UNIVERSITÄT BONN
MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Sekundarstufe 2
Analysis

- Eigenschaften von Exponentialfunktionen
- Differential- und Integralrechnung mit Exponentialfunktionen
- partielle Integration

Material
Schreibmaterial, Zollstock, Stoppuhr, grafikfähiger Taschenrechner

Zeit
90 Minuten

Lernort
Kurviger Bach- oder Flussabschnitt

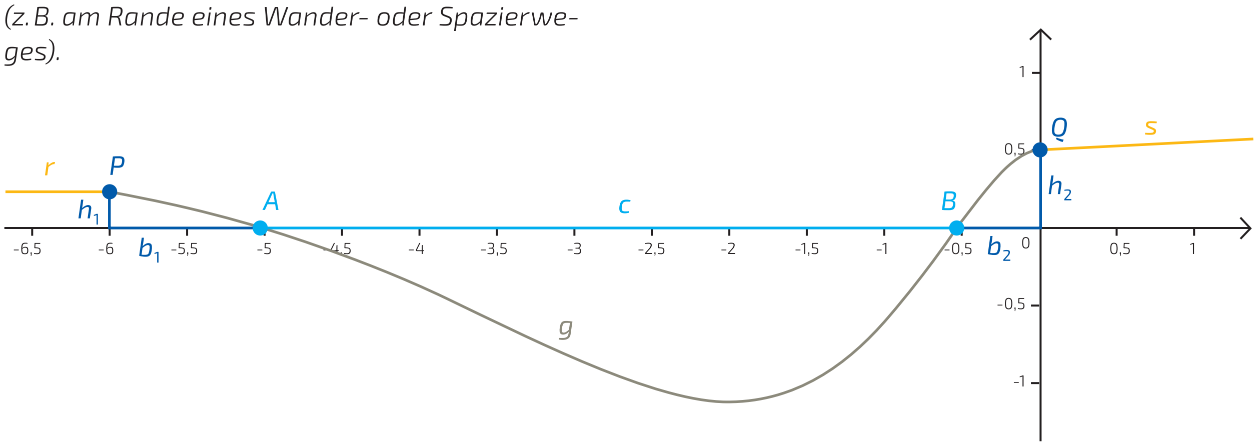
Fließende Übergänge

Modellierung eines Flussbettes

Viele Wanderwege verlaufen nah an kleinen Flüssen oder Bächen. Beim Spazierengehen kann man dann dem leichten Plätschern lauschen oder sogar kleine Lebewesen beobachten. Oft wird nach sorgfältiger Aufbereitung auch Trinkwasser aus Bächen und Flüssen gewonnen. Hast du dich schon einmal gefragt, wie steil das Ufer ist oder wie tief das Wasser steht?

In dieser Aufgabe werdet ihr das Flussbett mithilfe von Funktionen modellieren. Außerdem berechnet ihr die Fließgeschwindigkeit und die Durchflussrate des Baches / Flusses. Sucht euch dazu einen geeigneten Bach- oder Flussabschnitt in eurer Nähe, welcher fernab einer Straße liegt (z. B. am Rande eines Wander- oder Spazierweges).

Um im folgenden Aufgabenteil das Flussbett und die beiden anliegenden Ufer in einem Koordinatensystem zu skizzieren, nutzen wir eine vereinfachte Modellierung: Das Flussbett wird durch eine Funktion g der Form $g_{a,b}(x) = a x^2 e^x + b$ (siehe



Bilder: links – lizenzfreies Foto | mittig – Projektteam | rechts – Volker Lannert

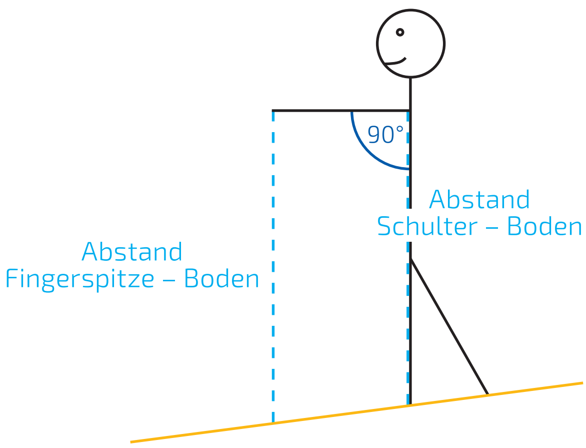
Wusstest du schon-Box), die in der Skizze grau dargestellt ist, angenähert. Die beiden Uferseiten werden durch lineare Funktionen (in der Skizze die gelb eingezeichneten Funktionen r und s) dargestellt. Außerdem könnt ihr annehmen, dass die Wasseroberfläche als konstante Funktion auf Höhe der x-Achse liegt.

A1 Nutze deinen grafikfähigen Taschenrechner, um dir die Funktion $g_{a,b}(x) = a\,x^2 e^x + b$ für verschiedene Werte von a und b anzuschauen. Wähle dabei $a < 0$ und $b > 0$. Sieh dir den Querschnitt deines Flusses an. Entscheide vor Ort, welches Flussufer steiler und welches flacher verläuft. In unserer folgenden Modellierung soll dann das flache Ufer links und das steile Ufer rechts sein (siehe Skizze auf der ersten Seite).

A2 Miss oder schätze zunächst die Breite des Flusses c sowie die Höhen h_1 und h_2 und die Breiten b_1 und b_2 bis zum Übergang zwischen dem gewölbten Flussbett und den jeweiligen Ufergeraden.

A3 Zeichne ein Koordinatensystem in einem geeigneten Maßstab. Erstelle eine Skizze deines Flussquerschnitts! Starte am besten mit dem Punkt $Q = (0\,, h_2)$, sodass die Wasseroberfläche dann der Strecke von $A = (-b_2 - c\,, 0)$ bis $B = (-b_2\,, 0)$ entspricht. Markiere dir außerdem den Punkt $P = (-b_2 - c - b_1\,, h_1)$.

A4 Messt an beiden Uferseiten jeweils den Abstand zum Boden an der Schulter und an den Fingerspitzen eures ausgestreckten Armes (siehe Abbildung). Berechnet daraus Schätzungen für die Steigung der beiden linearen Funktionen r und s.



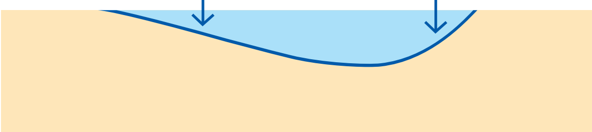
A5 Bestimmt mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben **A2 – A4** die Funktionsvorschriften der linearen Funktionen r und s. Zeichnet nun beide linearen Funktionen in euer Koordinatensystem ein.

A6 Die beiden Punkte P und Q sind nicht nur charakteristische Punkte für die linearen Funktionen r und s, sondern auch für die Funktion g der Form $g_{a,b}(x) = a\,x^2 e^x + b$ mit $-b_2 - c - b_1 \leq x \leq 0$. Bestimme damit die Parameter $a < 0$ und $b > 0$.

Hinweis: *Wir nennen a den Streckfaktor der Funktion. Je kleiner der Betrag von a ist, desto flacher wird die Senke des Flussbettes. b markiert den y-Achsenabschnitt und sorgt bei einer Veränderung für eine vertikale Verschiebung entlang der y-Achse.*

Wusstest du schon?

Gewundene Flussläufe werden Mäander genannt. Charakteristisch für Mäander ist, dass sie auf einer Seite von einem Prallhang und auf der anderen Seite von einem Gleithang begrenzt werden. Der Prallhang ist die äußere Kurve des Flussufers. Da die Strömung hier stärker ist als auf der Innenseite der Kurve, wird hier ein Teil des Ufers abgetragen. Am gegenüberliegenden Ufer, dem Gleithang, lagert sich wegen der geringeren Strömung Material ab. So lässt sich erklären, warum es sinnvoll ist, das Flussbett durch eine Funktion der Form $g_{a,b}(x) = a\,x^2 e^x + b$ zu modellieren.



A7 Stell dir vor, dass über die Senke eine geradlinige Brücke durch die Punkte P und Q gebaut werden soll. Berechne die Länge der Brücke sowie deren Steigung in Prozent.

A8 Berechne die maximale Tiefe des Flusses bei aktuellem Wasserstand.

Im folgenden Aufgabenteil werdet ihr euch mit der Fließgeschwindigkeit und mit der Durchflussrate beschäftigen.

B1 Messt dreimal die Fließgeschwindigkeit des Baches oder Flusses in Metern pro Sekunde (m/s) indem ihr z. B. schaut, wie lange ein Stock in der Flussmitte für eine ausgewählte Strecke braucht.

B2 Berechne das arithmetische Mittel der drei Fließgeschwindigkeiten aus Teilaufgabe **B1**.

B3 Das Produkt aus dem Flächeninhalt des Flussquerschnitts und der Fließgeschwindigkeit wird als Durchflussrate bezeichnet. Berechne die Durchflussrate an deinem ausgewählten Flussabschnitt.

Weißt du noch?

Um eine Funktion zu integrieren, die sich aus zwei Faktoren u und v zusammensetzt, kann die partielle Integration verwendet werden. Es gilt:

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Unterstützt durch: hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS, JOACHIM HERZ STIFTUNG

Bild: Projektteam