(F)AST parabelförmig

Kurvige Bäume modellieren

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an einem Baum im Redoutenpark (53117 Bonn) entworfen und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Dies sind Ideen, die die Schülerinnen und Schüler entwickeln könnten:

- Seil auf einer gewissen Höhe befestigen und als x-Achse verwenden
- mit Zollstock Argumente und Funktionswerte bestimmen
- Klebezettel als Markierung für wichtige Stellen verwenden

A2 Die Schnur kann in entsprechender Höhe horizontal gespannt werden. Hiermit lassen sich Messwerte ermitteln. Beispielhaft ergeben sich für den in der Abbildung gezeigten Baum (Fall eines lokalen Maximums):

$$\begin{array}{lll} A_1(1,02/0,83) & S(1,62/0,92) & B_1(1,82/0,89) \\ A_2(1,22/0,87) & & B_2(2,02/0,84) \\ A_3(1,42/0,90) & & B_3(2,22/0,78) \end{array}$$

Das weitere Vorgehen erfolgt ebenfalls in Bezug auf ein lokales Maximum. Das lokale Mininum kann vollständig analog behandelt werden.

B1 Die durchschnittliche Steigung soll mithilfe des Differenzenquotienten ermittelt werden.

Für die linke Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_{[1,02;1,62]} &= \frac{0,92-0,83}{1,62-1,02} = 0,15 \\ m_{[1,22;1,62]} &= \frac{0,92-0,87}{1,62-1,22} = 0,125 \\ m_{[1,42;1,62]} &= \frac{0,92-0,90}{1,62-1,42} = 0,1 \end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_{[1,62;1,82]} &= \frac{0,92-0,89}{1,62-1,82} = -0,15 \\ m_{[1,62;2,02]} &= \frac{0,92-0,84}{1,62-2,02} = -0,2 \\ m_{[1,62;2,22]} &= \frac{0,92-0,78}{1,62-2,22} = -0,2\overline{3} \end{aligned}$$

Beim Vergleich der Ergebnisse könnten beispielsweise folgende Erkenntnisse entstehen:

- Die Werte unterscheiden sich im Vorzeichen. So sind die Steigungen in den Intervallen der linken Seite positiv und bei denen der rechten Seite negativ.
- Die Werte der rechten Seite sind im Betrag höher. Die Funktion, die den Ast beschreibt, kann also nicht als Parabel modelliert werden, denn bei einer Parabel müssten die Werte im Betrag jeweils gleich sein (wegen der Symmetrie des Graphen einer Parabelfunktion).
- Je kleiner das Intervall von der linken oder der rechten Seite wird, desto betragsmäßig kleiner werden die Werte.

B2 Die letzte Beobachtung aus **B1** legt nahe, dass die durchschnittliche Steigung von links und rechts gegen 0 geht. Dies entspricht also der Steigung im lokalen Maximum.

C1 Für die eindeutige Bestimmung einer quadratischen Funktion benötigen wir den Scheitelpunkt sowie einen weiteren Punkt. Da die Parabel durch den gemeinsamen Scheitelpunkt verlaufen soll, wählen wir diesen als einen Punkt. Der zweite kann beliebig aus den gemessenen Punkten gewählt werden.
Für die linke Seite ergibt sich mit dem Punkt A_2:

$$\begin{aligned} f_{\text{links}}(x) &= a(x-1,62)^2 + 0,92 \\ A_2 \text{ eingesetzt: } 0,87 &= a(-0,4)^2 + 0,92 \\ \Rightarrow a &\approx -0,31 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Scheitelpunktform: $f_{\text{links}}(x) = -0,31(x-1,62)^2 + 0,92$: Dies wird nun mithilfe der zweiten binomischen Formel zur Normalform umgeformt:

$$\begin{aligned} f_{\text{links}}(x) &= -0,31(x-1,62)^2 + 0,92 \\ &= -0,31(x^2 - 3,24x + 1,62^2) + 0,92 \\ &\approx -0,31x^2 + 1,00x + 0,11 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich sich die Normalform $f_{\text{links}}(x) = -0,31x^2 + 1,00x + 0,11$.

Analog gehen wir für die rechte Seite mit dem Punkt B_2 vor:

$$\begin{aligned} f_{\text{rechts}}(x) &= a(x-1,62)^2 + 0,92 \\ B_2 \text{ eingesetzt: } 0,84 &= a(-0,4)^2 + 0,92 \\ \Rightarrow a &= -0,5 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Scheitelpunktform: $f_{\text{rechts}}(x) = -0,5(x-1,62)^2 + 0,92$: Dies wird nun mithilfe der zweiten binomischen Formel zur Normalform umgeformt:

$$\begin{aligned} f_{\text{rechts}}(x) &= -0,5(x-1,62)^2 + 0,92 \\ &= -0,5(x^2 - 3,24x + 1,62^2) + 0,92 \\ &\approx -0,5x^2 + 1,62x - 0,39 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Normalform $f_{\text{rechts}}(x) = -0,5x^2 + 1,62x - 0,39$.
Die zusammengesetzte Funktion lautet dann:

$$f(x) = \begin{cases} -0,31x^2 + 1,00x + 0,11 & \text{für } x \leq 1,62 \\ -0,5x^2 + 1,62x - 0,39 & \text{für } x > 1,62 \end{cases}$$

C2 Um die Steigung in einem Punkt $S(1,62/0,92)$ zu bestimmen, benötigen wir den Differentialquotienten (h-Methode). Für die linke Seite ergibt sich für $h < 0$:

$$\begin{aligned} m_{\text{Maximum, links}} &= \lim_{h \nearrow 0} \frac{f_{\text{links}}(1,62+h) - f_{\text{links}}(1,62)}{h} \\ &= \lim_{h \nearrow 0} \frac{-0,31(1,62+h)^2 + 1,00(1,62+h) + 0,11 - 0,92}{h} \\ &= \lim_{h \nearrow 0} \frac{-1,00h - 0,31h^2 + 1,00h}{h} \\ &= \lim_{h \nearrow 0} (-1,00 - 0,31h + 1,00) = 0 \end{aligned}$$

Analog folgt für die rechte Seite für $h > 0$:

$$\begin{aligned} m_{\text{Maximum, rechts}} &= \lim_{h \searrow 0} \frac{f_{\text{rechts}}(1,62+h) - f_{\text{rechts}}(1,62)}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{-0,5(1,62+h)^2 + 1,62(1,62+h) - 0,39 - 0,92}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{-1,62h - 0,5h^2 + 1,62h}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} (-1,62 + 1,62 - 0,5h) = 0 \end{aligned}$$

Beide Terme bestätigen die Vermutung, dass die Steigung im lokalen Maximum, also dem gemeinsamen Scheitelpunkt, 0 ist.

C3 Folgende zwei notwendigen Kriterien könnten die Schülerinnen und Schüler verfassen:

- Aus Teilaufgabe **B1** wissen wir, dass die Steigung in dem Intervall links vom Scheitelpunkt (lokalen Maximum) positiv ist und rechts vom Scheitelpunkt negativ (zusätzlich auch hinreichendes Kriterium);
- In Teilaufgabe **C2** wurde gezeigt, dass die Steigung im Scheitelpunkt (im lokalen Maximum) Null entsprechen muss.

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe ist für die Sekundarstufe 2 gedacht. Der Begriff der Steigung sollte den Schülerinnen und Schülern vorab bekannt sein. Sie sollten zudem schon in der Lage sein, die durchschnittliche Steigung einer Funktion in einem gegebenen Intervall mit Hilfe des Differenzenquotienten zu berechnen. Für die letzten Teilaufgaben der Aufgabe muss schließlich auch der Differentialquotient (h-Methode) bereits bekannt sein, damit auch die Steigung einer Funktion in einem Punkt berechnet werden kann. Das Lernziel dieser Aufgabe ist es, dass die Schülerinnen und Schüler das Monotoniewechselkriterium für lokale Minima und Maxima aufstellen.
Das Vergleichen in Teilaufgabe **B1** dient vor allem der Entwicklung des Monotoniewechselkriteriums. In Teilaufgabe **B2** sollen die Schülerinnen und Schüler den Schritt von der durchschnittlichen Steigung zur Steigung in einem Punkt erarbeiten. Durch die offene Fragestellung soll das kreative Problemlösen gefördert werden, was jedoch durch die schon bekannten Inhaltsfelder nicht zu einer Überforderung führen sollte.
Nachdem sie die Steigung in einem Maximum bzw. Minimum ermittelt haben, sollen die Schülerinnen und Schüler die notwendigen Kriterien für die Existenz lokaler Maxima und Minima erarbeiten.
In der Nachbereitung der Aufgabe sollte das Monotoniewechselkriterium noch einmal erläutert werden. Hier ist insbesondere darauf zu achten, dass das Monotoniewechselkriterium sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für Extremstellen ist, während die Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion lediglich Kandidaten für lokale Extremstellen sind. Außerdem ist die Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen ein Thema, das während der Aufgabe nur angerissen werden konnte.