Sitzt? Passt? Wackelt? Oder hat doch noch Luft?

Brückenbögen modellieren

Lösungsvorschlag

Hinweis: Die folgende Lösung wurde an einem Brückenbogen am Bonner Rheinufer erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Mithilfe des Winkelmessers ergibt sich bei einer Augenhöhe von $1,90$ Metern und 10 Metern Abstand zur Brücke ein Winkel von $32°$. Somit ergibt sich für die Höhe des Brückenbogens:

$$\tan(32°) = \frac{h_{\text{Brückenbogen}} - 1,9}{10}$$
$$\Rightarrow h_{\text{Brückenbogen}} = 10 \cdot \tan(32°) + 1,9 \approx 8,1\text{m}$$

Misst man die Höhe des Brückenbogens durch Ausmessen und Abzählen der Brückensteine, so erhält man folgendes: Im rechteckigen Teil der Brückenöffnung zählt man eine Höhe von 10 kleinen und 3 großen Steinen, wobei die kleinen Steine eine Höhe von 30 Zentimetern und die großen Steine eine Höhe von 40 Zentimetern haben. Im parabelförmigen Bereich des Brückenbogens zählt man weiterhin eine Höhe von 4 großen und 6 kleinen Steinen. Insgesamt erhält man also eine geschätzte Höhe von

$$h_{\text{Brückenbogen}} = (10+6) \cdot 0,30\text{m} + (3+4) \cdot 0,40\text{m} = 7,60\text{m}$$

Wir rechnen im Folgenden mit einer Höhe von $8,10$ Metern weiter.

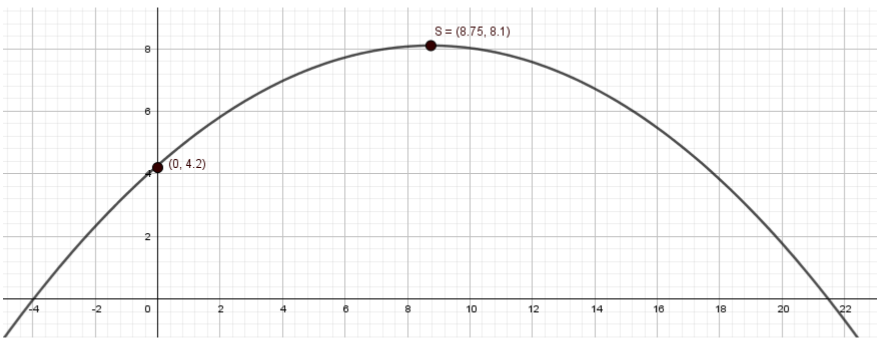
A2 Als Breite für den Bogen lassen sich $17,50$ Meter messen, woraus die Koordinaten $S = (8,75|8,1)$ für den Scheitelpunkt folgen. Wir ermitteln den Wert von y, indem wir die Höhe der Brückensteine addieren. Wir erhalten $y = f(0) = 4,2$ (Angaben in Metern). Somit ergibt sich die Scheitelpunktform:

$$f(x) = a(x - 8,75)^2 + 8,1$$

Mit $f(0) = 4,2$ folgt $a \approx -0,05$ und folglich

$$f(x) \approx -0,05(x - 8,75)^2 + 8,1$$

A3 Wir zeichnen den Funktionsgraphen:



B1 Zuerst muss der Graph der Funktion f aus Teilaufgabe **A3** so zum Graphen der neuen Funktion $\tilde{f}$ verschoben werden, dass der Graph von $\tilde{f}$ symmetrisch zur y-Achse liegt. Hierfür ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$$\tilde{f}(x) = -0,05(x - 8,75 + 8,75)^2 + 8,1 = -0,05x^2 + 8,1$$

Um die Extremwertaufgabe zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler die Funktion der Rechtecksfläche A der Kantenlängen a und b

$$A(a,b) = a \cdot b$$

mithilfe der Nebenbedingung

$$\tilde{f}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{-0,05}{4} \cdot a^2 + 8,1 = b$$

maximieren. Außerdem muss noch gelten, dass $a \in [0; 17,5]$. Wir stellen nun die Zielfunktion als Funktion von a dar:

$$A(a) = \frac{-0,05}{4} \cdot a^3 + 8,1a$$

Für die erste und die zweite Ableitung der Zielfunktion erhalten wir:

$$A'(a) = -\frac{0,15}{4} \cdot a^2 + 8,1$$
$$A''(a) = -\frac{0,15}{2} \cdot a$$

Die notwendige Bedingung zur Bestimmung eines Maximums lautet

$$0 = A'(a) \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{32,4}{0,15}} \Leftrightarrow a \approx \pm 14,7$$

Der negative Wert ist nicht von Belang, da a als Breite des Rechtecks positiv sein muss. Eingesetzt in die zweite Ableitung für die hinreichende Bedingung ergibt sich:

$$A''(14,7) = -\frac{0,15}{2} \cdot 14,7 \approx -1,1 < 0$$

Somit liegt bei $a = 14,7$ ein lokales Maximum vor. Nun vergleichen wir noch mit den Werten am Rand:

$$A(0) = 0$$
$$A(14,7) \approx 79,36$$
$$A(17,5) \approx 74,76$$

Somit handelt es sich um ein globales Maximum. Der Flächeninhalt des optimalen Rechtecks beträgt $79,36$ Quadratmeter und entsteht bei $a = 14,7$. Nun wollen wir noch die Höhe b des optimalen Rechtecks bestimmen:

$$b = \frac{79,36 \text{ m}^2}{14,7 \text{ m}} \approx 5,4 \text{ m}$$

Damit kann der Gabelstapler höchstens Ladung mit einer rechteckigen Fläche von $79,36$ Quadratmetern durch den Brückenbogen transportieren.

B2 Für den ersten Fall erhalten wir die Funktion

$$A^*(a) = \frac{-0,05}{4} \cdot a^3 + 7,6a$$

Analog zu Teilaufgabe **B1** erhalten wir $a = 14,2$ Meter. Mit $A^*(14,2) = 72,13$ Quadratmetern folgt $b = 5,1$ Meter.

Im zweiten Fall beträgt die zulässige Durchfahrtshöhe für dieses Beispiel $b = 5,4$ Meter. Das entspricht zufällig dem Wert aus Teilaufgabe **B1**. Damit folgt $\tilde{f}\left(\frac{a}{2}\right) = 5,4$ und es ergibt sich wieder eine zulässige Breite von $a = 14,7$ Meter. Dies ergibt wieder eine Querschnittsfläche von $79,36$ Quadratmetern. Wenn wir andere zulässige Durchfahrtshöhen festlegen (oder andere Lernorte anschauen), dann kann es hier natürlich andere Lösungen geben als in Teilaufgabe **B1**.

B3 Die gesuchte Fläche können wir mithilfe der Integralrechnung berechnen. Hierzu müssen wir zunächst die Dicke an der dünnsten Stelle der Brücke (am Scheitelpunkt) messen. In diesem Beispiel liegt sie bei etwa $1,4$ Metern. Dann gilt

$$\begin{aligned}
A_{\text{gesamt}} &= 2 \cdot \left(9,5 \cdot 17,5 - \int_{\frac{-17,5}{2}}^{\frac{17,5}{2}} \tilde{f}(x)\mathsf{d}x\right) \\
&= 2 \cdot 9,5 \cdot 17,5 - 4 \cdot \int_0^{\frac{17,5}{2}} \tilde{f}(x)\mathsf{d}x \\
&= 332,5 - 4\Big[-\frac{0,05}{3}x^3 + 8,1x\Big]_0^{8,75} \\
&= 332,5 - 4 \cdot \left(-\frac{5}{300} \cdot 8,75^3 + 8,1 \cdot 8,75 - 0\right) \\
&\approx 332,5 - 238,8 = 93,7
\end{aligned}$$

Damit ist Putz für rund 93,7 Quadratmeter notwendig.

Didaktischer Kommentar

In dieser Aufgabe werden folgende Inhalte thematisiert:

- Lösen von klassischem Extremwertaufgaben
- Verschieben von Funktionsgraphen
- Berechnungen bestimmter Integrale bei Parabelfunktionen

Die benötigten Vorkenntnisse sollten zuvor im Unterricht erworben worden sein. Das Lernziel der Aufgabe ist es, dass die Schülerinnen und Schüler ihr mathematisches Verständnis auf eine konkrete kontextgebundene Situation anwenden können. Die Aufgabe ist sowohl mit Schülerinnen und Schüler aus Leistungskursen als auch aus Grundkursen durchführbar.

Die ersten drei Teilaufgaben beschäftigen sich mit der mathematischen Modellierung des Brückenbogens. In Teilaufgabe **A1** sollen die Schülerinnen und Schüler die Höhe des Brückenbogens ermitteln. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die Lehrkraft sollte hier in Abhängigkeit der gewählten Örtlichkeit entscheiden, welche Möglichkeiten ausprobiert werden. Teilaufgabe **A3** dient als Überleitung zur Extremwertaufgabe. Durch die Zeichnung sollen die Schülerinnen und Schüler eine bessere Vorstellung von der gesuchten Fläche erhalten.

Die Schülerinnen und Schüler sollen in den Teilaufgaben **B1** und **B2** ihr mathematisches Wissen zu Extremwertaufgaben anwenden und gleichzeitig auf einen Kontext beziehen. In Teilaufgabe **B3** wird das Wissen zur Berechnung bestimmter Integrale bei Parabelfunktionen abgeprüft.