)}_{(*)} = 0$

$(*)$: $x^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\cdot(x^2-x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ oder $\underbrace{x^2 - x + 1 = 0}_{\text{Lösen durch pq-Formel}}$

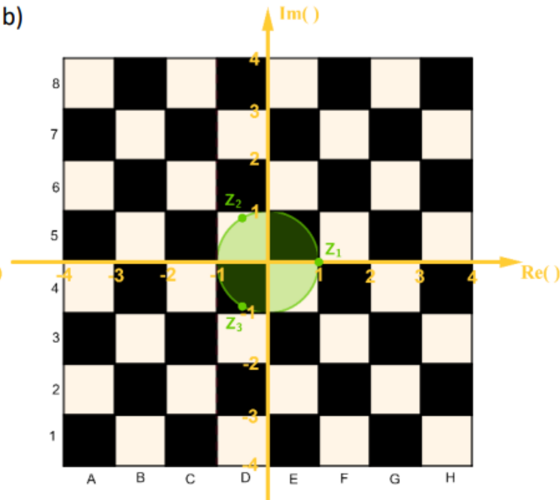
pq-Formel:
$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{i^2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{1 + i \cdot 0,\ -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ -1 + i \cdot 0,\ \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\}$
Dabei haben wir verwendet, dass $i^2 = -1$ gilt.

D2 Die komplexen Zahlen, die die Gleichungen aus Aufgabenteil **D1** lösen, haben alle den Betrag 1. Sie sind in der Abbildung graphisch dargestellt. Alle Lösungen liegen auf dem Einheitskreis mit Radius 1 um den Koordinatenursprung.

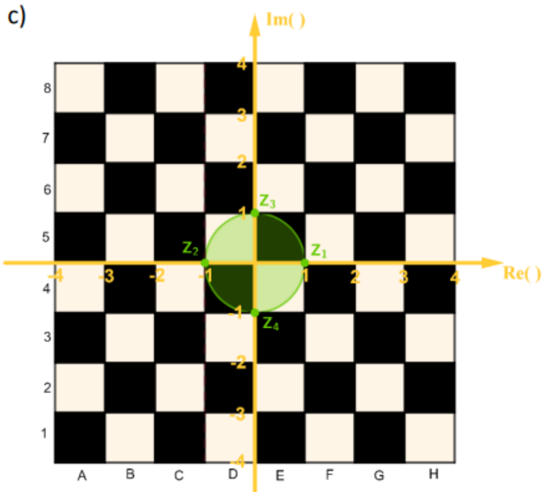
a)



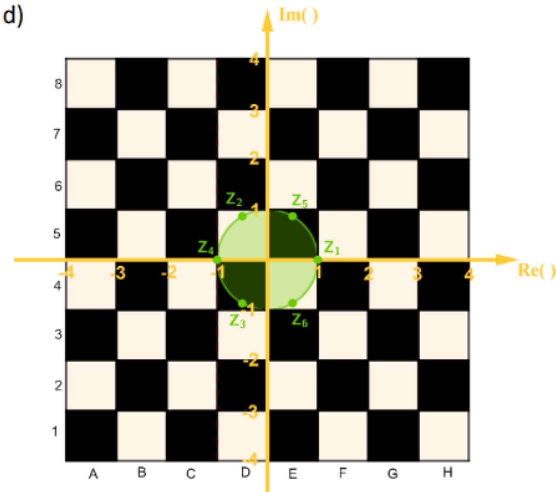
b)



c)



d)



Dass diese Aussage stimmt, lässt sich leicht rechnerisch überprüfen. Dazu wird im Folgenden der Betrag der Ergebnisse aus Teilaufgabe **D1** berechnet:

a) $|-1| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ und $|1| = \sqrt{0^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$

b) $|1| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$, $|-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$,
$|-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

c) $|1| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$, $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$,
$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$ und $|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

d) $|1| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$, $|-1| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = \sqrt{1} = 1$,

$|-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$|\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$|-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$|\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

Didaktischer Kommentar

Hinweis: Dieser Spaziergang bringt ein hohes Anforderungsniveau mit sich, weshalb der Spaziergang vorzugsweise für leistungsstärkere Klassen (beispielsweise Leistungskurse) der Sekundarstufe 2 geeignet ist. Vielleicht passt der Spaziergang auch gut in eine Projektwoche.

In diesem Spaziergang lernen die Schülerinnen und Schüler die komplexen Zahlen in kartesischer Form anhand eines Schachbrettes kennen. Das Schachbrett leitet die Lernenden dazu an, den vorliegenden Kontext zu mathematisieren und zu strukturieren. Gleichzeitig wird dabei das Vorstellungsvermögen für die komplexen Zahlen unterstützt. In diesem Spaziergang bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen arbeiten und diskutieren zu lassen, um das Entwickeln von Lösungsstrategien zu fördern.

Die Schülerinnen und Schüler sollten Vorkenntnisse über Vektoren, die Länge (den Betrag) eines Vektors und die quadratische Ergänzung bzw. die pq-Formel mitbringen, um den Spaziergang gut durchführen zu können. Vorkenntnisse zur Polynomdivision werden nicht vorausgesetzt. Um die Hinweise in Teilaufgabe **D1** nachvollziehen zu können, bietet es sich an, diese im Nachhinein im Unterricht zu behandeln.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler sich im ersten Aufgabenteil mit der Konstruktion des Koordinatensystems auseinandergesetzt haben, erproben sie grundlegende Rechenoperationen auf den komplexen Zahlen. Daran anschließend sollen sich die Schülerinnen und Schüler mit Spiegelungen und Beträgen im Kontext der komplexen Zahlen auseinandersetzen. Abgeschlossen wird der Spaziergang mit dem Lösen komplexer Gleichungen.