UNIVERSITÄT BONN | MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Kennst du die Kettenregel?

Kettenlinien im Alltag

Was hat der Straßenverkehr mit Mathematik zu tun? Kann Mathematik dabei helfen, den Alltag sicherer zu machen? Das und mehr findest du in dieser Aufgabe heraus und lernst dabei die Kettenlinien kennen.

Sekundarstufe 2
Analysis

- Modellierung quadratischer Funktionen
- Ableitungen von Exponentialfunktionen
- Kettenlinie

Material
Zollstock / Maßband, Bindfaden, Schreibmaterial, grafikfähiger Taschenrechner

Zeit
120 Minuten

Lernort
Straßenpoller mit angehängten Ketten

Achtung: *Du kannst die Aufgabe vom Bürgersteig aus bearbeiten. Achte auf andere Verkehrsteilnehmende und behalte den Straßenverkehr immer im Blick!*

Absperrpoller mit dazwischen hängenden Ketten aus Metallsegmenten helfen, an gefährlichen Stellen die Verkehrsteilnehmenden zu trennen, um so für mehr Sicherheit zu sorgen. Sie können auch Bäume umzäunen, um diese zu schützen. An unübersichtlichen Stellen sollen sie Fußgängerinnen und Fußgänger davon abhalten, die Straße zu überqueren. Mathematikerinnen und Mathematiker haben sich lange mit der Form der Kette befasst und sie als Kettenlinie beschrieben.

A1 Begib dich zu geeigneten Absperrpollern und betrachte eine Kette. Beschreibe, an welche dir bekannte Form dich der Kurvenverlauf erinnert.

A2 Stelle dir vor, die Verkehrsbehörde möchte die Straßenpoller für mehr Sicherheit im Straßenverkehr näher untersuchen. Erstelle ein geeignetes Koordinatensystem, in das du fünf Messpunkte der Kette eintragen kannst. Wähle dabei die y-Achse so, dass der Rand des ersten Kettengliedes eine Koordinate der Form $(0,n)$ hat.

A3 Erstelle auf Grundlage deiner Messergebnisse eine quadratische Funktion f, die den Verlauf der Kurve beschreibt. Verwende dazu den ganz linken, den ganz rechten und den in der Mitte liegenden Messpunkt. Beurteile die Genauigkeit der Funktion durch Einsetzen der übrigen Messpunkte.

Im Folgenden wollen wir uns mit der Länge der Kette beschäftigen.

Wusstest du schon?

Für die Länge einer Parabel f mit $f(x) = ax^2 + c$ gilt: Die Länge $L(k)$ des Parabelbogens im Intervall $[0,k]$ ist gegeben durch

$$L(k) = \frac{1}{4a} \cdot \ln\left(2ak + \sqrt{(2ak)^2 + 1}\right) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \sqrt{(2ak)^2 + 1}$$

B1 Messt zunächst die Länge der Kette unter Verwendung von Zollstock und Bindfaden. Berechnet anschließend die Länge der Kette unter Verwendung der quadratischen Funktion. Verschiebt hierzu die Parabel so, dass der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt. Nutzt dann die Symmetrie der Parabel aus! Vergleicht eure beiden Ergebnisse für die Kettenlänge miteinander.

B2 Die Ketten dürfen im Verhältnis nicht zu lang sein. Die Länge der Kette soll maximal 20 Prozent größer sein als der Abstand der Poller, da sonst Fußgängerinnen und Fußgänger über die Kette stolpern könnten. Berechne den absoluten und relativen Überschuss der Länge der durchhängenden Kette gegenüber dem Abstand der Poller. Beurteile dein Ergebnis dahingehend, ob von der Kette eine Gefahr für die Menschen ausgeht.

Bereits im 17. Jahrhundert war bekannt, dass die Kettenlinie nicht durch eine Parabel beschrieben wird. Tatsächlich handelt es sich um den Cosinus hyperbolicus (cosh). Dieser kann allgemein formuliert werden durch

$$l(x) = g \cdot \cosh\left(\frac{x+h}{g}\right) + j = \frac{g}{2} \cdot \left(e^{\frac{x+h}{g}} + e^{-\frac{x+h}{g}}\right) + j$$

mit $g, h, j \in \mathbb{R}, g \neq 0$

C1 Nutze die zweite Darstellung der obigen Funktion, um die erste Ableitung $l'(x)$ zu berechnen. Berechne anschließend die lokale Extremstelle von l.

C2 Bestimme nacheinander die drei Parameter: Gib unter Verwendung deiner Rechnung aus Teilaufgabe **C1** den Wert von h an. Probiere anschließend verschiedene Kombinationen von Werten für g ($1 \leq g \leq 2{,}5$) und j ($-2 \leq j \leq 0$) aus, damit der Graph des Cosinus hyperbolicus die Kette möglichst gut beschreibt. Dein Taschenrechner kann dir dabei helfen. Wie erklärst du dir also, dass die Kettenlinie lange Zeit als Parabel angenommen wurde und dass sie sogar als Zeichenvorlage für Parabeln galt?

Wusstest du schon?

Die beiden in dieser Aufgabe vorkommenden Funktionsterme $f(x) = e^x$ und $f(x) = ln(x)$ stehen für die Exponential- und für die natürliche Logarithmusfunktion. Du findest beide auf dem Taschenrechner auf den Tasten, die mit „e^x" und „ln" beschriftet sind. Wenn du wissen willst, was es damit genau auf sich hat, dann frage deinen Lehrer oder deine Lehrerin danach! Du kannst dabei spannende Mathematik entdecken!

Unterstützt durch:
hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS
JOACHIM HERZ STIFTUNG