

Sekundarstufe 2  
Analysis



- Extremstellen
- abschnittsweise definierte Funktionen
- Steckbriefaufgaben

**Material**

Schreibmaterial,  
Taschenrechner, Zollstock,  
Paketschnur

**Zeit**

90 Minuten

**Lernort**

Baum mit annähernd  
parabelförmigem Ast  
in gut erreichbarer Höhe

## (F)AST parabelförmig

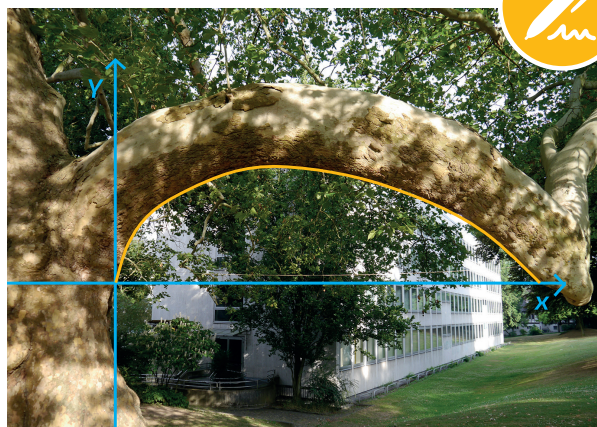
### Kurvige Bäume modellieren


Für einen Baum haben seine Äste überlebenswichtige Funktionen, denn über sie werden Nährstoffe, Salze und Wasser dorthin transportiert, wo sie gebraucht werden. Die Wuchsformen der Äste sind aber nicht zufällig: Der Baum wächst in die Richtung, aus der das meiste Licht kommt, denn dieses wird in den Blättern für die Photosynthese benötigt. Dadurch entstehen interessante Äste mit ganz unterschiedlichen Formen.




Manche Äste erinnern an eine Parabel, weil sie nach unten beziehungsweise nach oben gebogen sind. Doch wie kann man diesen Verlauf des Astes mathematisch beschreiben? Diese Frage werdet ihr in dieser Aufgabe beantworten. Wählt einen gut zugänglichen Ast mit einer entsprechenden Form aus.

Wir betrachten im Folgenden nur den gebogenen Teil des Astes und wollen diesen als Funktion in ein Koordinatensystem übertragen. Ist der Ast nach unten gebogen (wie in der Abbildung), verwenden wir für die Funktion den unteren Rand, im anderen Fall den oberen Rand des Astes.





**A1**  Diskutiert in der Gruppe, wie ihr den Verlauf des Astes am besten ausmessen und als Funktion in ein Koordinatensystem übertragen könnt.

**Hinweis:** Ihr könnt die Schnur spannen und als x-Achse verwenden.


**A2**  Interpretiert den gebogenen Teil des Astes als Funktion mit einem lokalen Extrempunkt. Misst die Koordinaten dieses Punktes und außerdem die Koordinaten des Astes jeweils 20, 40 und 60 Zentimeter links und rechts von der lokalen Extremstelle. Gebt alle Werte in Meter an.


**Hinweis:** Falls euer Ast nicht lang genug ist, könnt ihr die Intervalle entsprechend anders wählen.

**B1**  Teilt euch in zwei Gruppen auf. Eine Gruppe berechnet die drei durchschnittlichen Steigungen der Funktion in den Intervallen, die jeweils von der lokalen Extremstelle zu einem der drei Punkte rechts von der Extremstelle reichen. Die andere Gruppe berechnet die Steigungen für die drei Punkte links von der Extremstelle. Vergleicht eure Ergebnisse. Kann der Ast gut durch eine Parabel modelliert werden?

**B2**  Sei  $s$  eure gemessene Extremstelle aus Teilaufgabe **A2**. Stellt Vermutungen auf, welchen Wert die durchschnittliche Steigung im Intervall  $[s, s+h]$  annimmt, wenn  $h$  sich der 0 annähert. Was sagt dieser Wert aus?

Ihr habt in Teilaufgabe **B1** und **B2** festgestellt, dass sich die Steigung von beiden Seiten einem gemeinsamen Wert an der lokalen Extremstelle annähert. Daher ist es sinnvoll, nach einer aus zwei Parabelhälften zusammengesetzten Funktion zu suchen. Dabei haben beide Parabeln denselben Scheitelpunkt, der den lokalen Extrempunkt bildet.

**C1**  Stellt in euren Gruppen für das von euch betrachtete Intervall jeweils eine Funktionsgleichung auf, die eine Parabel mit dem Scheitelpunkt und der linken beziehungsweise rechten Seite des Astes beschreibt. Setzt diese abschnittsweise definierten Funktionen zu einer gemeinsamen Funktion zusammen. Gebt die beiden Funktionsgleichungen jeweils in Scheitelpunkt- und in Normalform an.

**C2**  Überprüft mit Hilfe des Differentialquotienten ( $h$ -Methode) eure Vermutungen aus Teilaufgabe **B2** zur Steigung im Scheitelpunkt.

**C3** Stelle mithilfe deiner Erkenntnisse zur Steigung im gemeinsamen Scheitelpunkt und zur Steigung in dem Intervall links und rechts vom gemeinsamen Scheitelpunkt zwei notwendige Kriterien zur Bestimmung einer lokalen Extremstelle auf. Unterscheide zwischen Maximalstellen und Minimalstellen!

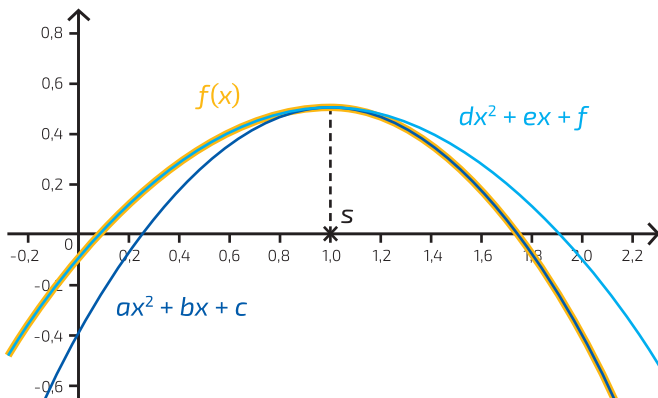
### Weißt du noch?

Wir sprechen von einer lokalen Maximalstelle (Minimalstelle) an der Stelle  $x_0$ , falls es eine Umgebung um  $x_0$  gibt, in der  $f(x_0)$  der größte (kleinste) Funktionswert ist. Eine lokale Extremstelle ist eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle.

### Weißt du schon?

Eine mögliche Form für eine aus zwei quadratischen Funktionen zusammengesetzte Funktion  $f$  sieht wie folgt aus:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{falls } x \leq s \\ dx^2 + ex + f, & \text{falls } x > s \end{cases}$$



Unterstützt durch:

**hausdorff**  
CENTER FOR MATHEMATICS

