

Sekundarstufe 2  
Analysis und Geometrie

- Volumen von Rotationskörpern
- Kegelvolumen

**Material**

Maßband, Lineal, Schreibmaterial, Taschenrechner

**Zeit**

60 Minuten

**Lernort**

Gerade gewachsener Baum, dessen Stamm nach oben spitz zuläuft

# Kannst du das STÄMMEn?

## Integralrechnung mit Bäumen

Holz ist in unserem Leben allgegenwärtig. So findet es beispielsweise Anwendung als Werkstoff für Möbel, als Bauholz oder auch als Energiequelle zum Heizen – die Verwendungsmöglichkeiten sind vielfältig. Ungeachtet der Nutzung stammt das verwendete Holz von Bäumen, die sehr lange gewachsen sind. Wusstest du, dass der vermutlich älteste Baum der Welt in Kalifornien steht? Das Alter der langlebigen Kiefer wird auf ungefähr 5080 Jahre geschätzt.



In der folgenden Aufgabe werdet ihr euch einen Baumstamm genauer ansehen und bestimmen, wie viel Holz daraus gewonnen werden kann.

**A1** Überlegt gemeinsam, welcher geometrische Körper für die Modellierung des Baumstamms geeignet ist. Erläutert, warum eure gewählte Näherung nicht der Realität entspricht.

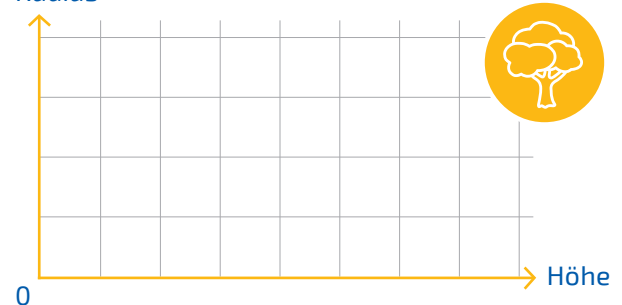
Ihr habt sicherlich festgestellt, dass sich verschiedene Körper für die Modellierung eignen können. In dieser Aufgaben sollt ihr im Folgenden davon ausgehen, dass euer Baumstamm die Form eines Kegels hat.

**A2** Messt den Umfang des Baumstamms auf zwei unterschiedlichen Höhen, die ihr gut erreichen könnt und notiert jeweils Umfang und Höhe. Wählt die Höhen dabei so, dass keine großen lo-


kalen Unebenheiten auftauchen und achtet darauf, dass die Messungen nicht in unmittelbarer Bodennähe durchgeführt werden.

**A3** Im Folgenden sollst du das Verhältnis von Baumhöhe und Stammumfang grafisch visualisieren. Nutze dazu das folgende Koordinatensystem und lege eine geeignete Achsenskalierung fest.

Radius

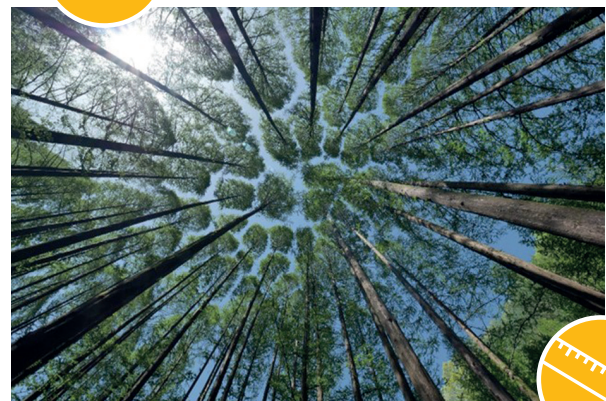


**B1** Übertrage deine Messdaten aus Teilaufgabe **A2** in das Koordinatensystem. Verbinde beide Punkte durch eine Gerade und bestimme die zugehörige Geradengleichung. Was bedeutet die Gerade im Sachzusammenhang?

**B2**  Überprüft eure Geradengleichung durch Messen eines dritten Umfangs auf einer anderen Höhe. Bestimmt dabei die absolute Abweichung des mithilfe der Geraden errechneten Radius von dem Radius aus der dritten Messung. Gebt die relative Abweichung in Prozent an. Liegt eure Abweichung über 15 Prozent, solltet ihr die Rechnung mit Messwerten auf anderen Höhen wiederholen. Diskutiert, warum Abweichungen auftreten können.

**B3** Bestimme mithilfe der Geradengleichung die Höhe des Baumes. Schätze per Augenmaß ab, ob die errechnete Höhe realistisch erscheint.

**C1** Bestimme mithilfe der Geradengleichung und der errechneten Höhe das Volumen des Baumstamms. Interpretiere den Baumstamm dabei als Rotationskörper und verwende deine Kenntnisse zur Integralrechnung.



### Weißt du noch?

In der Geometrie wird ein Körper als Rotationskörper bezeichnet, wenn seine Oberfläche durch Rotation einer erzeugenden Kurve um eine Rotationsachse gebildet wird. Für einen Rotationskörper, der durch Drehung einer Kurve im Intervall  $[a, b]$  um die  $x$ -Achse entsteht, berechnet sich das Volumen  $V$  mit folgender Formel:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Voraussetzung ist, dass die erzeugende Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig ist.

**C2** Das Volumen von Baumstämmen oder Stammstücken wird in der Forstwirtschaft in sogenannten „Festmetern“ angegeben. Ein Festmeter entspricht dabei einem Kubikmeter reinen Holzes ohne Luftzwischenräume. Wie viele Festmeter Holz hat euer Baum?

**C3** Alternativ kannst du das Volumen des Stamms auch bestimmen, indem du die Formel für das Volumen eines Kegels verwendest. Nutze dazu die Stammhöhe aus Teilaufgabe **B3** und führe eine Messung des Stammumfangs am Boden durch. Berechne auf diese Weise erneut das Kegelvolumen. Vergleiche das in Teilaufgabe **C2** berechnete Rotationsvolumen mit dem neu berechneten Kegelvolumen. Wie sind potenzielle Abweichungen zu erklären?

Unterstützt durch:

**hausdorff**  
CENTER FOR MATHEMATICS

JOACHIM  
HERZ  
STIFTUNG

