Eine normale Allee

Rechnen mit der Normalverteilung

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde in der Ippendorfer Allee in Bonn Ippendorf erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab. Bei der betrachteten Baumart handelt es sich um junge schwedische Mehlbeeren.

A1 Es wurden die Umfänge von 14 Bäumen gemessen. Die Messwerte sind in der folgenden Tabelle verzeichnet:

	Stammumfang [in Metern]	Stammumfang gerundet [in Metern]
Baum 1	0,18	0,2
Baum 2	0,24	0,2
Baum 3	0,25	0,3
Baum 4	0,24	0,2
Baum 5	0,12	0,1
Baum 6	0,49	0,5
Baum 7	0,31	0,3
Baum 8	0,17	0,2
Baum 9	0,26	0,3
Baum 10	0,29	0,3
Baum 11	0,24	0,2
Baum 12	0,42	0,4
Baum 13	0,28	0,3
Baum 14	0,18	0,2

A2 Der Mittelwert wird wie folgt berechnet: $\bar{x} = \frac{1\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}5}{14} \approx 0,26$
Mit den Messdaten ergibt sich folgende Tabelle:

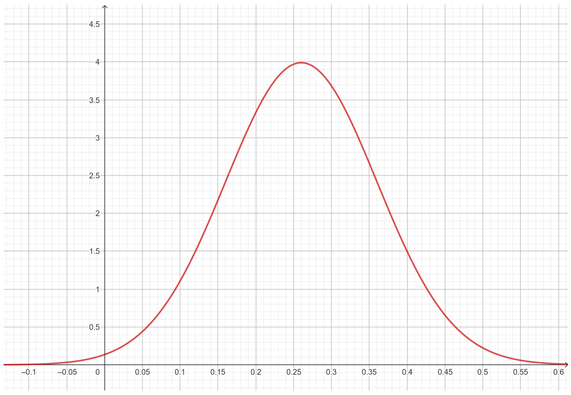
Stammumfang gerundet	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Absolute Häufigkeit	1	6	5	1	1
Relative Häufigkeit	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

A3 Es gilt:

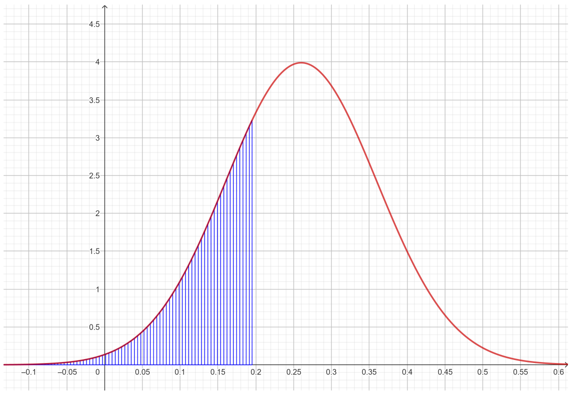
$$s = \sqrt{(0,1-0,26)^2 \cdot \frac{1}{14} + (0,2-0,26)^2 \cdot \frac{6}{14} + (0,3-0,26)^2 \cdot \frac{5}{14} + (0,4-0,26)^2 \cdot \frac{1}{14} + (0,5-0,26)^2 \cdot \frac{1}{14}}$$
$$\approx 0,10$$

Die Standardabweichung beträgt demnach 0,1.

B1 Der Erwartungswert beträgt $\mu = \bar{x} = 0,26$ und die Standardabweichung beträgt $\sigma = 0,1$. Zu zeichnen ist somit der Graph der Funktion $f_{0,26;0,1}(x) = \frac{1}{0,1\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-0,26}{0,1})^2}$.



B2 Die gesuchte Fläche ist in der Skizze blau markiert:



Gesucht ist $\mathbb{P}(X \leq 0,75 \cdot 0,26) = \mathbb{P}(X \leq 0,195)$. Wir berechnen dafür das folgende Integral:

$$F_{0,26;0,1}(0,195) = \int_{-\infty}^{0,195} \frac{1}{0,1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-0,26}{0,1})^2}\, dx \approx 0,26$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Stammumfang des Baumes kleiner oder gleich dem 0,75-fachen des Erwartungswerts ist, beträgt somit etwa 22,6 Prozent.

Bei der Bestimmung der relativen Häufigkeit dieses Ereignisses mithilfe der Stichprobenergebnisse aus Aufgabenteil **A** ist es wichtig zu unterscheiden, ob mit den gerundeten oder den exakten Werten gerechnet wurde.
Die relative Häufigkeit des Ereignisses mit den gerundeten Werten beträgt:

$$\mathbb{P}(X \leq 0,75 \cdot 0,26) = \mathbb{P}(X \leq 0,195) = \mathbb{P}(X = 0,1) = \frac{1}{14} \approx 0.07 = 7\%.$$

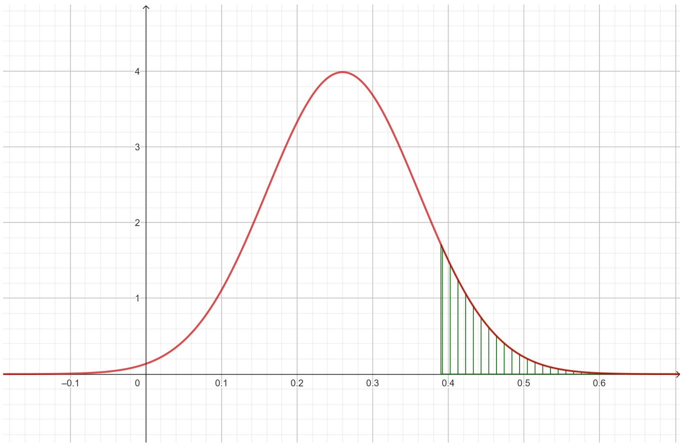
und ist damit deutlich geringer als die mithilfe der Funktion berechnete Wahrscheinlichkeit. Grund dafür ist, dass Bäume mit einem Stammumfang von beispielsweise 0,18 Metern in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da hier auf 0,2 Meter aufgerundet wurde.

Die relative Häufigkeit des Ereignisses beträgt (wenn man die exakt gemessenen Werte betrachtet):

$$\mathbb{P}(X \leq 0,75 \cdot 0,26) = \mathbb{P}(X \leq 0,195) = \frac{4}{14} \approx 0,29 = 29\%$$

Die mit der Funktion berechnete Wahrscheinlichkeit ist geringer als die relative Häufigkeit dieses Ereignisses in de Stichprobe. Dies kann damit erklärt werden, dass die Stichprobe nur auf eine endliche, relativ kleine Menge von Werten begrenzt ist. Dadurch macht ein einzelner Baum innerhalb der Stichprobe einen größeren Anteil aus.

B3 Die gesuchte Fläche ist in der Skizze grün markiert:



Gesucht ist $\mathbb{P}(X > 1,5 \cdot 0,26) = \mathbb{P}(X > 0,39) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0,39)$. Wir berechnen dafür das folgende Integral:

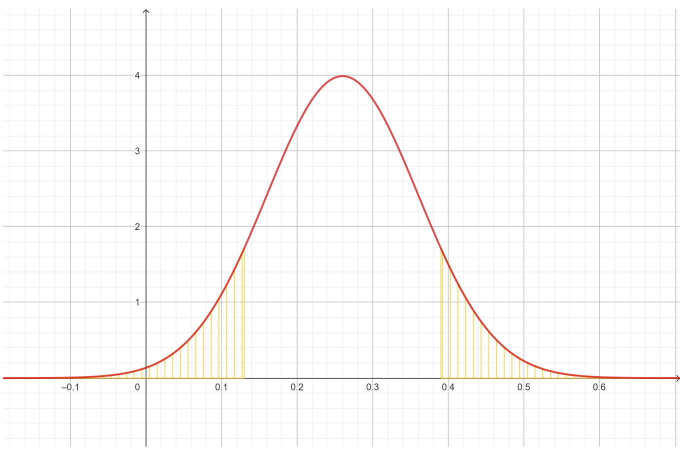
$$1 - F_{0,26;0,1}(0,39) = 1 - \int_{-\infty}^{0,39} \frac{1}{0,1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-0,26}{0,1})^2}\, dx \approx 1 - 0,9 = 0,1 = 10\%$$

In diesem Fall macht es keinen Unterschied, ob mit den gerundeten oder den exakten Werten der Stichprobenergebnisse gerechnet wird. Die relative Häufigkeit des Ereignisses beträgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 1,5 \cdot 0,26) &= \mathbb{P}(X > 0,39) = \mathbb{P}(X = 0,4) + \mathbb{P}(X = 0,5) \\ &= \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} \approx 0,14 = 14\% \end{aligned}$$

Die mit der Funktion berechnete Wahrscheinlichkeit und die relative Häufigkeit dieses Ereignisses in der Stichprobe liegen recht nah beieinander. Eine Ursache dafür könnte sein, dass dies in beiden Fällen ein recht seltenes Ereignis ist.

B4 Die entsprechende Fläche ist in der folgenden Abbildung gelb markiert.



Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 0,26 \cdot \frac{1}{2} \text{ oder } X > 0,26 \cdot \frac{3}{2}) &= \mathbb{P}(X < 0,13) + \mathbb{P}(X > 0,39) \\ &= 1 - \mathbb{P}(0,13 \leq X \leq 0,39)\end{aligned}$$

Wir berechnen dazu das folgende Integral:

$$\begin{aligned}1 - (F_{0,26;0,1}(0,39) - F_{0,26;0,1}(0,13)) &= 1 - \int_{0,13}^{0,39} \frac{1}{0,1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-0,26}{0,1})^2}\, dx \\ &\approx 1 - 0,81 = 0,19 = 19\%\end{aligned}$$

B5 Anhand der Tatsache, dass der Flächeninhalt der gesamten Fläche zwischen Graph und x-Achse 1 beträgt, schätzen wir $z = 0.4$. Rechnerisch kann das Ergebnis wie folgt bestimmt werden:
Gesucht ist z, sodass $\mathbb{P}(X \leq z) = 0,8$. Wir bestimmen also z so, dass:

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{0,1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-0,26}{0,1})^2}\, dx \approx 0,8$$

Mit dem Taschenrechner kann das Integral näherungsweise berechnet werden und es folgt $z \approx 0,344$. Das exakte Ergebnis liegt also recht nah an der Schätzung.

C1 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$, dass der Stammumfang eines Baumes höchstens um die Standardabweichung σ vom Erwartungswert μ abweicht.
Diese Wahrscheinlichkeit kann mithilfe des folgenden Integrals berechnet werden:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\mathrm{d}t$$

Mit unseren Werten für μ und σ folgt:

$$\frac{1}{0,1\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0,26-0,1}^{0,26+0,1} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-0,26}{0,1})^2}\mathrm{d}t \approx 0,68 = 68\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Stammumfang eines Baumes höchstens um die Standardabweichung σ vom Erwartungswert μ abweicht, beträgt somit etwa 68 Prozent.

C2 Nach den Sigma-Regeln gilt $\mathbb{P}(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) = 0,95$. Wir setzen die Werte für μ und σ ein und erhalten:

$$\mathbb{P}(0,26 - 1,96 \cdot 0,1 \leq X \leq 0,26 + 1,96 \cdot 0,1) = 0,95 \Leftrightarrow \mathbb{P}(0,064 \leq X \leq 0,456) = 0,95$$

Damit haben 95 Prozent aller Bäume einen Stammumfang zwischen 6,4 und 45,6 Zentimetern.

C3 In unserer Stichprobe liegen 13 der 14 betrachteten Baumstämme in dem Intervall aus Teilaufgabe **C2**. Dies machen also 92,8 Prozent aller betrachteten Bäume aus, also etwas weniger als es nach den Sigma-Regeln sein sollte. Sobald das Ereignis schon auf einen Baumumfang nicht zutrifft, kann das Ereignis höchstens noch eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{13}{14} \approx 0,9286 \mathrel{\widehat{=}} 92,86\,\%$ haben, was schon nicht mehr in dem gewünschten Intervall liegt. Durch einen größeren Stichprobenumfang ließe sich dieses Problem zumindest annähernd beheben.

Didaktischer Kommentar

Dieser mathematische Spaziergang richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 und ist vor allem für den Leistungskurs konzipiert, da die Normalverteilung thematisiert wird, welche im Mathematik-Grundkurs oftmals gar nicht behandelt wird. Voraussetzung für die Bearbeitung der Aufgaben ist, dass die Normalverteilung bereits im Unterricht thematisiert wurde, sodass die Schülerinnen und Schüler wissen, wie sie Intervallwahrscheinlichkeiten berechnen können. Da bei diesem Spaziergang der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines graphikfähigen Taschenrechners eine große Bedeutung zukommt, sollte aus dem Unterricht ebenfalls bekannt sein, wie sich Intervallwahrscheinlichkeiten und Berechnungen von Intervallgrenzen mit technischer Hilfe durchführen lassen. Zudem sollten auch die $\sigma-$Regeln sowie der Begriff der empirischen Standardabweichung bekannt sein, da in den Teilaufgaben **A3**, **C1** und **C2** darauf Bezug genommen wird. Daher bietet es sich an, diesen Spaziergang als Abschluss des Themas *Normalverteilung* zu behandeln, auch um diese vielleicht zunächst recht komplizierte Verteilung einmal in einem Alltagskontext zu erleben.

Im Anschluss an diesem Spaziergang könnte im Biologie-Unterricht vertieft werden, inwiefern sich die Baumentwicklung auf Alleen und gemischten Straßen unterscheidet und was die Ursachen dafür sein könnten (Standortfaktoren, ökologische Aspekte).

Die Teilaufgaben **A1** bis **A3** dienen zunächst der Datensammlung und der Bestimmung der Parameter μ und σ für die Normalverteilung. Die in Teilaufgabe **B1** gezeichnete Skizze soll den Schülerinnen und Schülern helfen, einen Überblick über die Funktion zu bekommen. Zudem kann sie eine Hilfestellung für die Schätzung in Teilaufgabe **B5** sein. Die Teilaufgaben **C1** und **C2** vertiefen noch einmal die σ-Regeln, wobei insbesondere die Interpretation des Integrals in **C1** wichtig ist, um den Rechenprozess auch einmal rückwärts nachzuvollziehen und sich so auch an die für die nächsten Aufgaben relevanten $\sigma-$Regeln zu erinnern.

Als Lernort für diesen Mathematischen Spaziergang bietet sich eine Allee an, welche nicht an einer befahrenen Straße liegt und mindestens zehn Bäume umfasst. Weiter sollte sich in der Nähe der Allee ein ruhiger Ort zum Zeichnen und Rechnen befinden. Es werden Schreibmaterial, graphikfähige Taschenrechner, ein Zollstock für jedes Paar (um einen Meter Höhe abzumessen) und ein Maßband für jedes Paar (um den Umfang zu messen) benötigt. Für die Bearbeitung der Aufgaben sollten etwa 120 Minuten eingeplant werden.