UNIVERSITÄT BONN — MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Sekundarstufe 2
Analysis

- Polynomfunktionen
- Integration

Material
Schreibmaterial, Zollstock, grafikfähiger Taschenrechner

Zeit
90 Minuten

Lernort
Halfpipe

Extreme Kurven

Integration an der Halfpipe

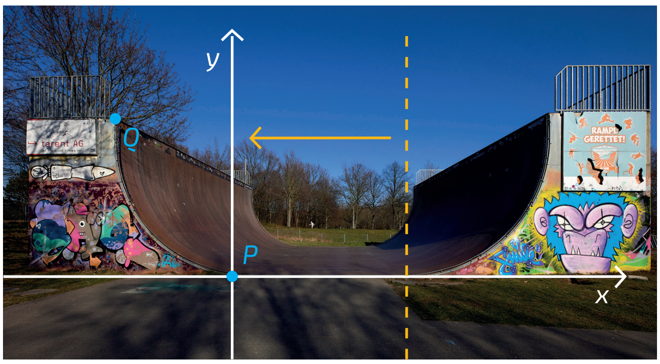
Halfpipes sind für Skateboarderinnen und Skateboarder besonders interessant, da man mit ihnen im wahrsten Sinne des Wortes Höhenflüge erleben kann. Das senkrechte Stück an beiden Enden misst bis zu 70 Zentimeter, die höchsten Punkte liegen bis zu 4 Meter oberhalb des Bodens.

In dieser Aufgabe werdet ihr das Profil einer Halfpipe mit Hilfe einer Polynomfunktion modellieren. Stelle dir vor, die Halfpipe soll eine (eventuell neue) Holzverkleidung bekommen. Für die Modellierung der Bahnkurve bietet ein symmetrisches Polynom vierten Grades eine gute Annäherung. Die Fläche der Seitenverkleidung unterhalb der Fahrbahn kann dann durch die Berechnung eines Integrals bestimmt werden.

A1 Wir wollen die Form der Fahrbahn mithilfe eines symmetrischen Polynoms vierten Grades modellieren, welches genau eine lokale Minimalstelle am Scheitelpunkt hat. Der rechte Ast der Funktion sei dabei um den konstanten Abschnitt der Fahrbahn nach rechts verschoben (siehe Abbildung). Wähle das Koordinatensystem wie in der Abbildung angegeben und miss die Punkte $P=(0,p_2)$ und $Q=(-q_1,q_2)$ wie in der Abbildung angegeben aus. Bestimme ein symmetrisches Polynom vierten Grades von der Form $f(x)=ax^4+c$, welches die Form der Fahrbahn modelliert.

A2 Bestimme eine Stammfunktion des Polynoms aus Teilaufgabe **A1**.

A3 Nimm beispielhaft an, dass deiner Stadt für den Bau der (neuen) Holzverkleidung ein Angebot von einer Schreinerei vorliegt. Dabei werden 49 Euro pro Quadratmeter Holzverkleidung berechnet. Berechne die Kosten für die gesamte Außenverkleidung der Halfpipe. Bestimme dazu den Flächeninhalt,



Bilder: oben links – Projektteam | alle weiteren – Volker Lannert

- den das Polynom aus Teilaufgabe **A1** im Intervall $[-q_1,0]$ mit der x-Achse einschließt. Wie oft benötigst du diese Fläche?
- der linken und rechten Seitenwand der Halfpipe und
- der rechteckigen Bereiche der Vorderansicht, die nicht durch den Flächeninhalt unterhalb des Polynoms erfasst werden.

Stelle dir vor, ein anderer Anbieter ist der Auffassung, dass das in Teilaufgabe **A1** aufgestellte Polynom keine gute Annäherung an die Realität sei. Er berechnet seinen Kostenvoranschlag auf Grundlage folgender Funktion mit Hilfe geeigneter Parameter a, b und c: $g(x) = \frac{a}{\sqrt{x+b}} - c$ (x und $g(x)$ jeweils in Metern)

B1 Zeichne die Funktion g mit deinem grafikfähigen Taschenrechner und wähle eine geeignete Fenstereinstellung. Passe die Werte für a, b und c so an, dass der Graph der Funktion g in etwa der Halfpipe entspricht. Diskutiere anschließend mit einem Partner oder einer Partnerin, ob diese Annäherung des zweiten Anbieters tatsächlich sinnvoller ist. Bestimmt dazu durch Messungen an der Halfpipe drei weitere Punkte (z. B. in Meter-Schritten auf der x-Achse). Wie groß ist jeweils die Abweichung des Messwertes von den entsprechenden Werten von f und g an diesen Stellen?

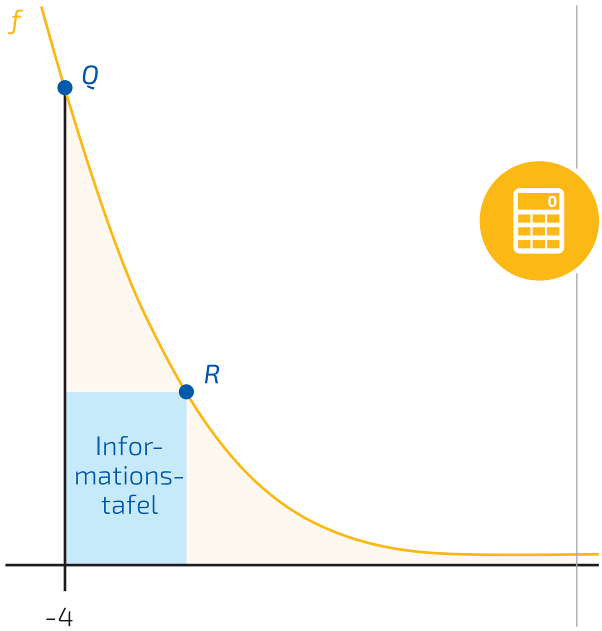
B2 Berechne, wie viele Quadratmeter Holzverkleidung für die Fläche unterhalb des Graphen der Funktion g im Intervall $[-q_1,0]$ benötigt werden.

Hinweis: *Du kannst hierfür deine Kenntnisse zur Integration mittels Substitution nutzen.*

B3 Vergleiche dein Ergebnis aus Teilaufgabe **B2** mit dem in Teilaufgabe **A3** errechneten Flächeninhalt. Welche Funktionsmodellierung wäre für die Stadt günstiger?

Für die folgende Teilaufgabe benötigst du das Polynom f aus Teilaufgabe **A1**. Stelle dir vor, unterhalb der Fahrbahn soll an der Seitenverkleidung eine rechteckige Informationstafel angebracht werden. Hierbei liegt eine Seite der Informationstafel auf der x-Achse und der Punkt R auf dem Fahrbahnrand (siehe Abbildung).

C1 Berechne die Koordinaten des Punktes R so, dass der Flächeninhalt der Informationstafel maximal wird.



Wusstest du schon?

Erst seit den Sommerspielen 2021 in Tokio gehört das Skateboardfahren zu den olympischen Disziplinen. Durch die Einführung dieser neuen Disziplin sollten vor allem junge Menschen für Olympia begeistert werden. Dass dies Erfolg hatte, zeigte die Japanerin Momiji Nishiya, die mit gerade einmal 13 Jahren Gold in der Disziplin Street holte.
Das Fahren auf einer Halfpipe, wie du sie hier untersucht hast, ist übrigens kein Teil der olympischen Disziplin. Snowboardfahrerinnen und Snowboardfahrer der olympischen Winterspiele zeigen jedoch schon seit 1998 ihre spektakulären Tricks auf der klassischen Halfpipe.

Unterstützt durch: hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS, JOACHIM HERZ STIFTUNG

Bild: lizenzfreies Foto