Goldene Schnittblumen

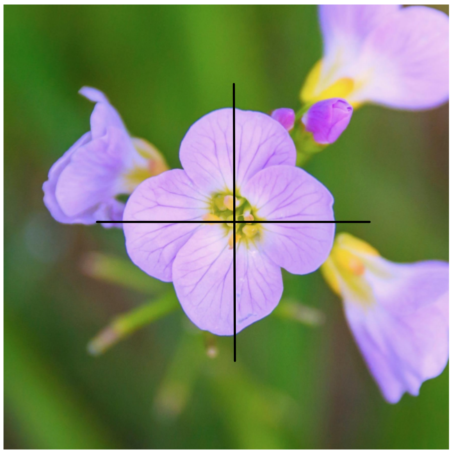
Symmetrie und Blattstellung von Pflanzen

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde im Botanischen Garten der Universität Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1/A2

Zygomorphe Blüte des Korallenbaums



Disymmetrische Blüte des Kresse-Schaumkrauts

Radiärsymmetrische Blüte der kriechenden Hornnarbe

Der Oleander mit einem Drehwinkel von 72°

A3 Wenn eine Figur achsensymmetisch zu zwei aufeinander senkrecht stehenden Achsen ist, dann ist sie auch drehsymmetrisch mit dem Winkel 180°.

B1 Die geschätzten Divergenzwinkel sollten im Bereich $120° - 144° \pm 5°$ liegen, oder $\alpha = 90°$ oder $\alpha = 180°$ sein.

B2 Individuelle Lösungen sind möglich. Lösungsvorschlag: Die Schatten zweier aufeinanderfolgender Blätter können mithilfe einer Taschenlampe auf ein Stück Papier projiziert werden. Dann können auf Höhe der Mittelrippen der Blätter zwei Linien eingezeichnet werden. Nun kann mit dem Geodreieck der Winkel zwischen den zwei Geraden und somit der Divergenzwinkel gemessen werden.

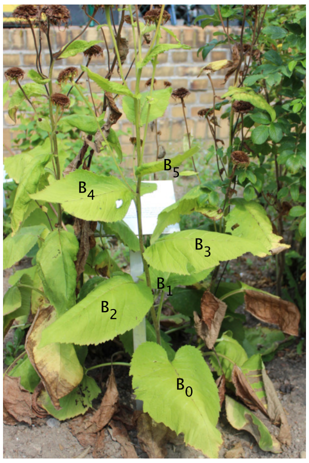
C1

$$\begin{array}{lllll} f_1 = 1, & f_2 = 1, & f_3 = 2, & f_4 = 3 & f_5 = 5, \\ f_6 = 8, & f_7 = 13, & f_8 = 21, & f_8 = 34, & f_{12} = 55. \end{array}$$

C2 Die am häufigsten beobachteten Blattstellungsquotienten und die dazugehörigen Divergenzwinkel sind:

1. $\frac{1}{2}$ (Divergenzwinkel 180°): z.B. Tulpe und Gladiole.
2. $\frac{1}{3}$ (Divergenzwinkel 120°): z.B. dreikantige Gräser und Herbstzeitlose.
3. $\frac{2}{5}$ (Divergenzwinkel 144°): z.B. Pflanzen der Familie der Rosengewächse.
4. $\frac{3}{8}$ (Divergenzwinkel 135°): z.B. bei den meisten Kohlarten oder Löwenmaul.
5. $\frac{5}{13}$ (Divergenzwinkel 138,46°): z.B. Löwenzahn, Sanddorn.
6. $\frac{8}{23}$ (Divergenzwinkel 137,14°): z.B. Zapfen der Waldkiefer.

Beispiel:



Die große Telekie mit einem Blattstellungsquotienten von $\frac{2}{5}$.

C3 Berechnet man weitere Folgenglieder der Fibonacci-Zahlen und setzt diese in die Folge D_n ein, so kommt man zu folgender Feststellung: Die Folge D_n strebt gegen einen Winkel von etwa 137,5°. Anders ausgedrückt:

$$\lim_{n\to\infty} D_n \approx 137,5^\circ$$

Grund dafür ist, dass der Quotient $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den sogenannten *Goldenen Schnitt* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert. Daher konvergiert $\frac{f_n}{f_{n+2}} \cdot 360^\circ = \frac{f_n}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} \cdot 360^\circ$ gegen

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot 360^\circ \approx 137,5^\circ.$$

Didaktischer Kommentar

In der Natur begegnen uns oft symmetrischen Formen, wie etwa bei Schmetterlingen und Blüten. Insbesondere die Achsensymmetrie bietet hier eine Vernetzung zum Fach Biologie, denn die Botanik klassifiziert achsensymmetrische Blütenstände abhängig von der Anzahl der Symmetrieachsen in *zygomorph, disymmetrisch* und *radiärsymmetrisch*. Den Lernenden soll somit bewusst werden, dass die Symmetrie nicht nur in der Mathematik eine wichtige Rolle spielt.
Die Teilaufgaben **A1** bis **B2** können bereits in der Sekundarstufe 1 bearbeitet werden. Vorab sollen im Rahmen des Fachunterrichts ebene Figuren auf Symmetrieeigenschaften untersucht worden sein. Zudem sind im Vorfeld wichtige Fachbegriffe (Achsensymmetrie, Drehsymmetrie, Spiegelachse etc.) einzuführen und die sachangemessene Anwendung dieser sicherzustellen. Eine weitere Kompetenz, die sich in den Kontext der Sekundarstufe 1 einordnen lässt, ist das Messen und Schätzen von Winkeln. Für die Bearbeitung der Teilaufgaben **B1** und **B2** wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler bereits eine Grundvorstellung von Winkelgrößen haben. Zudem wird erwartet, dass das Geodreieck zum Messen und Zeichnen von Winkeln genutzt werden kann.
Konvergenz und Grenzwerte sind zentrale Konzepte der Analysis. Stellen wir uns nun die Frage, inwiefern der Grenzwertbegriff in der Schulmathematik eine Rolle spielt, so besagt der Kernlehrplan für die Sekundarstufe 2: Schülerinnen und Schüler sollen bis zum Ende der Einführungsphase auf Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate erläutern können. Wir können somit davon ausgehen, dass Schülerinnen und Schüler spätestens am Ende der Einführungsphase über Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff verfügen, die in der Differential- und Integralrechnung wieder aufgegriffen werden. Der Begriff des Grenzwertes fällt nämlich erneut bei dem Übergang von der Produktsumme zum Integral.
Der Folgenbegriff hingegen kommt in den Bildungsstandards nicht mehr vor. Er ist jedoch ein wichtiges Hilfsmittel für die Entwicklung des Unendlichkeits- und Grenzwertbegriffs. Mit den Fibonacci-Zahlen soll dazu motiviert werden, im Unterricht auch einen Blick auf Folgen zu werfen.
Die Bearbeitung der gesamten Aufgabe wird empfohlen, sobald Schülerinnen und Schüler der Einführungsphase über die benannten Kompetenzen verfügen. Eine weitere Möglichkeit für die Bearbeitung dieser Aufgabe bietet sich im Rahmen einer Projektwoche, beispielsweise zum Thema „Mathematik in der Natur“, an.

Wenn diese Aufgabe nicht in einem botanischen Garten bearbeitet wird, bietet es sich an, ein Buch zur Pflanzenbestimmung mitzunehmen oder eine entsprechende App auf einem mobilen Endgerät zu installieren, sodass die unterschiedlichen Pflanzen bestimmt werden können.