Sekundarstufe 2
Analysis

- Exponential- und Logarithmusfunktionen

Material
Kreide, Kamera, Maßband, Schreibmaterial

Zeit
120 Minuten

Lernort
Gehweg mit gleich großen Steinen, die in einer geraden Linie auf dem Boden angeordnet sind (mindestens 300 Stück, z. B. die Steine des Bodenleitsystems für Sehbehinderte)

Hier geht's hoch hinaus

Exponentielles Wachstum

Habt ihr schon einmal davon gehört, dass exponentielles Wachstum langfristig jedes lineare oder polynomiale Wachstum übersteigt? Beim exponentiellen Wachstum vervielfacht sich eine Größe in einem Zeitschritt immer um denselben Faktor. Es tritt beispielsweise bei der Zinsrechnung oder bei der Vermehrung von Bakterien und Viren auf. Ist der Faktor kleiner als 1, so sprechen wir von exponentiellem Zerfall. Ein klassisches Beispiel hierfür ist der Zerfall von radioaktivem Material.

Ihr habt vielleicht schon einmal gesehen, dass man beim Rechnen mit Exponentialfunktionen schnell große Zahlen herausbekommt. Um sich dies aber noch besser vor Augen zu führen, wollen wir heute einige Aufgaben betrachten, die zur Visualisierung von Exponentialfunktionen dienen. Außerdem wollen wir uns fragen, was Logarithmusfunktionen eigentlich damit zu tun haben.

A1 Vervollständige die unten stehende Tabelle.

A2 Mithilfe der Steine auf dem Boden könnt ihr die Ergebnisse aus Teilaufgabe **A1** visualisieren. Wählt dazu einen Stein als nullten Stein aus. Der Stein daneben soll der erste Stein sein, der daneben der zweite und so weiter. Markiert nun diejenigen Steine mit den Nummern der Form 2^k mit $k = 1, 2, \dots, 8$.

Anschließend kann sich je ein Mitschüler oder eine Mitschülerin auf einen markierten Stein stellen. Haltet euer Ergebnis mit einem Foto fest.

A3 Könnt ihr die Punkte der Form $(k, 2^k)$ gut in ein Koordinatensystem einzeichnen? Diskutiert, warum das schwierig ist. Überlegt gemeinsam, wie ihr die Einheiten auf dem Koordinatensystem so wählen könnt, dass die Markierungen näher zusammenliegen und zeichnet eine Skizze in euer Heft.

A1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^k										

Bilder: links – Volker Lannert | rechts – lizenzfreies Foto

A4 Vervollständige mithilfe deiner Ergebnisse aus Teilaufgabe **A1** folgende Tabelle. Trage die Wertepaare aus der Tabelle in ein Koordinatensystem ein.

x	1	2	4	8	16	32
$\log_2(x)$						

A5 Fertige nun ein weiteres Koordinatensystem an und trage dort die Punkte der Form $(k, \log_2(2^k))$ ein ($k = 1, 2, \ldots, 8$).

A6 Was fällt euch bei eurem Ergebnis in Teilaufgabe **A5** auf? Vergleicht mit eurem Ergebnis aus Teilaufgabe **A3**. Diskutiert gemeinsam, was die Logarithmusfunktion zur Basis 2 mit den Werten der Exponentialfunktion tut und wofür sich das logarithmische Einteilen der Koordinatenachsen lohnt.

B1 Der Erdradius beträgt am Äquator im Schnitt ungefähr 6.378,137 Kilometer. Berechne hieraus den Umfang der Erde in Kilometern.

B2 Messt die Länge eines Steines an eurem Lernort aus. Stellt euch vor, die Stein-Linie würde einmal um den Äquator herumführen. Überlegt, wie viele Personen ihr wie in Teilaufgabe **A1** auf die Steine stellen könntet, ohne eine zweite Umrundung der Erde zu beginnen.

B3 Überlegt euch, welchen Wert für k (wie in Teilaufgabe **A1**) man für genau eine Umrundung bräuchte und gebt diesen auf zwei Nachkommastellen genau an.

B4 Auf welchen Wert für 2^k kommst du, wenn du für k die Anzahl der Schülerinnen und Schüler deiner Klasse einsetzt? Wie weit kommt ihr, wenn ihr euch wie in Teilaufgabe **A1** weiter aufstellt? Wie vielen Erdumrundungen entspricht das in etwa?

C1 Der Mond hat eine durchschnittliche Entfernung von 385.000 Kilometern zur Erde. Würde man vom Äquator aus eine Wendeltreppe senkrecht nach oben zum Mond bauen, deren Stufenhöhe der Länge der Steine an eurem Lernort entspricht, wie viele Stufen hätte diese Treppe? Stellt euch vor, ihr würdet euch wie in Teilaufgabe **A2** jetzt auf den Treppenstufen aufstellen. Wie viele Personen stehen auf der Wendeltreppe?

C2 Überlegt gemeinsam, ob euch ähnliche Demonstrationen für das schnelle Wachstum von Exponentialfunktionen einfallen.

Weißt du noch?

Eine Funktion der Form $f(x) = a^x$ mit Basis $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt Exponentialfunktion. Exponentialfunktionen haben in den Naturwissenschaften, zum Beispiel bei der mathematischen Beschreibung von Wachstumsvorgängen, eine herausragende Bedeutung.

Exponentielles Wachstum liegt dann vor, wenn die Basis größer als 1 ist. In diesem Fall vervielfacht sich die Bestandsgröße in gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor. Wenn $a < 1$ ist, liegt exponentieller Zerfall vor. Hier nimmt die Bestandsgröße im zeitlichen Verlauf ab.

Weißt du noch?

Mithilfe der Logarithmusfunktion $y = \log_a(x)$ können Gleichungen mit Exponentialfunktionen gelöst werden. Als Logarithmus einer Zahl x bezeichnet man den Exponenten y, mit dem eine vorher festgelegte Zahl, die Basis a, potenziert werden muss, um die gegebene Zahl zu erhalten.

Es gilt also folgender Zusammenhang:

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a(x)$$

Bild: lizenzfreies Foto

Wusstest du schon?

Einer alten Legende nach lebte einst in Indien ein König namens Sheram. Während seiner Regentschaft wurde das Spiel, das heute Schach heißt, erfunden. Der König ließ Budiram, der als Erfinder gilt, zu sich an den Königshof rufen. „Ich möchte dich für deine wundervolle Erfindung belohnen", begrüßte der König den Mann. „Ich bin reich genug, dir auch den ausgefallensten Wunsch zu erfüllen. Sag mir nur, was du haben möchtest und ich erfülle es dir." Budiram schwieg eine Weile und dachte nach. Schließlich sagte er: „Herr, ich möchte auf dem ersten Quadrat des Schachbretts ein Reiskorn haben." „Ein gewöhnliches Reiskorn?" Der König traute seinen Ohren nicht. „Ja, Herr! Ein Reiskorn auf dem ersten Feld, zwei auf dem zweiten, vier auf dem dritten, acht auf dem vierten Feld..." „Es reicht!" rief der König verärgert. „Du sollst deine Reiskörner schon noch für alle 64 Quadrate des Schachbrettes erhalten, so wie du es wünschst. Aber wisse, dein Wunsch ist meine Großzügigkeit nicht wert. Mit dem Wunsch nach so einer geringen Belohnung hast du mir deine Missachtung gezeigt. Geh! Meine Diener werden dir deinen Sack Reiskörner bringen." Budiram ging lächelnd hinaus.

Quelle: https://www.youtube.com/watch?v=mx8mElzwF6gbe

D1 In der Wusstest du schon-Box könnt ihr die sogenannte „Reiskornparabel" nachlesen. Würdet ihr dem König zustimmen, dass Budirams Wunsch nach Reis wenig wert ist? Begründet eure Entscheidung.

D2 Im Folgenden sollt ihr die Situation aus der „Reiskornparabel" vor Ort nachstellen. Markiert dazu ein Feld von 64 Steinen mit eurer Kreide. Um keine Lebensmittel zu verschwenden, sollt ihr keine echten Reiskörner verwenden, sondern die theoretische Anzahl der Reiskörner pro Feld als Strichliste mit eurer Kreide festhalten. Auf den ersten Stein macht ihr also einen Strich, auf den zweiten zwei, auf den dritten vier und so weiter.

Wie viele Steine könnt ihr beschriften, bis der Platz für eure Strichliste zu klein wird?

D3 Was passiert mit der Anzahl der Reiskörner von Feld zu Feld? Findest du einen Weg, um die Vermehrung mathematisch auszudrücken?

D4 Berechne, wie viele Reiskörner auf dem 64. Feld liegen würden und schreibe die Anzahl auf den letzten Stein.

D5 Berechne, wie viele Reiskörner Budiram insgesamt bekommen würde.

Wusstest du schon?

Laut der geometrischen Summenformel gilt:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n=\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Dabei ist q eine beliebige reelle Zahl ungleich 1.

D6 Im Jahr 2007 haben über 100 Länder zusammen 650 Millionen Tonnen Reis geerntet. Berechnet, wie lange es dauern würde, bis der König die gewünschte Menge Reis an Budiram „aushändigen" könnte, wenn er über den Reis der ganzen Welt bestimmen könnte (Hinweis: 100 Reiskörner wiegen etwa 3 Gramm).

D7 Vergleiche nun die Werte von 2^k und $0{,}5^k$ für $k = 1, \ldots, 10$, indem du folgende Tabelle ausfüllst. Was fällt dir auf? Welche Entwicklung kannst du jeweils beobachten?

k	2^k	$0{,}5^k$
1		
2		
...		
10		

Unterstützt durch: hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS, JOACHIM HERZ STIFTUNG