Sekundarstufe 2
Analysis

- Parabelfunktionen
- Extremwertaufgaben
- Integration

Material
Schreibmaterial, Zollstock oder Maßband, Geodreieck oder Winkelmesser

Zeit
90 Minuten

Lernort
Brückenbogen über einer ruhigen Verkehrsstraße oder einem Gehweg

UNIVERSITÄT BONN | MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

Sitzt? Passt? Wackelt? Oder hat doch noch Luft?

Brückenbögen modellieren

Es gibt Brücken, die Flüsse, Straßen oder auch Täler überqueren. Die Bauform richtet sich dabei immer auch nach dem Einsatzgebiet der Brücke: Über großen Gewässern wie Seen oder breiten Flüssen kommen häufig Hängebrücken zum Einsatz. Bäche können mit einer Balkenbrücke und Täler mit einer Bogenbrücke überquert werden. Die Form wird dabei immer so gewählt, dass das Gewicht der querenden Fahrzeuge und der Brücke selbst möglichst gut verteilt wird und das Bauwerk viele Jahre stabil bleibt.

Wenn unter einer Brücke der Straßenverkehr fließen soll, muss zur Sicherheit eine Maximalhöhe für Fahrzeuge beachtet werden. In dieser Aufgabe wollen wir einen Brückenbogen als Parabelfunktion modellieren und damit Fragen zum Straßenverkehr beantworten.

A1 Messt die Höhe des Brückenbogens

- mithilfe eines Winkelmessers und der Verwendung trigonometrischer Funktionen oder
- indem ihr die Höhe des Brückenbogens durch Ausmessen und Abzählen von Vergleichsobjekten (z. B. Brückensteine oder Personen) abschätzt.

A2 Modelliert nun den Brückenbogen als Parabelfunktion. Berechnet eine Funktionsgleichung für den Bogen, indem ihr das linke Ende des parabelförmigen Bogens als Punkt $P = (0|y)$ anseht. Messt die Breite des Bogens und schätzt begründet den Wert von y.

A3 Skizziere den Funktionsgraphen des parabelförmigen Brückenbogens in ein geeignetes Koordinatensystem.

Stell dir vor, ein Gabelstapler mit Ladung soll mittig unter dem Brückenbogen hindurchfahren.

B1 Wie groß darf die rechteckige Querschnittsfläche des Fahrzeugs maximal sein, um hindurchzupassen? Wie breit und wie hoch ist dann die Querschnittsfläche?

Hinweis: *Verschiebe hierfür deine Parabel aus Teilaufgabe* ***A3*** *so, dass der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse wird.*

B2 Bei der zulässigen Durchfahrtshöhe unter Brücken wird stets ein zusätzlicher Sicherheits-

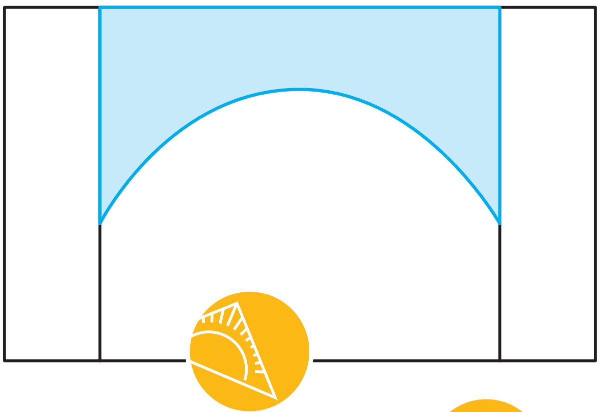
Bilder: links – lizenzfreies Foto | mittig und rechts – Volker Lannert

abstand berücksichtigt. Beantworte die Fragen von Teilaufgabe **B1** unter Berücksichtigung jeweils einer der beiden folgenden Annahmen erneut:

a) Der Sicherheitsabstand nach oben (in y-Richtung) beträgt an jeder Stelle der Brücke mindestens einen halben Meter.

b) Die zulässige Durchfahrtshöhe beträgt zwei Drittel der Gesamthöhe.

B3 Angenommen, die Parabelfunktion aus Teilaufgabe **A2** modelliert den Bogen perfekt. Stell dir vor, die Brücke soll oberhalb der Öffnung auf beiden Brückenseiten neu verputzt werden. Bestimme den Flächeninhalt der zu bearbeitenden Fläche (siehe Abbildung).



Wusstest du schon?

Bei der Form von Brückenbögen handelt es sich strenggenommen gar nicht um eine Parabel, sondern um eine auf den Kopf gestellte Kurve, die die Form einer durchhängenden Kette hat. Deshalb wird sie auch Katenoide genannt, was auf Latein so viel wie Kettenlinie bedeutet. Es lässt sich beweisen, dass sie (bis auf Verschiebungen und/oder Streckungen/Stauchungen) dem Cosinus hyperbolicus (cosh) entspricht, der der Mittelwert zweier Exponentialfunktionen ist:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

Der Unterschied zwischen einer Parabel und der Kettenlinie ist für die Maßstäbe dieser Aufgabe so gering, dass für die Berechnungen die Parabel vollkommen ausreicht.

Wusstest du schon?

Man kann die unterschiedlichen Brücken nach der Art ihres Tragwerks unterteilen. Die wichtigsten Bauarten sind dabei die Bogen-, Balken-, Hänge- und Schrägseilbrücken. Bekannte Beispiele für Hängebrücken sind die Golden Gate Bridge und die Brooklyn Bridge. Hänge- und Schrägseilbrücken haben durch die schwebende Fahrbahn aber den Nachteil, sehr anfällig für starke Stürme zu sein. Bogenbrücken sind hingegen sehr stabil und gehören zu den ältesten noch erhaltenen Brücken. Dazu gehört auch die älteste deutsche Brücke – die Römerbrücke in Trier über der Mosel.

Unterstützt durch: hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS, JOACHIM HERZ STIFTUNG