Auf Kurven sonnen

Modellierung einer Liegebank

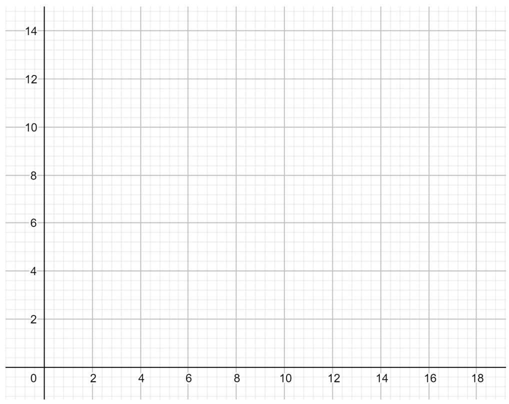
Lösungsvorschlag

Diese Lösung wurde an einer Liegebank an der Bushaltestelle Antoniusplatz in 53819 Neunkirchen-Seelscheid erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Eine reelle Funktion $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}x^{n-i}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt *Polynomfunktion* oder *ganzrationale Funktion vom Grad n*. Die reellen Zahlen a_i heißen Koeffizienten der ganzrationalen Funktion.
Demnach ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades in Abhängigkeit der Variablen $x \in \mathbb{R}$ und der Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gegeben durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

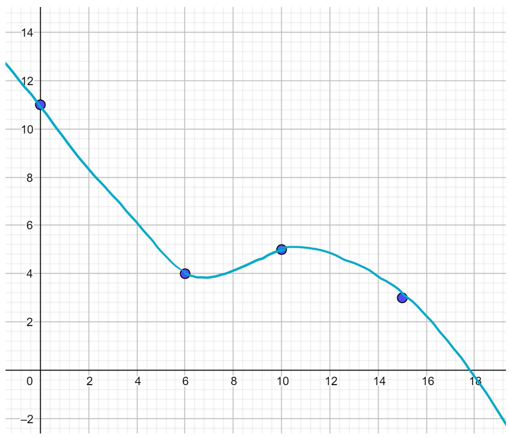
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b \qquad f'''(x) = 6a$

A2/A3 Ein geeignetes Koordinatensystem kann wie folgt aussehen und die gemessenen Daten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:



Horizontalentfernung (dm)	Höhe (dm)
0	11
6	4
10	5
15	3

A4



Entlang der Rückenlehne bis zur Sitzfläche (lokales Minimum) ist die Profilkurve der Liegebank streng monoton fallend. Zwischen dem lokalen Minimum und der Erhebung für die Beine (lokales Maximum) ist sie streng monoton steigend und rechts von dem lokalen Maximum streng monoton fallend.

B1

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 11 & d &= 11 \\ f_1(6) &= 4 & 6^3a + 6^2b + 6c + d &= 4 \\ f_1(10) &= 5 & 10^3a + 10^2b + 10c + d &= 5 \\ f_1(15) &= 3 & 15^3a + 15^2b + 15c + d &= 3 \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Gauß-Algorithmus erhält man die Lösungen $a = -\frac{77}{5400}, b = \frac{1997}{5400}$, $c = -\frac{517}{180}, d = 11$. Somit ergibt sich die Funktion $f_1(x) = -\frac{77}{5400}x^3 + \frac{1997}{5400}x^2 - \frac{517}{180}x + 11$.

B2 Es gilt:
$f_1(x) = -\frac{77}{5400}x^3 + \frac{1997}{5400}x^2 - \frac{517}{180}x + 11$
f_1 ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar, da f_1 ein Polynom ist. Somit ist f_1 insbesondere auf dem Intervall [0,15] differenzierbar. Daher können die Ableitungen gebildet werden:

$f_1'(x) = -\frac{77}{1800}x^2 + \frac{1997}{2700}x - \frac{517}{180}$
$f_1''(x) = -\frac{77}{900}x + \frac{1997}{2700}$
$f_1'''(x) = -\frac{77}{900}$

Falls $x_* \in$ [0,15] ein lokales Extremum für f_1 ist und f_1 in x_* differenzierbar ist, dann gilt $f_1'(x_*) = 0$.

$$\begin{aligned} -\frac{77}{1800}x_*^2 + \frac{1997}{2700}x_* - \frac{517}{180} = 0 &\Leftrightarrow x_*^2 - \frac{1997}{2700}x_* \cdot \frac{1800}{77} + \frac{517}{180} \cdot \frac{1800}{77} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_*^2 - \frac{3994}{231}x_* + \frac{470}{7} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_* = \frac{1997}{231} \pm \sqrt{\left(\frac{1997}{231}\right)^2 - \frac{470}{7}} \\ &\Leftrightarrow x_* \approx \frac{589}{100} \vee x_* \approx \frac{57}{5} \end{aligned}$$

$$f''\left(\frac{589}{100}\right) \approx \frac{6}{25} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$
$$f''\left(\frac{57}{5}\right) \approx -\frac{6}{25} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Also ist $\left(\frac{589}{100}, 4\right)$ ein lokales Minimum und $\left(\frac{57}{5}, \frac{519}{100}\right)$ ein lokales Maximum von f_1. Diese Werte stimmen nicht genau mit den gemessenen Koordinaten der Extrempunkten $(6, 4)$ und $(10, 5)$ überein.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich folgendermaßen: $f_1(0) = 11$. Der Schnittpunkt liegt also bei $(0, 11)$, also in einer realen Höhe von 110 Zentimetern.

B3 Um die Profilkurve der Liegebank zu modellieren, können nicht nur vier, sondern sechs Bedingungen formuliert werden. Zusätzlich zu den vier Bedingungen aus Teilaufgabe **B1** kann genutzt werden, dass beide Extremstellen zugleich Nullstellen der ersten Ableitung sind. Damit ergeben sich die folgenden Bedingungen und wir können eine ganzrationale Funktion fünften Grades entwickeln $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6$, $a_i \in \mathbb{R}$,

$i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $a_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f_2(0) &= 11 & a_6 &= 11\\
f_2(6) &= 4 & 6^5a_1 + 6^4a_2 + 6^3a_3 + 6^2a_4 + 6a_5 + a_6 &= 4\\
f_2'(6) &= 0 & 5\cdot 6^4a_1 + 4\cdot 6^3a_2 + 3\cdot 6^2a_3 + 2\cdot 6a_4 + a_5 &= 0\\
f_2(10) &= 5 & 10^5a_1 + 10^4a_2 + 10^3a_3 + 10^2a_4 + 10a_5 + a_6 &= 5\\
f_2'(10) &= 0 & 5\cdot 10^4a_1 + 4\cdot 10^3a_2 + 3\cdot 10^2a_3 + 2\cdot 10a_4 + a_5 &= 0\\
f_2(15) &= 3 & 15^5a_1 + 15^4a_2 + 15^3a_3 + 15^2a_4 + 15a_5 + a_6 &= 3
\end{aligned}$$

Das Lösen des linearen Gleichungssystems liefert die Funktion:

$$f_2(x) = \tfrac{41}{121500}x^5 - \tfrac{12251}{972000}x^4 + \tfrac{149113}{972000}x^3 - \tfrac{1168}{2025}x^2 - \tfrac{1019}{1080}x + 11.$$

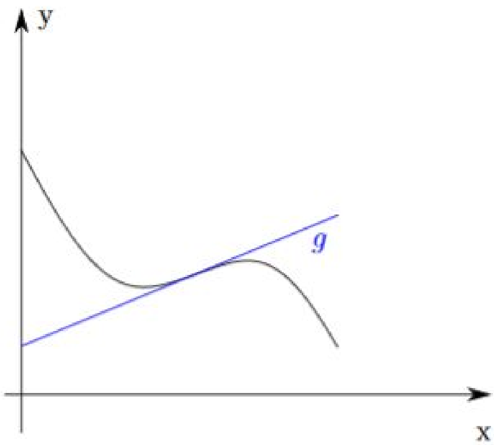
B4 Es werden die Wendestellen von f_2 berechnet:

$$\begin{aligned}
f_2'(x) &= \frac{41}{24300}x^4 - \frac{49004}{972000}x^3 + \frac{447339}{972000}x^2 - \frac{2336}{2025}x - \frac{1019}{1080}\\
f_2''(x) &= \frac{164}{24300}x^3 - \frac{147012}{972000}x^2 + \frac{894678}{972000}x - \frac{2336}{2025}
\end{aligned}$$

Wir setzen die zweite Ableitung gleich Null und erhalte die Wendestellen: $x_1 \approx 1,68$, $x_2 \approx 7,93$ und $x_3 \approx 12,80$

Nachmessen zeigt, dass die berechneten Wendestellen gut mit den realen Bedingungen übereinstimmen.

C1 In Teilaufgabe **B2** wurde die Wendestelle bereits annähernd bestimmt. Einsetzen der entsprechenden Wendestelle in f_2 liefert den gesuchten Wendepunkt: $(8, \frac{9}{2})$ (Der Graph geht im Wendepunkt von einer Links- in eine Rechtskrümmung über.) und anschließend die Tangente im Wendepunkt $g(x) = f_2'(8)x + \frac{73}{50} \approx \frac{38}{100}x + \frac{73}{50}$.



C2 und C3 Individuelle Lösungen

Didaktischer Kommentar

Die Differenzialrechnung stellt Mittel bereit, um Funktionen auf wichtige Eigenschaften wie etwa Monotonieverhalten, Extremwerte oder Krümmungsverhalten zu untersuchen. Eine Kurvendiskussion kann unter zwei Gesichtspunkten gesehen werden: Einerseits lässt sich von einer gegebenen Funktion auf ihre Eigenschaften schließen (klassische Kurvendiskussion), andererseits können Eigenschaften vorgegeben werden und man sucht eine passende Funktion (umgekehrte Kurvendiskussion oder sogenannte Steckbriefaufgaben). Dieser Mathematische Spaziergang behandelt eine umgekehrte Kurvendiskussion anhand des Anwendungsbeispiels einer Liegebank. Eine solche Liegebank hat, abhängig von dem Ort, an dem sie aufgestellt ist, unterschiedliche Namen: Relaxbank, Wellnessbank oder Waldsofa.

In dieser Aufgabe beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit ganzrationalen Funktionen. Die Modellierung der Liegebank erfolgt im Stil einer Steckbriefaufgabe. Dieses Aufgabenfeld ist Unterrichtsinhalt der Sekundarstufe II. Die Schülerinnen und Schüler sollten Funktionen dritten Grades im Unterricht bereits kennengelernt haben und bestenfalls auch eine vollständige Kurvendiskussion durchgeführt haben, damit sie mit der Aufgabenstellung zurechtkommen. Daneben brauchen die Schülerinnen und Schüler Kenntnisse im Lösen von Gleichungssystemen und Steckbriefaufgaben. Der Begriff des Monotonieverhaltens von Funktionen muss jedoch nicht zwingend zuvor im Unterricht eingeführt worden sein. Dieses Themenfeld kann gut anhand des Beispiels der Liegebank eingeführt und erklärt werden.

In Aufgabenteil **A** sollen die Schülerinnen und Schüler die Profilkurve der Liegebank zunächst als ganzrationale Funktion dritten Grades betrachten. Die Liegebank soll vermessen und bereits gelerntes Wissen aktiviert werden.
In Aufgabenteil **B** sollen die Schülerinnen und Schüler die Liegebank als ganzrationale Funktion dritten Grades modellieren. Sie werden feststellen, dass die in einem Gleichungssystem gestellten vier Bedingungen nicht genügen, um die Profilkurve der Liegebank exakt darzustellen. Es soll diskutiert werden, warum die Profilkurve der Liegebank nicht bestmöglich durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades modelliert werden kann, sondern eine ganzrationale Funktion fünften Grades die bessere Wahl darstellt. Außerdem werden in den Aufgabenteilen **B** und **C** klassische Rechnungen einer Kurvendiskussion durchgeführt. Weiterhin geht es in Aufgabenteil **C** um eine praxisorientierte Auseinandersetzung mit der in Teilaufgabe **B3** aufgestellten ganzrationalen Funktion fünften Grades.
In Teilaufgabe **C1** müssen die Schülerinnen und Schüler die Tangente im Wendepunkt der Funktion bestimmen. Auch dies sollte vorher im Unterricht eingeübt werden.

Für die Durchführung des Spaziergangs werden ein Zollstock oder ein Maßband, Taschenrechner und Schreibmaterial benötigt.