Blinken ist relativ wichtig? Nein, absolut!

Wahrscheinlichkeiten im Kreisverkehr

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde in der Hochkreuzallee in Bonn erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab. In allen Aufgabenteilen, in denen etwas gemessen oder beobachtet werden muss, können je nach Zusammensetzung der Stichproben unterschiedliche Lösungen entstehen.

A1 Eine mögliche Liste an Beobachtungen kann folgendermaßen aussehen. Die Zahl der Einträge wurde der Übersicht halber minimal gehalten.

Gruppe A (falsch am Kreisverkehr geblinkt)	Gruppe B	Gruppe B (Anzahl Autos)
123 1111 42 562 755	Korrekt an Vorfahrtstraße geblinkt: 42 22 631 38 562 Vorher abgebogen: 123	21

Da ein Auto vorher abgebogen ist, wird es aus den Liste von A und B entfernt und es ergeben sich die folgenden Listen:

Gruppe A (falsch am Kreisverkehr geblinkt)	Gruppe B	Gruppe B (Anzahl Autos)
1111 42 562 75	Korrekt an Vorfahrtstraße geblinkt: 42 22 631 38 562	20

A2 Mit den Daten aus **A1** lässt sich die Vierfeldertafel komplett ausfüllen. Gruppe A kennt die Zahl der Autos, die am Kreisverkehr nicht geblinkt haben. Gruppe B kennt die Zahl der Autos, die an der Vorfahrtstraße geblinkt haben. Aus den weiteren Beobachtungen von Gruppe B ergibt sich die Gesamtzahl aller Autos. Dadurch lässt sich jeweils die absolute Häufigkeit der Gegenereignisse berechnen.
Die Anzahl gleicher Kennzeichen in den beiden betroffenen Listen ist die Anzahl aller Autos, die am Kreisverkehr falsch, an der Vorfahrtstraße jedoch richtig geblinkt haben, also $|\overline{K} \cap V|$. Die restlichen absoluten Häufigkeiten lassen sich durch die entsprechenden Differenzen bilden.
Für obige Listen ergibt sich folgendes Ergebnis für die absoluten Häufigkeiten:

	K	$\overline{K}$	Summe
V	3	2	5
$\overline{V}$	13	2	15
Summe	16	4	20

Hierbei beschreiben K, $\overline{K}$, V und $\overline{V}$ folgende Ereignisse:

K = am Kreisverkehr geblinkt, $\overline{K}$ = am Kreisverkehr nicht geblinkt, V = an der Vorfahrtstraße geblinkt, $\overline{V}$ = an der Vorfahrtstraße nicht geblinkt.

A3 Aus der obigen Tabelle ergibt sich folgende Vierfeldertafel für die relativen Häufigkeiten.

	K	$\overline{K}$	Summe
V	$0,15$	$0,10$	$0,25$
$\overline{V}$	$0,65$	$0,10$	$0,75$
Summe	$0,80$	$0,20$	1

Da nur eine Stichprobe betrachtet wurde, sind dies nicht die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten. Um sie zu bestimmen, müsste man alle existierenden Autofahrerinnen und Autofahrer diese Stelle passieren lassen und deren Blinkverhalten beobachten. Nach dem Gesetz der großen Zahlen nähern sich die relativen Häufigkeiten den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten an, wenn die Stichprobe größer wird.

A4 $P(\overline{V}) = 0,75 = 75\%$ lässt sich direkt aus der Vierfeldertafel ablesen. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Autos mindestens eins an der Stelle nicht blinkt, ist die Gegenwahrscheinlichkeit davon, dass beide Autos dort blinken. Diese lässt sich mit der Multiplikationspfadregel berechnen. Also gilt

$$\begin{aligned} P(\text{Mindestens ein Auto blinkt nicht}) &= 1 - P(\text{alle Autos blinken}) \\ &= 1 - (0,25)^2 = 0,9375 = 93,75\% \end{aligned}$$

A5 Alle gefragten Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit lösen. Die hier eingesetzten Werte entsprechen denen der Vierfeldertafel aus Teilaufgabe **A3**.

- $P(V|K) = \frac{P(V\cap K)}{P(K)} = \frac{0,15}{0,80} = 0,1875 = 18,75\%$
- $P(K|V) = \frac{P(K\cap V)}{P(V)} = \frac{0,15}{0,25} = 0,6 = 60\%$
- $P(V|\overline{K}) = \frac{P(V\cap \overline{K})}{P(\overline{K})} = \frac{0,10}{0,20} = 0,50 = 50\%$
- $P(K|\overline{V}) = \frac{P(K\cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{0,65}{0,75} \approx 0,8667 = 86,67\%$

A6 Da die Aufgabe situationsabhängig und nicht mathematisch ist, gibt es hierzu keinen Lösungsvorschlag.

B1 Es werden die (disjunkten) Ereignisse $P =$„Fahrzeug verlässt Kreisverkehr in Richtung Plittersdorf“ und $G =$„Fahrzeug verlässt Kreisverkehr in Richtung Godesberg-Nord“ mit $|P| + |G| =$„Gesamtzahl aller relevanten Fahrzeuge“ definiert. Außerdem sei $B =$ „Blinkt beim Ausfahren“ und $\overline{B} =$ „Blinkt nicht beim Ausfahren“.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Datenerfassung auf zwei Personen aufzuteilen. Eine Möglichkeit ist, dass sich je eine Person an eine Ausfahrt stellt und jeweils eine Strichliste der blinkenden und nicht blinkenden Personen anfertigt. Diese Strichlisten beschreiben dann $|B\cap P|, |\overline{B}\cap P|, |B\cap G|$ und $|\overline{B}\cap G|$.
In einer real ausgeführten Messung ergaben sich beispielsweise folgende Daten, mit denen auch in der nächsten Teilaufgabe weitergerechnet wird:

	B	$\overline{B}$	Summe
P	12	6	18
G	29	21	50
Summe	41	27	68

	B	$\overline{B}$	Summe
P	$0,1765$	$0,0882$	$0,2647$
G	$0,4265$	$0,3088$	$0,7353$
Summe	$0,6029$	$0,3971$	1

B2 Da $P(B \cap P) = 0,1765 \neq 0,1596 = P(B)P(P)$, sind die Ereignisse „Gibt Abbiegezeichen" und „Biegt nach Plittersdorf ab" nicht unabhängig. Um eine Abhängigkeit zu untersuchen, kann man beispielsweise annehmen, dass ein Fahrzeug in eine der Richtungen abgebogen ist und dann die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass korrekt geblinkt wurde.

- $P(B|P) = \frac{P(B \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}1765}{0{,}2647} \approx 0,6667 = 66,7\%$
- $P(B|G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}4265}{0{,}7353} \approx 0,58 = 58\%$

Es lässt sich feststellen, dass die Fahrzeugführer und Fahrzeugführerinnen sich an der Ausfahrt in Fahrtrichtung links nach Plittersdorf vorbildhafter verhalten haben, da die Wahrscheinlichkeit für richtiges Blinken über 8 Prozent höher liegt. Dennoch ist hier anzumerken, dass es sich um eine Stichprobe handelt. Eine genauere Aussage kann getroffen werden, wenn der Messzeitraum vergrößert und die Stichprobengenauigkeit dadurch erhöht wird.

Didaktischer Kommentar

Wichtig: Für die Bearbeitung der Aufgabe werden unbedingt zwei Aufsichtspersonen an den beiden Orten, an denen die Messungen durchgeführt werden, benötigt!

Zum Bearbeiten dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler ein- und mehrstufige Zufallsexperimente sowie bedingte Wahrscheinlichkeiten kennen. Die geeignete Wahl des Ortes ist von großer Wichtigkeit, damit sich die Zusammenhänge zwischen Ereignissen an den beiden Beobachtungspunkten gut einordnen lassen.
Die Städtekennung sowie die Buchstaben des Kennzeichens sollen in Teilaufgabe **A1** vernachlässigt werden, weil die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Fahrzeuge mit dem gleichen Kennzeichen bei unterschiedlicher Städtekennung in dem Zeitraum vorbeifahren, sehr gering ist. Mit den Informationen aus Teilaufgabe **A1** ist es anschließend möglich, die Vierfeldertafel aus Teilaufgabe **A2** komplett auszufüllen.
In Teilaufgabe **A3** wird der Vollständigkeit halber auf das empirische Gesetz der großen Zahlen aufmerksam gemacht. Diesem müssen sich die Schülerinnen und Schüler beim Erheben statistischer Daten immer bewusst sein, wenn die Grundgesamtheit nicht vollständig betrachtet wird oder werden kann. Anschließend werden in Teilaufgabe **A4** die Pfadregeln wiederholt. Zunächst kann die Wahrscheinlichkeit, dass an einer abknickenden Vorfahrtstraße nicht geblinkt wird, einfach aus der Vierfeldertafel abgelesen werden. Anschließend können die Schülerinnen und Schüler ein Baumdiagramm für das zweistufige Zufallsexperiment zeichnen, wobei beide Stufen das gleiche Experiment darstellen. Mithilfe der Pfadregeln können sie die gewünschte Wahrscheinlichkeit berechnen.
Zur Lösung der Teilaufgabe **A5** müssen die Schülerinnen und Schüler mit der Definition von bedingten Wahrscheinlichkeiten vertraut sein. Mit der Vierfeldertafel lassen sich alle Wahrscheinlichkeiten über den direkten Ansatz berechnen.
Zur Lösung von Teilaufgabe **B2** müssen die Schülerinnen und Schüler die Aufgabenstellung mathematisieren, untereinander kommunizieren und diskutieren. Sollte es keinen Zusammenhang zwischen zwei Ereignissen geben, muss gezeigt werden, dass sie unabhängig sind, also

$$P(A|B) = P(A) \;\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Andernfalls können die Schülerinnen und Schüler die Abhängigkeit des Blinkverhaltens von der Ausfahrtrichtung mithilfe der bedingten Wahrscheinlichkeiten untersuchen.