Sekundarstufe 2
Analysis

- Komplexe Zahlen
- Koordinatisierung der Ebene
- Kartesische Koordinaten
- Vektoren
- Lösen von Gleichungen

Material
Schnur, Schreibmaterial, evtl. Kreide und Schachfiguren als Hilfsmittel

Zeit
90 Minuten

Lernort
Outdoor-Schachfeld oder ein schachfeldartiges Bodenmuster

Ganz schön komplex

Komplexe Zahlen auf dem Schachbrett

Bisher habt ihr in eurer Schulzeit folgende Zahlenmengen kennengelernt: die natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$), die ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$), die rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) sowie die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$). Diese lassen sich alle auf einer Zahlengeraden eintragen und auch ein Großteil mathematischer Operationen – wie die Grundrechenarten, quadrieren, potenzieren, logarithmieren, differenzieren und integrieren – lassen sich mit ihnen ausführen. Doch unter anderem die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung innerhalb der reellen Zahlen. Habt ihr eine Idee, wie wir damit umgehen können?

Die Gleichung $x^2 = -1$ können wir in den reellen Zahlen nicht lösen, da jedes Quadrat einer reellen Zahl nichtnegativ ist. Wir müssen also unseren Zahlenbereich erweitern, um die Gleichung lösen zu können. Dazu wurde in der Mathematik die sogenannte imaginäre Einheit i eingeführt, welche die Eigenschaft hat, dass ihr Quadrat eine negative Zahl ist:

$$\mathbf{i^2 = -1}$$

So können wir eine neue Zahlenmenge – die komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$) – einführen. Jede komplexe Zahl z kann dabei durch eine Kombination aus zwei reellen Zahlen dargestellt werden. Diese Kombination besteht aus einem Realteil und einem Imaginärteil und sieht folgendermaßen aus:

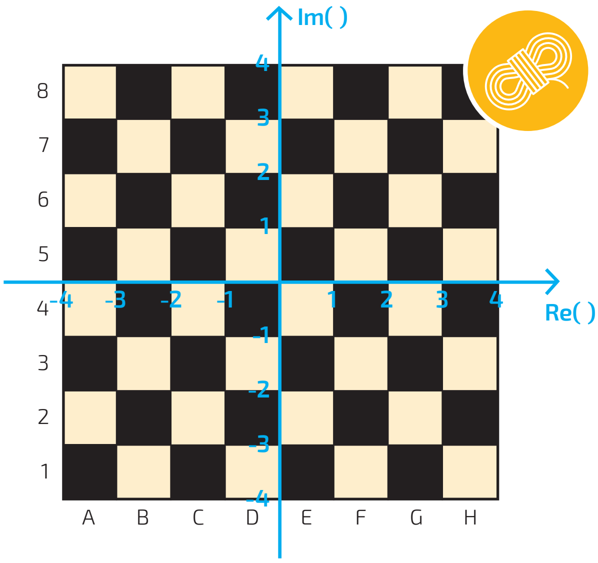
$z = a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei nennen wir a den Realteil und b den Imaginärteil von z.

In dieser Aufgabe könnt ihr die komplexen Zahlen anhand eines Schachfeldes entdecken.

Falls ihr an eurem Lernort kein Schachfeld zur Verfügung habt, könnt ihr eine Fläche von 8 x 8 Quadraten mit eurer Schnur begrenzen. Falls ihr an einem Schachfeld arbeitet, räumt zunächst alle Figuren vom Spielfeld.

A1 Sammelt Ideen, wie man die Zahlengerade erweitern kann, um auch komplexe Zahlen eintragen zu können. Welche Ideen erscheinen euch im Zusammenhang mit dem Schachbrett sinnvoll?

Im Folgenden wollen wir entdecken, wie man in den komplexen Zahlen mit den Grundrechenarten rechnen kann. Dafür legen wir ein kartesisches Koordinatensystem auf das Schachbrett (siehe Abbildung).



A2 Spannt mit zwei Schnüren die Koordinatenachsen auf (siehe Abbildung).

Eine komplexe Zahl der Form $z = a + \mathrm{i} \cdot b$ wird im Folgenden auf dem Schachbrett als Punkt (a,b) mit Realteil a auf der horizontalen Achse und Imaginärteil b auf der vertikalen Achse eingezeichnet.

A3 Überlegt euch zunächst zwei komplexe Zahlen (wir nennen sie im Folgenden $v = a + \mathrm{i} \cdot b$ und $w = c + \mathrm{i} \cdot d$) und notiert diese. Je eine Schülerin oder ein Schüler soll sich nun an die entsprechenden Positionen auf dem Schachbrett vor euch stellen. Wenn vor Ort Schachfiguren vorhanden sind, könnt ihr auch Schachfiguren an die Positionen stellen.

Wusstest du schon?

Du kannst in den komplexen Zahlen mit den üblichen Rechenoperationen rechnen. Auch Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz darfst du in der dir bekannten Form anwenden.

A4 Berechne mit den in Teilaufgabe **A3** gewählten Zahlen folgende Ergebnisse:

- $v + w$
- $v - w$
- $w - v$
- $v \cdot w$
- $\frac{v}{w}$
- $\frac{w}{v}$

Hinweis: *Verwende, dass $\mathrm{i}^2 = -1$ ist. Bei der Division musst du zusätzlich die Brüche erweitern. Erinnere dich an die dritte binomische Formel.*

A5 Visualisiert nun eure Ergebnisse aus Teilaufgabe **A4** auf dem Schachbrett. Nutzt wieder die Schachfiguren dafür oder stellt euch selbst auf die Stellen, die zu den Ergebnissen der Rechenaufgaben gehören. Was fällt euch auf?

Es sei erneut $v = a + \mathrm{i} \cdot b$ und $w = c + \mathrm{i} \cdot d$. In Teilaufgabe **A4** habt ihr den Bruch mit $a - \mathrm{i} \cdot b$ beziehungsweise $c - \mathrm{i} \cdot d$ erweitert. Die komplexe Zahl $\overline{v} = a - \mathrm{i} \cdot b$ nennt man die komplexe Konjugation von $v = a + \mathrm{i} \cdot b$. Analog ist $\overline{w} = c - \mathrm{i} \cdot d$ die komplexe Konjugation von $w = c + \mathrm{i} \cdot d$.

B1 Visualisiert auch die komplexe Konjugation von v und w mit Schachfiguren oder mit Personen. Was fällt euch hier auf? Was passiert, wenn man $\overline{v}$ und $\overline{w}$ wieder komplex konjugiert?

B2 Überlege dir, wie man eine Spiegelung von v und w an der imaginären Achse darstellen kann.

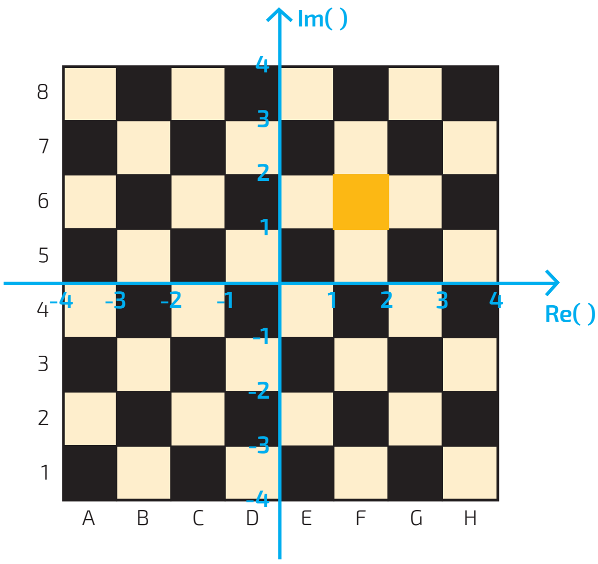
Bild: Projektteam

Wusstest du schon?

Im Schach gibt es verschiedene Figuren wie den König, die Bauern, die Türme oder die Springer. Sie dürfen nur nach bestimmten Regeln über das Schachfeld gezogen werden. Der Springer darf sich beispielsweise zwei Felder in eine Richtung und anschließend ein Feld senkrecht dazu bewegen. Der Zug des Springers sieht also immer L-förmig aus. Der König hingegen darf nur auf alle acht direkt angrenzenden Felder weiterziehen.

Für die folgenden Aufgaben ordnen wir jedem Feld des Schachbretts genau einen Punkt zu. Normalerweise sind die Felder des Schachbretts in der Horizontalen von A bis H und in der Vertikalen von 1 bis 8 beschriftet (siehe Abbildung). Jedem Feld werden nun die Koordinaten seiner rechten oberen Ecke zugeordnet.

Beispiel: *Das in der Abbildung gelb markierte Feld F6 hat die Koordinaten (2,2).*



C1 Macht euch zu zweit mit der Zuordnung von Feldern zu Koordinaten vertraut. Eine Person stellt sich dazu auf ein Feld ihrer Wahl. Die andere Person bestimmt die dazugehörigen Koordinaten. Denkt euch anschließend Koordinaten aus und sucht das passende Feld auf dem Schachbrett dazu. Sucht auch noch das Feld mit den Koordinaten (0,1) und die Koordinaten des Feldes B2.

C2 Ein Springer steht auf Feld D4. Welche Felder kann er von dort in einem Zug erreichen? Welche komplexen Zahlen entsprechen diesen Positionen?

C3 Was fällt dir an den in Teilaufgabe **C2** bestimmten komplexen Zahlen unter dem Aspekt der Spiegelungen auf?

C4 In Teilaufgabe **A4** habt ihr festgestellt, dass man mit den komplexen Zahlen teilweise wie mit Vektoren rechnen kann. Dabei muss man den Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit der komplexen Zahl $a + \mathrm{i} \cdot b$ identifizieren. Berechne entsprechend die Beträge (Längen) von v und w, wie du es aus der analytischen Geometrie kennst.

Nun habt ihr einige Grundlagen über komplexe Zahlen kennengelernt. Mit komplexen Zahlen kann man aber noch mehr machen.

Bilder: oben – Projektteam | unten – lizenzfreies Foto

D1 Zu Beginn wurde erwähnt, dass mit Hilfe der komplexen Zahlen die Gleichung $x^2 = -1$ gelöst werden kann. Gib alle Lösungen der folgenden Gleichungen in den komplexen Zahlen an:

a) $x^2 - 1 = 0$

b) $x^3 - 1 = 0$

c) $x^4 - 1 = 0$

d) $x^6 - 1 = 0$

Hinweis:

- *Für die Lösung der Gleichung a) ist es sinnvoll, die dritte binomische Formel anzuwenden.*
- *Für die Lösung der Gleichung b) kannst du dich davon überzeugen, dass $x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$ gilt. Nutze anschließend das folgende Gesetz beim Anwenden der pq-Formel: $\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}$ für eine reelle Zahl $a > 0$. Hierbei hast du benutzt, dass $i^2 = -1$ gilt.*
- *Für die Lösung der Gleichung c) ist es sinnvoll, die dritte binomische Formel anzuwenden. Verwende außerdem, dass $i^2 = -1$ gilt.*
- *Für die Lösung der Gleichung d) kannst du zunächst die dritte binomische Formel und dann $x^3 + 1 = (x+1)\cdot(x^2 - x + 1)$ verwenden. Gehe anschließend wie in b) vor.*

D1

Wusstest du schon?

Die Zerlegungen aus den Hinweisen in Teilaufgabe **D1** könntest du auch mit der sogenannten Polynomdivision bestimmen. Sie funktioniert so ähnlich wie die schriftliche Division. Wenn du mehr darüber wissen möchtest, dann frag deine Lehrkraft danach.

D2 Stellt eure Ergebnisse aus Teilaufgabe **D1** auf dem Schachbrett dar. Was fällt euch auf?

Hinweis: *Berechnet zur Kontrolle die Beträge eurer Lösungen aus Teilaufgabe **D1**.*

Wusstest du schon?

In Aufgabenteil **D** hast du soeben die *n*-ten Einheitswurzeln kennengelernt. So werden die Lösungen von Gleichungen der Form

$$x^n - 1 = 0 \text{ mit } x \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

genannt. Eine Besonderheit ist, dass ihre zugehörigen Punkte im Koordinatensystem alle auf dem Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt (0,0) liegen.

Wusstest du schon?

Wichtige Zahlenmengen werden zur Eindeutigkeit häufig mit einem Doppelstrich gekennzeichnet. Bei den Zahlenmengen aus dem Einleitungstext steht $\mathbb{N}$ für „natürlich", $\mathbb{Z}$ für „Zahl", $\mathbb{Q}$ für „Quotient", $\mathbb{R}$ für „reell" und $\mathbb{C}$ für „complex". Früher hat man diese Symbole für wichtige Zahlenmengen fett gedruckt. Mit dem Doppelstrich wurde später beim Tafelanschrieb der Fettdruck imitiert. Heute ist der Buchstabe mit Doppelstrich auch im Buchdruck die gewöhnliche Notation.

Unterstützt durch: hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS, JOACHIM HERZ STIFTUNG