hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS

JOACHIM HERZ STIFTUNG

UNIVERSITÄT BONN

MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE

MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE IN BONN

50°43'42,5"N 7°5'2,3"O

Lernheft für die Sekundarstufe I

Lösungsvorschläge und didaktische Kommentare

Lösungsvorschläge und didaktische Kommentare zu

Mathematische Spaziergänge in Bonn

Lernheft für die Sekundarstufe I

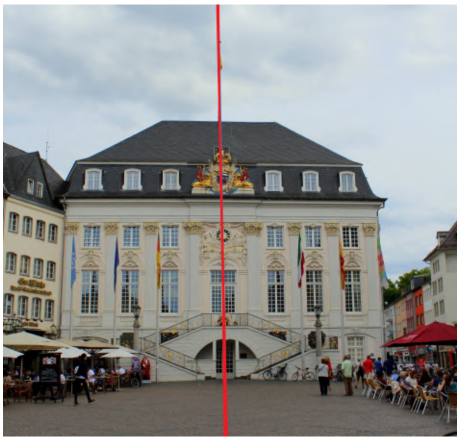
Projektleitung	Dr. Antje Kiesel, Dr. Thoralf Räsch Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universtität Mathematik-Zentrum Endenicher Allee 60, 53115 Bonn spaziergaenge@math.uni-bonn.de
Autorenteam	Sivar Abdelrahman, Dana Eilers, Annika Mester, Julia Schuster, Greta Steib
Projektteam 2022	Alexandra Bettin, Gabriela Brüll, Carsten Hoffmann, Gerrit Keller, Dr. Antje Kiesel, Yannick Müller, Annika Mester, Nik Oster, Dr. Thoralf Räsch, Diana Raineri, Hannah Sophia Schmitt, Julia Schuster, Leonard Strotmann, Chiara Thelen, Florian Winterscheid
Stand	15. Januar 2023

Hinweis: Die gedruckte Broschüre (1. Auflage) unterscheidet sich leicht von der auf unserer Homepage veröffentlichten Version im PDF-Format (2. Auflage). In dieser Datei der didaktischen Kommentare entsprechen die Aufgabennummern denen in der PDF-Datei.

Inhaltsverzeichnis

1 Symmetrie an Bauwerken

A1 Die Symmetrieachse der Rathausfassade:



A2 Nein, nicht die gesamte Fassade ist symmetrisch. Es gibt folgende Abweichungen, die asymmetrisch bezüglich der Spiegelachse aus **A1** sind:

(1) die Uhr

(2) die Türgriffe

(3) die Beethovenfigur

(4) das Bonner Wappen

(5) die goldenen Ornamente an der Verzierung der Freitreppe

(6) Unten rechts auf der Hauptfassade befindet sich ein Fenster, auf der dazu gespiegelten linken Seite befindet sich allerdings kein Fenster, sondern ein Tor.

(7) Unten rechts befindet sich ein Informationsschild über das Rathaus, dieses fehlt links.

(8) Die Kopfstatue über dem Fenster rechts unten ist eine andere als diejenige links über dem Tor.

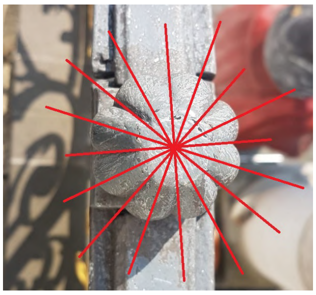
A3 Die Punkte 3, 5, 6 und 8 könnten umgesetzt werden und würden das Rathaus symmetrischer gestalten. Die übrigen Punkte symmetrisch zu gestalten, wäre nicht sinnvoll, wobei sich über Punkt 7 diskutieren lässt.

A4 Die Uhrzeiger sind um 12:00 Uhr/24:00 Uhr sowie um 6:00 Uhr/18:00 Uhr symmetrisch.

A5 Im Aufgabenteil **A** wurde die Achsensymmetrie behandelt. Eine weitere Form der Symmetrie ist die Drehsymmetrie mit dem besonderen Fall der Punktsymmetrie bei einer Drehung um 180°.

A6

- Ja, der Ausschnitt ist achsensymmetrisch.
- Es gibt vier Symmetrieachsen.



- Ja, der Ausschnitt ist achsensymmetrisch.
- Es gibt acht Symmetrieachsen.

- Ja, der Ausschnitt ist achsensymmetrisch.
- Es gibt zwei Symmetrieachsen.

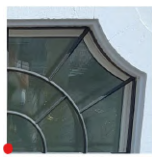
- Die übrigen drei Ausschnitte mit den Nummern 1, 2 und 5 sind nicht achsensymmetrisch.
- Ausschnitt 5 ist asymmetrisch.

B1

Das Muster der Fenstergläser ist ein Gitter aus Quadraten. Die Fensterscheibe wird von einer Hauptsprosse mittig geteilt. *Senkrecht* dazu verlaufen Querbalken. Diese schneiden die Hauptsprosse im *rechten Winkel*. Die Querbalken sind im gleichen *Abstand* zueinander ausgerichtet und liegen *parallel* zueinander. Durch diese Anordnung ist die Hauptsprosse auch die *Spiegelachse* der Fensterscheibe und das Muster entsteht durch *Achsenspiegelung* an der Hauptsprosse.

B2 Die Ausschnitte 1, 2, 3, 4 und 6 sind drehsymmetrisch.

B3

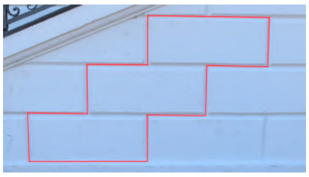


Der Grundbaustein muss um 90°, 180° und 270° gedreht werden, damit die Figur entsteht. Die Figur ist damit auch punktsymmetrisch.

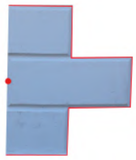
Der Grundbaustein muss um 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° und 315° gedreht werden, damit die Figur entsteht. Die Figur ist punktsymmetrisch.

Der Grundbaustein muss um 90°, 180° und 270° gedreht werden, damit die Figur entsteht. Die Figur ist punktsymmetrisch.

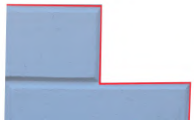
 

Der Grundbaustein muss einmal um 180° gedreht werden, damit die Figur entsteht. Die Figur ist punktsymmetrisch.

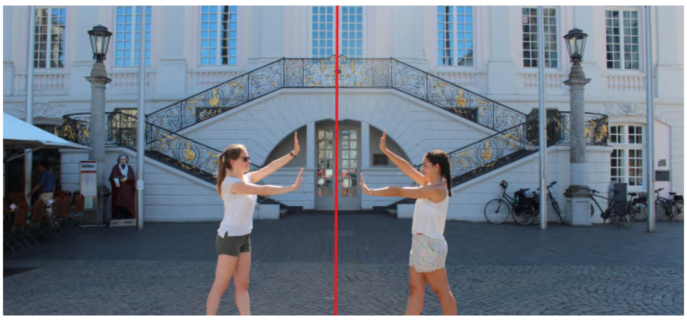
Der Grundbaustein muss einmal um 180 ° gedreht werden, damit die Figur entsteht. Die Figur ist punktsymmetrisch.

B4 Die verkleinerten Grundbausteine der Ausschnitte 3, 4 und 6.

C1 Die Person, die das *Spiegelbild* darstellt muss sich auf dieselbe Höhe wie das *Original* hinter das Buch *Auf dem Weg zur amerikanischen Botschaft* von Anna Seghers stellen. So haben Original und Spiegelbild denselben Abstand zur Symmetrieachse.

C2 Eine Spiegelung könnte beispielsweise so aussehen:



Didaktischer Kommentar:

Die Aufgabe richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 6. Während der Jahrgangsstufe 6 wird die Geometrie in Bereichen der Kunst und Architektur kennengelernt, sodass diese Aufgabe an diese Vorkenntnisse anknüpft. Die Aufgabe kann vollständig oder auch nur teilweise in den Unterricht integriert werden. Die einzelnen Aufgabenteile können im Themenbereich Symmetrie in den Unterrichtsverlauf eingeplant werden, sodass Symmetrie im Alltag erlebt wird.
Da die Aufgabe zwei verschiedene Kongruenzabbildungen betrachtet, müssen zur Bearbeitung der gesamten Aufgabe beide Symmetrietypen, Achsensymmetrie und Drehsymmetrie, von den Schülerinnen und Schülern verstanden worden sein. Dazu müssen beide Begriffe vorher im Unterricht behandelt worden sein. Außerdem müssen die Schülerinnen und Schülern, besonders für Aufgabenteil **A** und **C**, den Begriff der Spiegelachse kennen und diese einzeichnen können. Die Bearbeitung aller Aufgabenteile bietet sich demnach nach Abschluss des Symmetriethemas im Unterricht an.
Das Hauptziel dieser Aufgabe ist, dass die Schülerinnen und Schülern ihr bisheriges Wissen zum Phänomen der Symmetrie nutzen und weitere Erfahrungen und Einsichten in diesem Themenbereich gewinnen.
Für die Bildbearbeitung im Anschluss des Mathematischen Spaziergangs oder in der nächsten Unterrichtsstunde bietet sich die Grafiksoftware Paint an. Mit diesem Programm können die Spiegelachsen als Linien in die Fotos eingezeichnet werden. Alternativ können die Spiegelachsen auch mithilfe von Schnüren vor Ort vor die Objekte gehalten und fotografiert werden. Die Ausschnitte wurden dazu so gewählt, dass sie für die Schülerinnen und Schüler gut erreichbar sind.

2 Schätzen, messen und entdecken

Hinweis: Alle Angaben zu Schrittlängen sind hier nur beispielhafte Werte. Da das Bonner Münster momentan saniert wird und sich vor allem an der Nordseite Baugerüste befinden, werden die Daten so genau wie zurzeit möglich angegeben.

A2 Angenommen, die ermittelten Schrittlängen seien 50 Zentimeter, 52 Zentimeter und 51 Zentimeter.

$$\frac{50 \text{ cm} + 51 \text{ cm} + 52 \text{ cm}}{3} = 51 \text{ cm}$$

Die mittlere Schrittlänge beträgt 51 Zentimeter.

A3 Angenommen, man bräuchte 138 Schritte, um die Länge des Münsters abzugehen.

$$138 \cdot 51 \text{ cm} = 7038 \text{ cm} = 70,38 \text{ m}$$

Das Münster ist etwa 70,38 Meter lang.

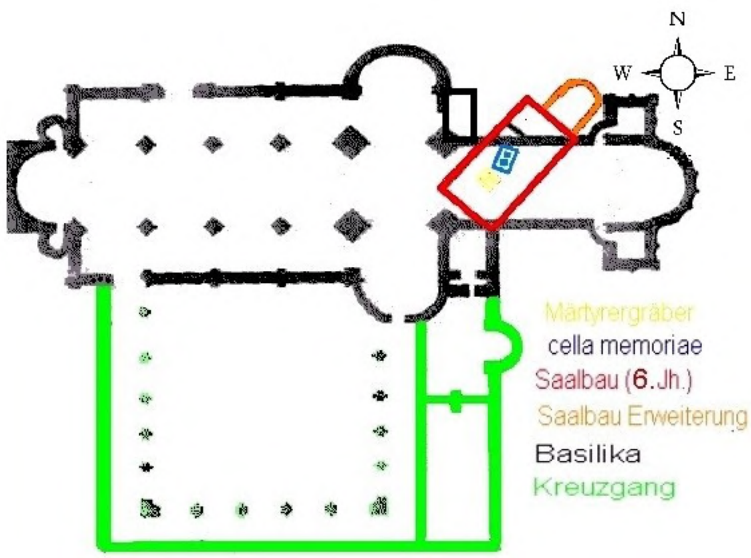
A4 Ein halbes DIN A4-Blatt ist 21 cm lang. Lassen wir an den Rändern je 1,5 cm Platz, so bleibt eine Länge von 21 cm $-2\cdot$ 1,5 cm = 21 cm -3 cm = 18 cm übrig.

$$\frac{18 \text{ cm}}{7038 \text{ cm}} \approx 0,0026$$

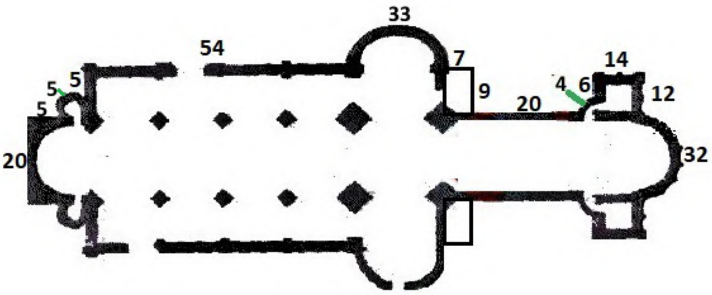
Das Verhältnis der Länge eines halben DIN A4-Blattes zur Länge der Münsterbasilika beträgt 0,0026.

A5 18 : 7038 = 1 : 391
Der Maßstab für die Münsterskizze beträgt 1 : 391. Dabei entspricht ein Zentimeter in der Zeichnung 391 Zentimetern, also 3,91 Metern, in der Realität. Kennen wir eine Länge in der Realität, so können wir diese mit 0,0026 multiplizieren oder durch 391 dividieren und erhalten die maßstabsgetreue Länge für die Skizze.

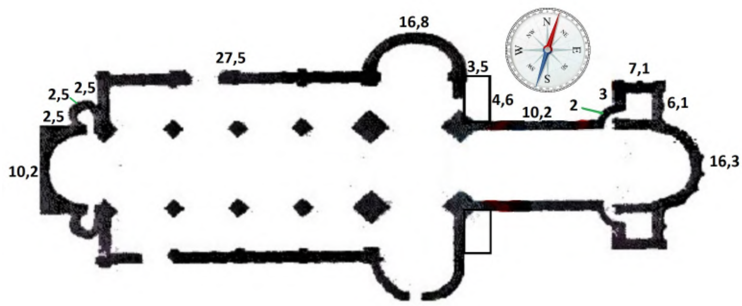
B1 Der gesamte Grundriss des Bonner Münsters hat die folgende Form. In dieser Aufgabe wird der Kreuzgang vernachlässigt, sodass wir nur die in schwarz dargestellte Basilika betrachten.



Die Längen des Grundrisses des Bonner Münsters wurden mit Schritten abgemessen. Die folgende Abbildung zeigt, wie viele Schritte für die Abmessung der jeweiligen Strecken des Grundrisses nötig waren.



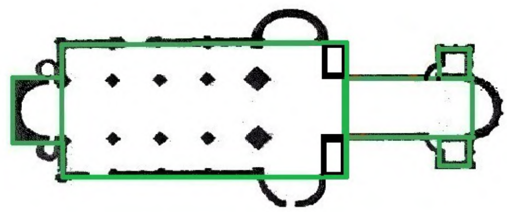
Daraus lassen sich, mithilfe der mittleren Schrittlänge (51 Zentimeter), die Seitenlängen des Grundrisses berechnen. Für die längste Seite auf der Nordseite gilt zum Beispiel: $54 \cdot 51 \text{ cm} = 2754 \text{ cm} \approx 27,5 \text{ m}$. In nebenstehender Abbildung sind diese Längen in Metern angegeben.



Für die Zeichnung in deinem Heft musst du diese Längen mit dem Faktor 0,0026 multiplizieren. Für die längste Strecke auf der Nordseite gilt zum Beispiel: $27,5 \text{ m} \cdot 0,0026 = 0,0715 \text{ m} = 7,15 \text{ cm}$.

B2 Das Schätzen von kurzen Strecken ist einfacher als das Schätzen von langen Strecken. Bei kurzen Strecken kann man die Distanz mit bekannten Längen vergleichen. Das Schätzen von langen Strecken ist schwieriger, da ein Zielpunkt in der Ferne kleiner aussieht und sich nicht immer Hilfspunkte auf der Strecke finden lassen, mithilfe derer man die Länge mit bekannten Längen vergleichen kann.

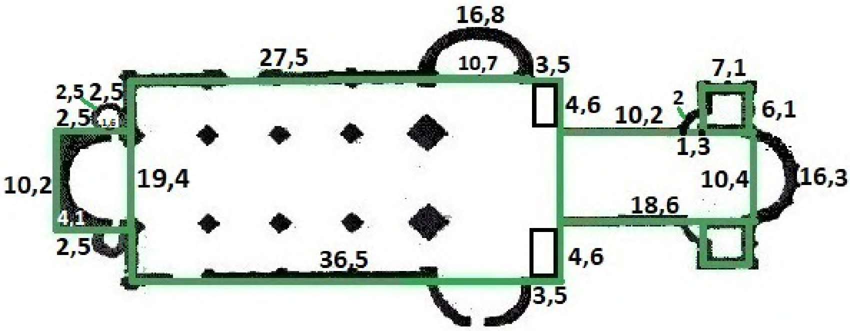
B3 Der Grundriss lässt sich in mehrere Rechtecke und Teile von Kreisen unterteilen.



Zur Berechnung des Umfangs U kann die Symmetrie der Münsterbasilika ausgenutzt werden. Wir bestimmen mit Hilfe der Angaben aus Teilaufgabe **B1** den Umfang der Hälfte der Münsterbasilika und verdoppeln diesen anschließend.

$$\begin{aligned} U =& 2 \cdot (5,1 \text{ m} + 2,5 \text{ m} + 2,5 \text{ m} + 2,5 \text{ m} + 27,5 \text{ m} + 16,8 \text{ m} + 3,5 \text{ m} + 4,6 \text{ m} + 10,2 \text{ m} + 2 \text{ m} \\ & + 3 \text{ m} + 7,1 \text{ m} + 6,1 \text{ m} + 8,15 \text{ m}) = 203,1 \text{ m} \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Fläche, die von der Münsterbasilika eingenommen wird, nehmen wir näherungsweise an, dass es sich bei den Teilen der Kreise im Grundriss um Viertel- oder Halbkreise handelt. Mithilfe der Formel zur Umfangberechnung von Kreisen erhalten wir mit den Angaben aus Teilaufgabe **B1** die Durchmesser der Kreise und können dann ihre Flächeninhalte bestimmen. Anschließend addieren wir die Flächeninhalte der einzelnen Flächen und erhalten die Größe der Gesamtfläche.

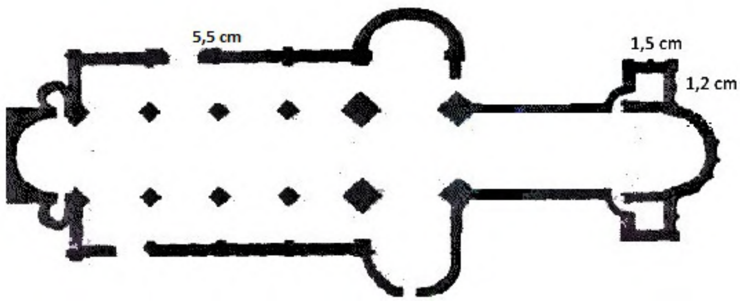


$$\text{Flächeninhalt} = 19,4\text{ m} \cdot 36,5\text{ m} + 10,2\text{ m} \cdot 4,1\text{ m} + 18,6\text{ m} \cdot 10,4\text{ m} + 7,1\text{ m} \cdot 6,1\text{ m} \cdot 2 + \pi \cdot (5,35\text{ m})^2 + \pi \cdot (0,8\text{ m})^2 + \frac{\pi \cdot (1,3\text{ m})^2}{2} + \frac{\pi \cdot (5,2\text{ m})^2}{2} \approx 1167,04\text{ m}^2$$

Der Umfang des Grundrisses der Münsterbasilika beträgt etwa 203,1 Meter und der Flächeninhalt etwa 1167,04 Quadratmeter.

C1 Der Maßstab des Stadtmodells beträgt 1 : 500. Das Münster hat sich seitdem nur gering verändert. An der Nordseite befindet sich heute östlich der mittleren Apsis (halbkreisförmiger Teil des Grundrisses) ein kleiner Anbau, der in unseren Grundrisszeichnungen mit den Maßen 3,5 m x 4,6 m eingezeichnet ist.

C2 Folgende drei Längen wurden im Stadtmodell an der Münsterbasilika abgemessen:



Setzen wir diese mit den ermittelten tatsächlichen Längen ins Verhältnis, erhalten wir:

$$\frac{2750\text{ cm}}{5,5\text{ cm}} = 500 \qquad \frac{710\text{ cm}}{1,5\text{ cm}} \approx 473 \qquad \frac{610\text{ cm}}{1,2\text{ cm}} \approx 508$$

C3 Das Verhältnis ist jeweils ähnlich, so dass wir von einem maßstabsgetreuen Modell mit dem Maßstab 1:500 ausgehen können.

Mögliche Gründe für die Abweichungen können Messungenauigkeiten sein, die bei der Bestimmung der Längen des Münstergrundrisses oder während den Abmessungen an dem Stadtmodell entstanden sind.

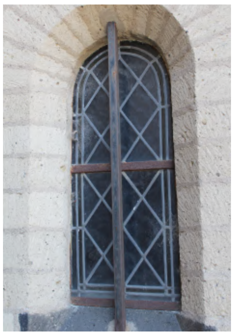
C4

Gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck: Auf der Nordseite neben der Gittertür am Fuße der Säule. Schenkellänge 24 cm.

Gleichseitiges Dreieck: Auf der Nordseite neben der Gittertür an der Säule. Seitenlänge 42 cm.

Kreis:
Fenster auf der Nordseite.

Quadrate:
Gittertür auf der Nordseite.



Raute:
Auf der Nordseite neben der Gittertür in einem kleinen Fenster.

Gleichschenkliges Trapez:
Auf der Nordseite über der Gittertür.

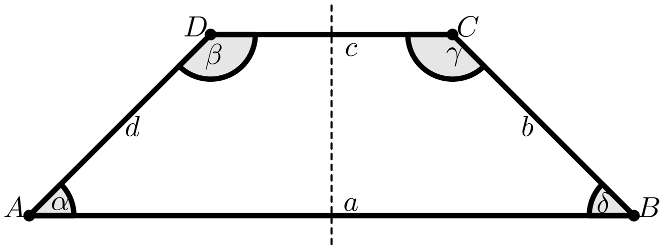
Rechtwinkliges Trapez:
Bodenplatte an der Apsis der Nordseite.

Rechteck:
Unten rechts auf der Ostseite.

Parallelogramme, die keine Rechtecke sind: Nicht gefunden.

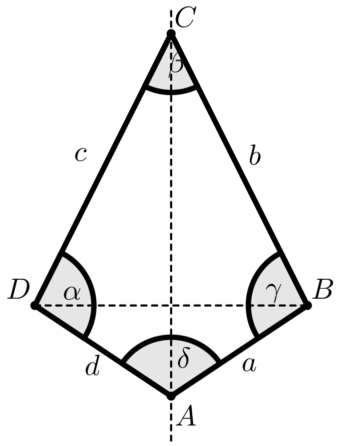
C5 An den Turmdächern lassen sich gleichschenklige Trapeze, Drachenvierecke und gleichschenklige Dreiecke erkennen.

Gleichschenkliges Trapez



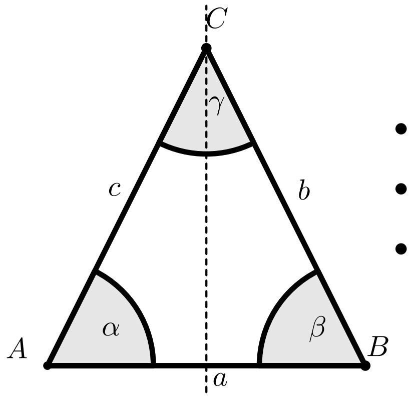
- Seiten b und d sind gleich lang.
- Benachbarte Winkel β und γ, sowie α und δ sind gleich groß.
- Gegenüberliegende Seiten a und c sind parallel.
- Es existiert eine Spiegelachse, die durch die Mittelpunkte der Seiten a und c verläuft.

Drachenviereck



- Benachbarte Seiten c und b, sowie Seiten a und d sind gleich lang.
- Gegenüberliegende Winkel α und γ sind gleich groß.
- Die Diagonalen schneiden sich im rechten Winkel.
- Es existiert eine Spiegelachse, die durch die Punkte A und C verläuft.

Gleichschenkliges Dreieck



- Seiten b und c sind gleich lang.
- Benachbarte Winkel α und β sind gleich groß.
- Es existiert eine Spiegelachse, die durch den Mittelpunkt der Seite a und den Punkt C verläuft.

Didaktischer Kommentar:

An Kirchbauten lassen sich viele geometrische Formen entdecken, die sich im Grundriss, an der Fassade oder an den Dächern des Bauwerkes befinden. Diese Aufgabe beschäftigt sich insbesondere mit den geometrischen Flächen aus dem „Haus der Vierecke“ sowie Kreisen am Bonner Münster und ist besonders für Schülerinnen und Schülern der Klasse 6 geeignet. Des weiteren wird die Verhältnis- und Maßstabsrechnung mit der Aufgabe eingeübt.
Die Schülerinnen und Schülern benötigen zur Bearbeitung der Aufgabe Schreibutensilien, ein Geodreieck, einen Zirkel, einen Zollstock und eine Kamera. Die Bearbeitungszeit der Aufgabe beträgt circa 60 Minuten. Die Aufgabe soll bevorzugt in Kleingruppen von drei bis vier Personen bearbeitet werden.

3 Naturwunder Biene: Dreisatz und „Summen“

Hinweis: Die benötigten Informationen, die auf den Informationstafeln zu finden sind, haben wir den Lehrerinnen und Lehrern im didaktischen Kommentar zu dieser Aufgabe zur Verfügung gestellt. Sollte also vor Ort eine Information nicht verfügbar sein, kann eure Lehrerin/euer Lehrer helfen.

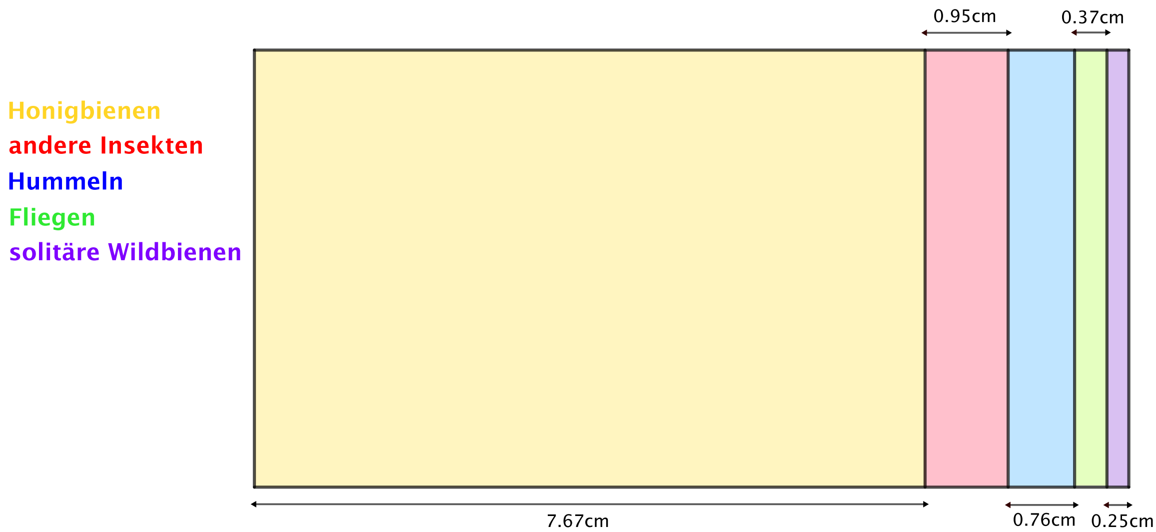
A2 Eine Biene braucht bei maximaler Geschwindigkeit für 30 Kilometer 60 Minuten, also braucht sie für 1 Kilometer 2 Minuten (60 min : 30 = 2 min). Für eine Strecke von 7 Kilometern braucht eine Biene daher 14 Minuten ($7 \cdot 2$ min = 14 min).

A3 Da eine Biene pro Sekunde 180 bis 250 Mal mit den Flügeln schlägt und insgesamt 14 Minuten fliegt, ergibt sich folgende mathematische Lösung: $14 \cdot 60 \cdot 180 = 151200$, $14 \cdot 60 \cdot 250 = 210000$
Eine Biene schlägt innerhalb einer zurückgelegten Strecke von 7 Kilometern 151200 bis 210000 Mal mit den Flügeln.

A4 Umrechnung von Kilogramm in Milligramm: 2 kg = 2000 g = 2000000 mg. Von einem Sammelflug bringt eine Arbeiterin 25 bis 35 Milligramm Nektar mit. Die Arbeiterinnen des Bienenvolks müssen daher 57143 bis 80000 Mal ausfliegen, um 2 Kilogramm Nektar heranzuschaffen (2000000 mg : 35 mg = 57143, 2000000 mg : 25 mg = 80000).

A5 Für 300 Gramm Honig muss eine Biene rund 20000 Mal ausfliegen, also ist für 0,015 Gramm Honig 1 Sammelflug nötig (300 g : 20000 = 0,015 g). Aus 2 Kilogramm Nektar (80000 Sammelflüge) können daher 1200 Gramm (0,015 g $\cdot$ 80000 = 1200 g) Honig produziert werden.

B1



Bestäubungsleistung der jeweiligen Insektenarten als Anteil eines Rechtecks

B2 Formel: $W = G \cdot \frac{p}{100}$ mit G = Grundwert, W = Prozentwert und p = Prozentsatz.

$$\begin{aligned}
2370\text{ kg} \cdot \frac{76,7}{100} &= 1817,79\text{ kg} && \text{(Honigbienen)}\\
2370\text{ kg} \cdot \frac{7,6}{100} &= 180,12\text{ kg} && \text{(Hummeln)}\\
2370\text{ kg} \cdot \frac{3,7}{100} &= 87,69\text{ kg} && \text{(Fliegen)}\\
2370\text{ kg} \cdot \frac{2,5}{100} &= 59,25\text{ kg} && \text{(Solitäre Wildbienen)}\\
2370\text{ kg} \cdot \frac{9,5}{100} &= 225,15\text{ kg} && \text{(Andere Insekten)}
\end{aligned}$$

B3

$$\begin{aligned}
G &= \text{Grundwert} = 5000\text{ kg}\\
W &= \text{Prozentwert} = 4670\text{ kg}\\
p &= \text{Prozentsatz} = \ ?
\end{aligned}$$

$$5000\text{ kg} \cdot \frac{p}{100} = 380\text{ kg} \Rightarrow p = \frac{380\text{kg}}{5000\text{kg}} \cdot 100 = 7,6\%$$

Die Hummeln sind wahrscheinlich von der besagten Virusinfektion befallen.

Didaktischer Kommentar:

Bienen sind nicht nur schöne Lebewesen, ihnen kommt außerdem eine wichtige Aufgabe für unser Ökosystem zu. Als Bestäuber sind sie in großem Maße für den Erhalt und die Fortpflanzung der Pflanzenwelt verantwortlich. Erst durch die Bestäubung einer Samenpflanze kann die Befruchtung und damit die Samenbildung erfolgen. In manchen Regionen der Erde sind die Bienen durch Umweltkatastrophen gänzlich verschwunden. Hier muss die Bestäubung mit sehr hohem Aufwand von Menschen durchgeführt werden, damit ausreichend landwirtschaftlicher Ertrag gewährleistet wird. Mit dieser Aufgabe soll auf die Bedeutung von Bienen für Artenvielfalt und Umwelt aufmerksam gemacht werden.
Das ganze Jahr über bieten der Imkerverband Rheinland e.V. und der Bonner Bienenzuchtverein e.V. Veranstaltungen rund um das Thema Bienen an. 50 bis 70 Schulklassen pro Jahr besuchen das Bienenhaus zum anschaulichen Biologieunterricht. Dies bietet die Möglichkeit, Mathematik fächerübergreifend zu unterrichten. Daher wird empfohlen, die Bearbeitung der Aufgabe mit dem außerschulischen Biologieunterricht im Bienenhaus zu verbinden.
Zu den inhaltlichen Schwerpunkten dieser Aufgabe zählen die Durchführung von Grundrechenarten sowie die Anwendung einfacher Dreisatzverfahren zur Lösung außermathematischer Problemstellungen. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler bereits verschiedene Aufgaben und Probleme zu Grundaufgaben der Prozentrechnung bearbeitet haben. Sie können Prozente, Brüche und Dezimalzahlen ineinander umwandeln und diese nutzen, um Anteile anzugeben. Weiterhin können Säulen- und Kreisdiagramme zur Veranschaulichung von Prozentangaben selbstständig angefertigt werden. Die inhaltlichen Schwerpunkte lassen sich im Kontext der siebten Jahrgangsstufe wiederfinden.
Bei der Bearbeitung der Aufgabenteile **A3** und **A4** soll darauf geachtet werden, dass in den am Lernort vorliegenden Informationen ein Intervall vorliegt und somit erwartet wird, dass das Ergebnis ebenfalls als Intervall angegeben wird.
Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe **B2** soll mithilfe der Prozentrechnung angegeben werden, wieviel Kilogramm der Ernte auf die Bestäubung durch die jeweiligen Insektenarten zurückzuführen sind. Hierbei wird angenommen, dass die Schülerinnen und Schüler zwischen

Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz unterscheiden und diese berechnen können. Auch Teilaufgabe **B3** setzt voraus, dass die Schülerinnen und Schüler über die benannten Kompetenzen verfügen.
Da manchmal Informationstafeln am Bienenhaus ausgetauscht werden müssen (da es leider manchmal zu mutwilligen Zerstörungen kommt), sind hier die wichtigsten Informationen zusammengefasst, die für die Aufgabe benötigt werden:

- **A2**: Eine Biene benötigt für 30 Kilometer 60 Minuten.
- **A3**: Pro Sekunde kommt eine Biene auf 180 bis 250 Flügelschläge.
- **A4**: Pro Flug sammelt eine Biene 25 bis 35 Milligramm Nektar.
- **A5**: Für 300 Gramm Honig muss eine Biene rund 20000 Mal ausfliegen.

4 Rund ums Kopfrechnen

Hinweis: Alle Angaben zu Größen des eigenen Körpers sind hier nur beispielhafte Werte.

A1 Die Länge des Steinkopfes von Florentius beträgt 1,8 Meter. Angenommen, die Kopflänge eines Schülers / einer Schülerin betrage 20 Zentimeter.

$$\frac{180\text{ cm}}{20\text{ cm}} = 9$$

Der Steinkopf ist neunmal länger als der Kopf dieses Schülers / dieser Schülerin.

A2 Angenommen, die Körpergröße eines Schülers / einer Schülerin betrage 1,52 Meter.

$$\frac{20\text{ cm}}{152\text{ cm}} \approx 0,13$$

Ihr/sein Kopf macht einen Anteil von 0,13 ihrer/seiner Gesamtkörperlänge aus.

$$\frac{180\text{ cm}}{0,13} \approx 1384,6\text{ cm} = 13,846\text{ m}$$

Florentius wäre etwa 13,85 Meter groß.

A3 Angenommen, in deiner Gruppe sind mit dir zusammen vier Schülerinnen und Schüler. Da in der Aufgabe ein Turm gebaut wird, indem man sich auf die Schultern steigt, interessieren wir uns für die Körpergrößen von Ferse bis Schulter. Diese Größe muss bei allen Gruppenmitgliedern noch abgemessen werden. (Wenn man ganz genau ist, muss man von der oben stehenden Person auch noch Hals und Kopf dazurechnen.) Angenommen diese Körperlänge beträgt im Durchschnitt 1,35 Meter.

$$\frac{13,85\text{ m}}{1,35\text{ m}} \approx 10,3$$

Die Gruppenteilnehmerinnen und -teilnehmer wären nicht größer als der Riese. Man bräuchte insgesamt 11 Personen, um die Größe des Riesens zu erreichen. Ein solcher Turm würde aber nicht mehr stehen können.

B1 Der Kopfumfang des Steinkopfes von Cassius beträgt an der beschriebenen Stelle 5,05 Meter. Angenommen, der Kopfumfang einer Schülerin / eines Schüler betrage an dieser Stelle 60 Zentimeter.

$$\frac{505\text{ cm}}{60\text{ cm}} \approx 8,42$$

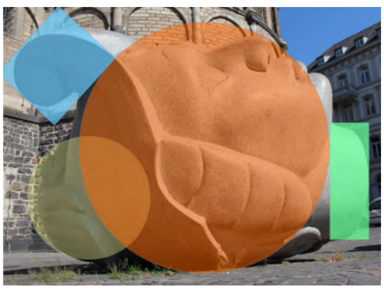
Der Kopfumfang des Steinkopfes ist 8,42 Mal größer als der Kopfumfang der Schülerin / des Schülers.

B2

$$\text{Radius} = \frac{\text{Umfang}}{2\pi} = \frac{505\text{ cm}}{2\pi} \approx 80,37\text{ cm}$$

Der Radius des Granitkopfes an der abgemessenen Stelle beträgt etwa 80,37 Zentimeter.

B3 Der Hals der Skulptur kann mithilfe eines Zylinders angenähert werden. Der Helm kann mithilfe eines Quaders und einer Halbkugel angenähert werden. Dies ist nicht der einzige Lösungsweg und die Granitstatue kann auch durch andere geometrische Körper angenähert werden.



$$V_{\text{Kopf}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (80,37 \text{ cm})^3 \approx 2174555,59 \text{ cm}^3 \approx 2,17 \text{ m}^3$$

Der Halsumfang beträgt 265 Zentimeter. Daraus ergibt sich ein Radius von etwa 42,18 Zentimetern. Insgesamt ist der Hals 20 Zentimeter lang.

$$V_{\text{Hals}} = \pi \cdot (42,18 \text{ cm})^2 \cdot 20 \text{ cm} \approx 111787,44 \text{ cm}^3 \approx 0,11 \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned} V_{\text{Helm}} &= 45 \text{ cm} \cdot 43 \text{ cm} \cdot 23 \text{ cm} + \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot (40 \text{ cm})^3 \approx 44505 \text{ cm}^3 + 134041,29 \text{ cm}^3 \\ &= 178546,29 \text{ cm}^3 \approx 0,18 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$V = V_{\text{Kopf}} + V_{\text{Hals}} + V_{\text{Helm}} \approx 2,17 \text{ m}^3 + 0,11 \text{ m}^3 + 0,18 \text{ m}^3 = 2,46 \text{ m}^3$$

Das Gesamtvolumen des Granitkopfes beträgt etwa 2,46 Kubikmeter.

B4

$$2620 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2,46 \text{ m}^3 = 6445,2 \text{ kg}$$

Der Kopf wiegt 6445,2 Kilogramm.

B5 Der Durchmesser des nächsten Gullideckels beträgt 54,5 Zentimeter. Damit hat die kegelförmige Säule einen Grundflächendurchmesser von 109 Zentimetern und eine Fläche von etwa 9331,32 Quadratzentimetern. Das entspricht etwa 0,93 Quadratmetern. Stellen wir die Formel zur Volumenberechnung eines Kegels $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ nach der Höhe h um und setzen die gegebenen Größen ein, erhalten wir:

$$h = \frac{3 \cdot 2,46 \text{ m}^3}{0,93 \text{ m}^2} \approx 7,94 \text{ m}$$

Die kegelförmige Säule wäre etwa 7,94 Meter hoch.

Didaktischer Kommentar:

Diese Aufgabe richtet sich an zwei verschiedene Klassenstufen. Während Teil **A** die Verhältnis- und Dreisatzrechnung behandelt und sich an die Klassenstufe 6 richtet, thematisiert Teil **B** die Volumenbestimmung zusammengesetzter Körper und richtet sich an die Klassenstufe 9. Aufgabenteil **A** kann zum Einstieg in das Thema Verhältnis- und Bruchrechnung genutzt werden oder als Übung nach Behandlung dieser Themen im Unterricht eingeplant werden. Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 9 können an dieser Station beide Aufgabenteile bearbeiten, wobei Aufgabenteil **A** als Wiederholung dient. Für Aufgabenteil **B** werden die Formeln zur Volumenberechnung von Kugeln, Pyramiden, Zylinder und Kegel, die in der Jahrgangsstufe 9 gelernt werden, vorausgesetzt. Darüber hinaus sollte das Gewicht eines Körpers mithilfe seiner Dichte berechnet werden können. Zudem sind insbesondere bei Teilaufgabe **B3** verschiedene Lösungswege denkbar. Die Schülerinnen und Schülern sollen zur durchdachten Problemlösung und Diskussion der unterschiedlichen Lösungsstrategien und Ergebnisse angeregt werden.

5 Abfahrt!

A1 Die folgenden Urlisten verzeichnen beispielhafte Verspätungen der Buslinien und der Straßenbahn:
Linie 62: 0; 2; 1; 0; 2; 5; 3; 2; 1; 1; 0; -1
Buslinien: 3; 5; 0; 0; -2; 1; 0; 4; 2; -1; 8; 4; 2; 0; 0; 3; 3

A2 Für Linie 62 erhalten wir:

$$\overline{x}_{\text{Bahn}} = \frac{0+2+1+0+2+5+3+2+1+1+0-1}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Die Straßenbahn der Linie 62 fährt also im Schnitt circa 1,33 Minuten zu spät ab.
Für die Buslinien erhalten wir:

$$\overline{x}_{\text{Bus}} = \frac{3+5+0+0-2+1+0+4+2-1+8+4+2+0+0+3+3}{17} = \frac{34}{17} = 2$$

Die Busse fahren also im Schnitt 2 Minuten zu spät ab.

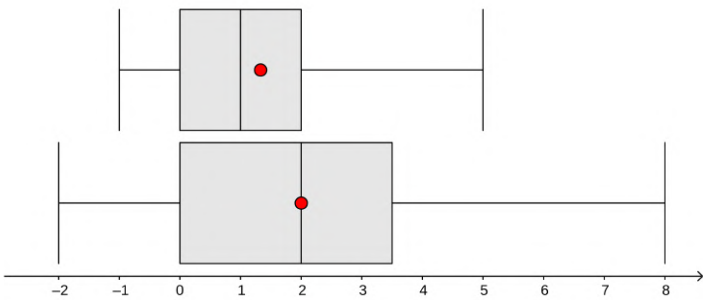
A3

Straßenbahnlinie 62:

- Minimum: -1
- Maximum: 5
- Spannweite: $5-(-1)=6$
- Unteres Quartil: 0
- Oberes Quartil: 2
- Median: 1

Buslinien:

- Minimum: -2
- Maximum: 8
- Spannweite: $8-(-2)=10$
- Unteres Quartil: 0
- Oberes Quartil: $\frac{3+4}{2}=3,5$
- Median: 2



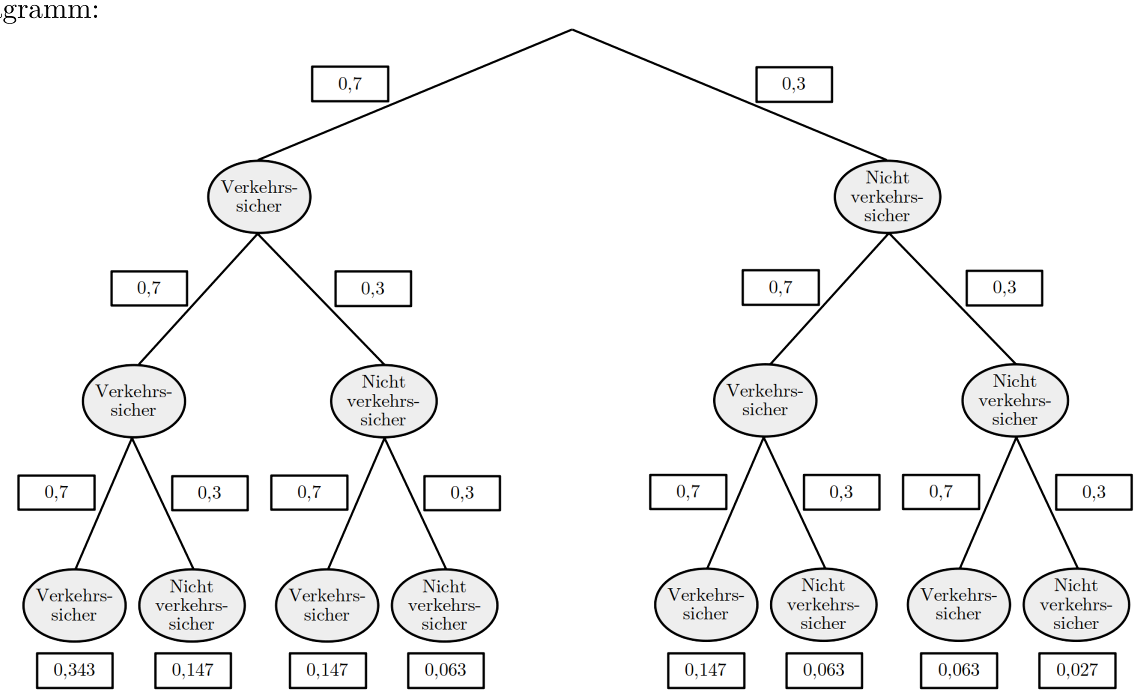
Der obere Boxplot stellt die Daten der Linie 62 und der untere die der Buslinien dar. Die roten Punkte markieren jeweils das arithmetische Mittel.
Bei der Linie 62 hatten die Bahnen meistens eine Verspätung von höchstens zwei Minuten. Die größte gemessene Verspätung liegt bei fünf Minuten. Durch diesen Ausreißer liegt das arithmetische Mittel auch etwas über dem Median von einer Minute. Außerdem kam sie mindestens einmal eine Minute zu früh.
Bei den Bussen schwankten die Abfahrtszeiten in dieser Stichprobe stärker als bei der Straßenbahn. Der Bus kam sogar mindestens einmal zwei Minuten zu früh. Die größte Verspätung betrug acht Minuten. Der Großteil der Werte bewegt sich im Bereich zwischen der pünktlichen Abfahrt und einer Verspätung von dreieinhalb Minuten. In dieser Stichprobe kommt man also zu dem Ergebnis, dass die Straßenbahn im Mittel pünktlicher fährt und die Abweichungen auch nicht so stark schwanken wie bei den Bussen. Eine Ursache könnte sein, dass

die Straßenbahn oft Vorrang hat und sich an vielen Stellen nicht den Platz mit dem anderen Straßenverkehr teilen muss, da sie eine eigene Trasse hat. Dadurch steht sie seltener im Stau als Busse.

B1 In unserer Stichprobe waren 21 von 30 Fahrrädern verkehrssicher. Dann beträgt die absolute Häufigkeit 21 und die relative Häufigkeit $\frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0,7$.

B2 Die relative Häufigkeit gibt an, wie groß der Anteil der absoluten Häufigkeit am Gesamtumfang der Stichprobe ist, also in diesem Fall, welchen Anteil die verkehrssicheren Fahrräder in der Stichprobe von 30 Fahrrädern einnehmen. Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit lässt sich jedoch nur herausfinden, wenn man als Stichprobe alle auf der Welt existierenden Fahrräder wählt. Da dies in der Realität nicht durchführbar ist, wählt man eine kleinere Stichprobe. Möchte man sich der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit annähern, muss man die Zahl der zufällig ausgewählten Fahrräder vergrößern. Diese Feststellung beruht auf dem sogenannten „Gesetz der großen Zahlen“.

B3 Wenn man drei Fahrräder zufällig nacheinander auswählt, ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



Die Zahlen unter den Blattknoten sind die Wahrscheinlichkeiten, die sich durch die Multiplikationspfadregel berechnen lassen.
Für die Wahrscheinlichkeit, dass von drei Fahrrädern mindestens zwei nicht verkehrssicher sind, kann man die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ergebnisse addieren. Daraus ergibt sich:

$$\mathbb{P}(\text{Mind. zwei Fahrräder nicht sicher}) = 0,063 + 0,063 + 0,063 + 0,027 = 0,216 = 21,6\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fahrräder verkehrssicher sind, beträgt:

$$\mathbb{P}(\text{Alle Fahrräder sicher}) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,7^3 = 0,343 = 34,3\%$$

B4 Man kann feststellen, dass in einem Baumdiagramm eines mehrstufigen Zufallsversuchs, bei dem in jeder Stufe der gleiche Versuch ausgeführt wird, an jeder Verzweigung die gleichen

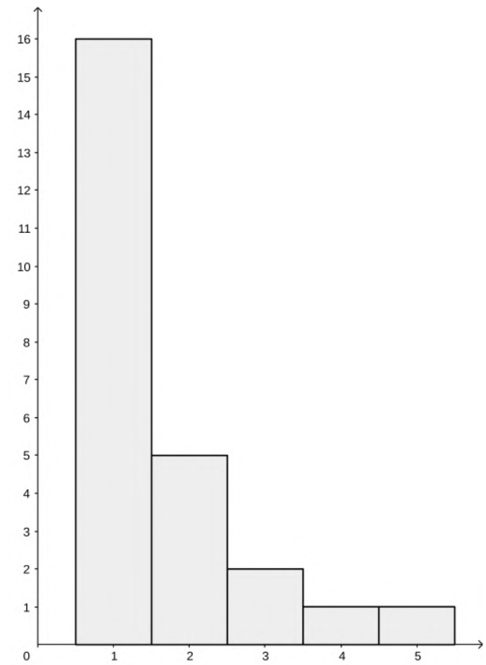
Wahrscheinlichkeiten stehen. Analog zur Lösung von **B3** ergibt sich bei 25 Wiederholungen mit der Multiplikationspfadregel

$$\mathbb{P}(\text{Alle Fahrräder sicher}) = 0,7^{25} = 0,000134107 \approx 0,013\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 25 Fahrräder verkehrssicher sind, liegt also bei ungefähr $0,013\%$.

C1 Die folgende Urliste verzeichnet beispielhaft die Anzahl der Personen in den beobachteten Autos: 1; 1; 1; 2; 1; 1; 3; 1; 2; 2; 1; 1; 1; 3; 1; 5; 1; 1; 2; 1; 2; 1; 1; 1; 4.

C2



C3 Gefragt ist nach dem arithmetischen Mittel, also $\overline{x} = \frac{1}{25}(1+1+1+2+1+1+3+1+2+2+1+1+1+3+1+5+1+1+2+1+2+1+1+1+4) = \frac{41}{25} = 1,64$. Durchschnittlich befinden sich also ein bis zwei Personen im Auto.

C4 Hier muss man die Anzahl der Plätze im Bus durch die durchschnittliche Zahl der Insassen eines Autos teilen, also

$$\frac{60}{1,64} = \frac{60}{\frac{41}{25}} = \frac{1500}{41} \approx 36,59.$$

Man kann also mehr als 36 Autos durch einen einzigen Bus einsparen.

Didaktischer Kommentar:

Diese Aufgabe fasst sämtliche inhaltliche Schwerpunkte aus der Stochastik zusammen, die sich im NRW-Lehrplan der Sekundarstufe I befinden und richtet sich damit an Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 8. Die inhaltlichen Voraussetzungen dieser Aufgabe sind Säulen- und Balkendiagramme, ein- und mehrstufige Zufallsexperimente und ihre Darstellung als Baumdiagramm, Mittelwerte und Boxplots.
Der Beueler Bahnhofsplatz ist als Bearbeitungsort für diese Aufgabe besonders geeignet, da sich dort alle zu beobachtenden Verkehrsmittel befinden und der Platz sowohl übersichtlich als auch verkehrstechnisch sicher ist. Um die Sicherheit zu unterstützen und Diskussionen anzuregen, sollen sich die Schülerinnen und Schüler in Gruppen, bestehend aus drei Personen, an den verschiedenen Stationen aufhalten.
Da nicht alle Schülerinnen und Schüler in ihrem Alter mit dem Lesen von Aushangsfahrplänen vertraut sind, ist Teilaufgabe **A1** eine sinnvolle Übung, die gegebenenfalls durch die Lehrkraft unterstützt werden muss.
In dem ersten Aufgabenteil sollen zwei Urlisten mit Abweichungen von den ursprünglichen Abfahrtszeiten von Bus- und Straßenbahnlinien angefertigt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen selbst erkennen, dass mit der Abweichung vom Fahrplan die Differenz zwischen der realen Ankunftszeit und der geplanten Ankunftszeit gemeint ist. Folglich wird bei einer Verspätung ein positiver Wert, bei einer verfrühten Abfahrt ein negativer Wert und bei pünktlicher Abfahrt eine Null in die dem Verkehrsmittel zugehörige Liste eingetragen. Damit wird die im Lehrplan festgesetzte Kompetenzerwartung des Planens von Datenerhebungen und der Nutzung von Werkzeugen bei deren Ausführung gefördert.

Nach der Erfassung der Daten sollen diese in den Teilaufgaben **A2** und **A3** ausgewertet werden. Dafür sind zunächst einige statistische Lageparameter zu bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler sollen anschließend jeweils für Bus und Bahn einen Boxplot zeichnen, der die Daten visualisiert.
Im Anschluss sollen aus den beiden Diagrammen Interpretationen im Sachzusammenhang gefolgert und in der Gruppe diskutiert werden. Die Darstellung in Form von Boxplots erlaubt eine Vielzahl von Aussagen, wie zum Beispiel die Streuung der Daten um den Median, die durch die Box sichtbar gemacht wird, oder ob es Ausreißer gibt, was durch die Maximal- und Minimalwerte ersichtlich ist. Dadurch, dass beide Boxplots untereinander in eine Skala eingezeichnet werden, sind direkte Vergleiche möglich. Das Interpretieren von statistischen Daten in authentischen Kontexten ist zugleich Teil des Kernlehrplans.
In den Teilaufgaben **B1** und **B2** geht es mathematisch um die Häufigkeitsbegriffe und ihre Bedeutung. In einer Stichprobe von 30 Fahrrädern soll die Anzahl der beiden Merkmalsausprägungen „verkehrssicher“ und „nicht verkehrssicher“ bestimmt werden. Das empirische Gesetz der großen Zahlen besagt, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses A bei steigendem Stichprobenumfang gegen die tatsächliche Wahrscheinlichkeit $P(A)$ konvergiert. Die Schülerinnen und Schüler müssen das Gesetz nicht beim Namen nennen, sollen aber in **B2** eine intuitive Antwort geben können, die auf dessen Aussage basiert. In den Teilaufgaben **B3** und **B4** soll mit den zuvor errechneten Wahrscheinlichkeiten fortgefahren werden. Die Schwerpunkte der beiden Aufgabenteile sind das Darstellen mehrstufiger Zufallsversuche in Baumdiagrammen und das Anwenden der Pfadregeln. Beides ist auch im Lehrplan vorgesehen.

Neben der Mathematik beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler in dieser Aufgabe mit dem Thema Verkehrssicherheit, welches sie unmittelbar betrifft.

6 Mit Kanten und Ecken zu Parketten

A1 Ja, bei der Fensterscheibe handelt es sich um ein regelmäßiges Sechseck. Die Seiten der sechseckigen Glasscheibe sind alle 26,75 Zentimeter lang und die Größe der Innenwinkel beträgt 120°. Der Umfang beträgt

$$U_{\text{Fenster}} = 26,75 \text{ cm} \cdot 6 = 160,50 \text{ cm} \approx 1,61 \text{ m}$$

Zur Berechnung des Flächeninhaltes teilen wir das regelmäßige Sechseck längs in zwei gleichseitige Trapeze, welche eine Höhe von 23,17 Zentimetern und eine Grundseite der Länge 53,50 Zentimeter haben.

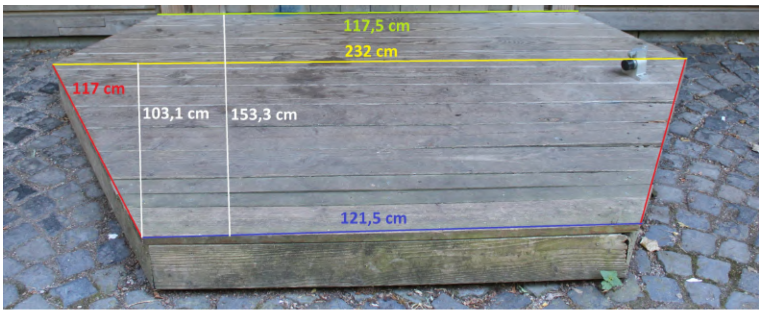
$$F_{\text{Fenster}} = 2 \cdot \left(\frac{26,75 \text{ cm} + 53,5 \text{ cm}}{2} \cdot 23,17 \text{ cm} \right) \approx 1859,39 \text{ cm}^2 \approx 0,19 \text{ m}^2$$

Der Umfang des regelmäßigen Sechsecks beträgt 1,61 Meter und der Flächeninhalt 0,19 Quadratmeter.

A2 Nein, die Fläche der Stufe kann nicht zu einem regelmäßigen Sechseck ergänzt werden, da die Seitenlängen des abgeschnittenen Sechsecks nicht gleich sind. Eine Seite ist 121,50 Zentimeter lang und die anderen beiden sind 117 Zentimeter lang, sodass kein regelmäßiges Sechseck entstehen kann. Zur Bestimmung des Flächeninhaltes teilen wir die Stufe horizontal in zwei gleichseitige Trapeze. Die Höhe des großen Trapez beträgt 103,10 Zentimeter, die des kleinen Trapezes 50,20 Zentimeter.

$$\begin{aligned} F_{\text{Stufe}} &= \frac{121,5 \text{ cm} + 232 \text{ cm}}{2} \cdot 103,1 \text{ cm} + \frac{117,5 \text{ cm} + 232 \text{ cm}}{2} \cdot 50,2 \text{ cm} \\ &\approx 26995,38 \text{ cm}^2 \approx 2,7 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Die Stufe umfasst eine Fläche von 2,7 Quadratmetern Holz.



A3 *Isabell* bestimmt die Anzahl der Diagonalen im regelmäßigen Sechseck, indem sie bei einem beliebigen Eckpunkt des Sechsecks beginnt und diesen mit den fünf übrigen Eckpunkten verbindet. Dadurch erhält sie 5 Strecken. Danach wählt sie einen dieser 5 Eckpunkte und verbindet diesen mit den restlichen vier Eckpunkten. Sie erhält insgesamt $5 + 4$ Strecken. Dies macht sie so lange, bis alle Eckpunkte miteinander verbunden sind und sie insgesamt eine Summe von $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ hat. Da eine Diagonale nur zwischen nicht benachbarten Eckpunkten liegt, müssen die sechs äußeren Seiten des Sechecks noch abgezogen werden.

Ben wählt einen anderen Weg und verbindet von vornherein einen Eckpunkt nur mit einem anderen Eckpunkt, wenn diese nicht benachbart liegen. Für den ersten beliebigen Eckpunkt kann er drei Diagonalen einzeichnen. Als nächstes wählt er einen Eckpunkt, der noch nicht verbunden wurde, aus. Von diesem kann er auch drei Diagonalen zeichnen und er erhält bisher insgesamt sechs Diagonalen. Alle Eckpunkte wurden nun mindestens einmal verbunden, sodass er nun einen Eckpunkt wählt, der bereits einmal verbunden ist. Diesen kann er mit zwei weiteren Eckpunkten verbinden. Am Ende bleiben zwei Eckpunkte übrig, die erst zweimal verbunden wurden. Diese werden schließlich durch die letzte Diagonale verbunden, sodass er insgesamt auf $3 + 3 + 2 + 1$ kommt.

Emma hat nochmals eine andere Strategie. Sie verbindet jeden Eckpunkt mit den drei nicht benachbarten Eckpunkten und erhält $3 \cdot 6 = 18$ Diagonalen. Da sie so alle Diagonalen doppelt zählt, muss die Anzahl noch durch zwei geteilt werden.

A4 Die längste Diagonale im regelmäßigen Sechseck erhalten wir, wenn wir zwei Eckpunkte verbinden, die sich genau gegenüber liegen. Die längste Diagonale hat eine Länge von 53,50 Zentimetern. Für Umfang und Flächeninhalt erhält man

$$U_{\text{Kreis}} = \pi \cdot 53,5 \text{ cm} \approx 168,08 \text{ cm} \approx 1,68 \text{ m}$$

$$F_{\text{Kreis}} = \pi \cdot (26,75 \text{ cm})^2 \approx 2248,01 \text{ cm}^2 \approx 0,22 \text{ m}^2$$

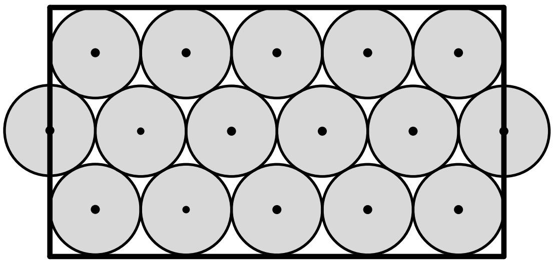
Der Umfang des Kreises beträgt 1,68 Meter und der Flächeninhalt 0,22 Quadratmeter.

A5

	Sechseck	Kreis
Umfang (cm)	160,50	168,08
Flächeninhalt (cm^2)	1859,39	2248,01
Verhältnis (F/U)	11,58	13,37

Bei der sechseckigen Form werden pro Zentimeter Umfang 11,58 Quadratzentimeter Fläche gewonnen. Beim Kreis werden pro Zentimeter Umfang 13,37 Quadratzentimeter Fläche gewonnen. Die Bienen können also bei der Kreisform mit der gleichen Menge Wachs zum Aufbau der Wabenwand mehr Fläche gewinnen. Die Kreisform ist damit die effizientere für den Bau einer Bienenwabe.

B1 Rechteck der Maße 10 cm × 5,5 cm gefüllt mit Kreisen mit Radius 1 cm.



Es fällt auf, dass zwischen den Kreisen Lücken entstehen. Außerdem entsteht auch am unteren Ende der Parkettierung ein minimaler Spalt bis zur Linie des Rechteckes. Eine lückenfreie Anordnung ist nicht möglich. Die Lücken sind am kleinsten, wenn man die Kreismittelpunkte um die Länge des Radius versetzt anordnet.

B2

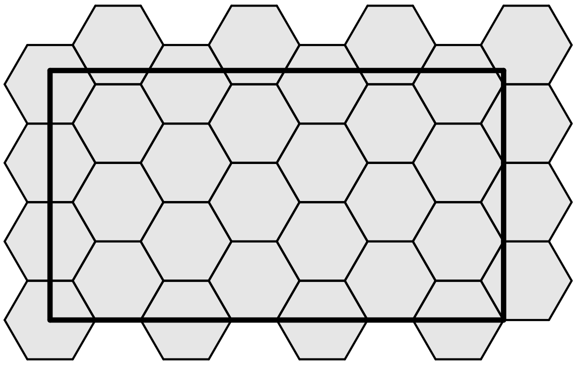
$$F_{\text{Kreise}} = 15 \cdot \pi \cdot (1 \text{ cm})^2 \approx 47,12 \text{ cm}^2$$

$$F_{\text{Rechteck}} = 5,5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 55 \text{ cm}^2$$

$$\text{Dichte der Kreispackung} = \frac{47,12 \text{ cm}^2}{55 \text{ cm}^2} \cdot 100 \approx 85,67\%$$

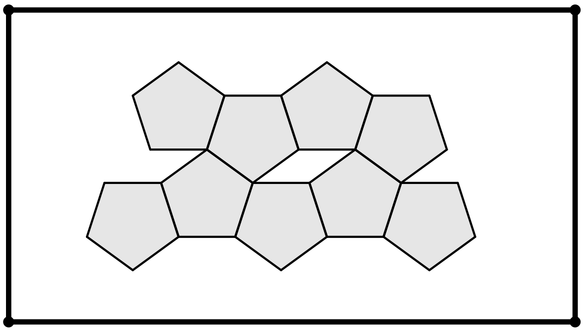
Die Kreispackung hat eine Dichte von 85,67 Prozent.

C1 Rechteck (10 cm × 5,5 cm) gefüllt mit regelmäßigen Sechsecken der Seitenlänge 1 cm.



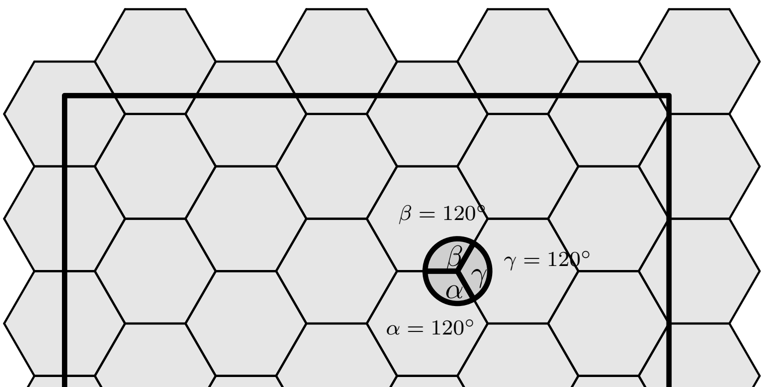
Ja, die Parkettierung gelingt, wenn die Sechsecke versetzt, analog zur Kreispackung aus Teilaufgabe **B1**, angeordnet werden.

C2 Rechteck (10 cm × 5,5 cm) gefüllt mit regelmäßigen Fünfecken der Seitenlänge 1 cm.



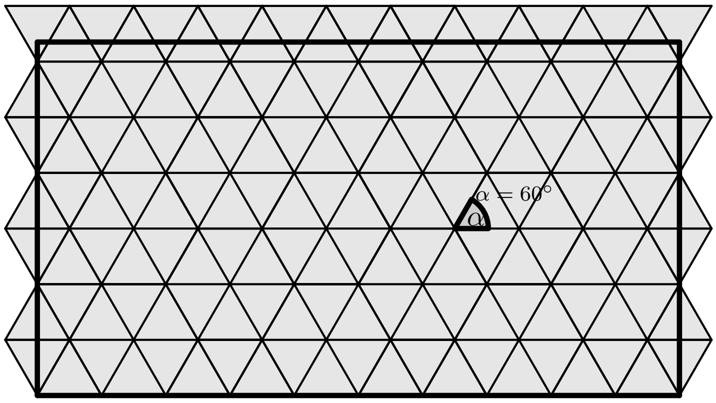
Eine lückenlose Parkettierung gelingt mit regelmäßigen Fünfecken nicht.

C3



An einer Sechseck-Ecke treffen drei Sechsecke zusammen. Die Innenwinkel lassen sich zu 360° addieren und bilden damit einen Vollkreis.

C4 Parkettierung mit regelmäßigen Dreiecken:



An einer Dreieck-Ecke treffen sechs Dreiecke zusammen. Die Innenwinkel, die jeweils eine Größe von 60° haben, lassen sich auch hier zu 360° addieren.

C5

$$\text{Innenwinkelsumme im 5-Eck} = 3 \cdot 180° = 540°$$

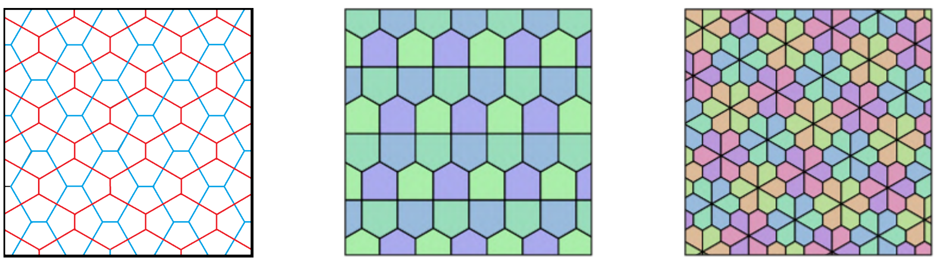
$$\text{Innenwinkelgröße im regelmäßigen Fünfeck} = \frac{540°}{5} = 108°$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 108° = 324°$$
$$\Rightarrow 4 \cdot 108° = 432°$$

Die Innenwinkelgröße in einem regelmäßigen Fünfeck beträgt 108°. Treffen drei Fünfecke an einer Ecke zusammen, ergibt sich eine Winkelsumme von 324°. Bei vier Fünfecken wären es 432°. Eine Parkettierung ist nicht lückenlos möglich, da durch das Aneinanderlegen von regelmäßigen Fünfecken mit Hilfe der Innenwinkel kein Vollkreis von 360° gebildet werden kann. Die Winkelsumme ist entweder zu gering (Lücke entsteht) oder zu hoch (Überlappung entsteht).

C6 Lückenlose und überschneidungsfreie Parkettierung ist mit solchen regelmäßigen n-Ecken möglich, deren Innenwinkel sich zu 360° addieren lassen. Dafür muss die Größe der Innnenwinkel ein Teiler von 360 sein. Das dritte regelmäßige n-Eck, mit dem die Parkettierung gelingt, ist das Quadrat, da die Innenwinkel 90° groß sind und sich durch das Aneinanderlegen von vier Quadraten ein Winkel von 360° ergibt.

C7 Mit kongruenten unregelmäßigen Fünfecken gelingt die Parkettierung der Ebene, wie folgende Beispiele zeigen:



Didaktischer Kommentar:

Neben den vielen Parkettierungsbeispielen des Alltags, die uns zum Beispiel als Fliesenmuster in Küche oder Badezimmer begegnen, lernen viele Schülerinnen und Schüler schon in der Jahrgangsstufe 6 die berühmten Parkettierungen des Künstlers E. C. Escher kennen. Manchmal werden auch eigene Parkettierungsmuster entworfen. Das Prinzip der Parkettierung sollte für die Bearbeitung dieser Aufgabe bekannt sein. Folgende Themen sollten zudem vorab im Unterricht behandelt worden sein: Winkel und Winkelsummen im Dreieck, Verhältnisrechnung, Flächeninhalt von Trapezen, Flächen- und Umfangsberechnung von Kreisen. Letzteres wird nach Kernlehrplan der Sekundarstufe I erst am Ende der 8. Klasse erlernt, sodass diese Aufgabe gut am Ende der Jahrgangsstufe 8 zur Festigung dieser Kompetenzen oder zu Beginn der Jahrgangsstufe 9 einsetzbar ist. Weiter lässt sich die Aufgabe auch fachübergreifend mit dem Biologieunterricht zum Beispiel im Themenbereich „Ökosysteme“ oder „Biotop- und Artenschutz“ verknüpfen. Die Bedeutung der Honigbiene für Mensch und Umwelt und das Bienensterben sind aktuelle und relevante Themen, die im Unterricht thematisiert werden sollten und insbesondere auch aus Sicht der Mathematik beleuchtet werden können.
Als übergeordnetes Ziel der Aufgabe sollen Schülerinnen und Schüler am Beispiel der Bienenwabe wichtige Regeln für die überschneidungsfreie und lückenlose Parkettierung der Ebene mit regelmäßigen n-Ecken herleiten. Da die Schülerinnen und Schüler möglichst ohne Hilfe des Lehrers zu diesen Erkenntnissen kommen sollen, sind die Aufgaben in mehrere Etappen unterteilt, die schrittweise zur Erklärung hinführen.
Die Schülerinnen und Schüler benötigen zur Bearbeitung der Aufgabe Schreibmaterial, ein Geodreieck, einen Zollstock und einen Zirkel. Außerdem sollte vorher im Unterricht jeweils eine Schablone eines regelmäßigen Sechsecks und eines regelmäßigen Fünfecks mit einer Seitenlänge von jeweils einem Zentimeter aus Pappe angefertigt werden, damit die Schülerinnen und Schüler die Parkettierungen zügig zu Papier bringen können. Die Bearbeitungszeit für die gesamte Aufgabe beträgt circa 90 Minuten. Die Aufgabe soll bevorzugt in Kleingruppen von drei bis vier Personen bearbeitet werden.
Während die Aufgaben am Bienenhaus in der Rheinaue bearbeitet werden, ist Vorsicht geboten, da direkt hinter dem Haus Bienenstöcke aufgebaut sind und die Bienen frei umherfliegen.

7 Bunte Flächenvielfalt

A1 Messung: $U_{B_1} = 37$ m, Formel: $d_1 = \frac{U}{\pi}$ bzw. $r_1 = \frac{1}{2} \cdot d_1$

Also folgt $d_1 = \frac{37 \text{ m}}{\pi} = 11,78$ m und $r_1 = \frac{11{,}78 \text{ m}}{2} = 5,89$ m

Das Kranichbecken hat einen Umfang von 37 Metern, der Durchmesser beträgt 11,78 Meter und der Radius 5,89 Meter.

A2 Individuelle Lösungen sind möglich. Eine mögliche Lösung besteht darin, eine Wäscheklammer an einer Schnur zu befestigen, die von zwei Seiten auf Zug gehalten wird. Die zwei Schülerinnen/Schüler stehen sich am Beckenrand so gegenüber, dass die Schnur die Kranichskulptur berührt und somit die Länge d_1 hat. Die Wäscheklammer, die fest an der Schnur anzubringen ist, soll nun dort platziert werden, wo der Durchmesser d_2 beginnt. Die Schülerin / der Schüler, die/der näher zur Wäscheklammer steht, markiert nun mit einer zweiten Wäscheklammer, den Punkt der Schnur, der genau am äußeren Beckenrand liegt. Dabei darf die Position der ersten Wäscheklammer nicht verschoben werden. Die Entfernung der beiden Wäscheklammern muss nun gemessen werden. Diese Strecke ist vom Radius r_1 abzuziehen, um so den Radius r_2 zu erhalten. Analog ist bei der Ermittlung von r_3 vorzugehen.

$r_2 = 5,89 \text{ m} - 1,70 \text{ m} = 4,19 \text{ m}$ und $d_2 = 2 \cdot 4,19 \text{ m} = 8,38 \text{ m}$ bzw.
$r_3 = 5,89 \text{ m} - 3,70 \text{ m} = 2,19 \text{ m}$ und $d_3 = 2 \cdot 2,19 \text{ m} = 4,28 \text{ m}$

Das Becken B_2 hat einen Radius der Länge $4,19$ Meter und der Radius von Becken B_3 beträgt $2,19$ Meter.

A3 Der Durchmesser d_S des Sockels der Kranichskulptur wird mit 35 Zentimetern geschätzt (Radius $r_S = 17,5$ cm). Es gilt $A_S = \pi \cdot {r_S}^2$. Daraus folgt $A_S = \pi \cdot (17,5 \text{ cm})^2 = 962,11 \text{ cm}^2$. Der Sockel der Kranichskulptur hat eine Fläche von etwa $962,11$ Quadratzentimetern.

A4 Wir messen die Wassertiefe $h = 32$ cm. Es gilt $V_S = \pi \cdot {r_S}^2 \cdot h$. Daraus folgt dann $V_S = \pi \cdot (17,5 \text{ cm})^2 \cdot 32 \text{ m} = 30787,61 \text{ cm}^3 \approx 30,79$ Liter.
Würde man die Kranichskulptur entfernen, würden 30,79 Liter mehr in das Becken B_3 passen.

A5 Es gilt $A_{B_3} = \pi \cdot {r_3}^2 - A_S$ bzw. $V_{B_3} = \pi \cdot {r_3}^2 \cdot h - V_S$. Daraus folgt

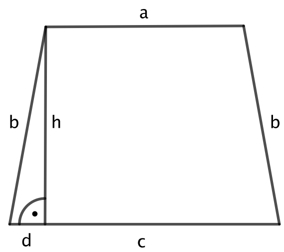
$$A_{B_3} = \pi \cdot 219 \text{ cm}^2 - 962,11 \text{ cm}^2 = 149711,81 \text{ cm}^2 = 14,97 \text{ m}^2$$

und

$$V_{B_3} = \pi \cdot (219 \text{ cm})^2 \cdot 32 \text{ cm} - 30787,61 \text{ cm}^3 = 4790778 \text{ cm}^3 \approx 4790,78 \text{ Liter}$$

Das innere Becken enthält etwa 4790,78 Liter Wasser und hat eine Wasseroberfläche von $14,97$ Quadratmetern.

B1 Individuelle Lösungen sind möglich. Ein Lösungsvorschlag: Die Basis c, die gleich langen Schenkel b und die Höhe h können vorsichtig abgemessen werden. Die Länge, die von der Basis c abgezogen werden muss, um die kürzere Grundlinie a zu erhalten, kann dann mithilfe des Satzes von Pythagoras bestimmt werden (siehe Abbildung).
Eine Messung ergibt $c = 1,68$ m, $b = 1,65$ m, $h = 1,63$ m. Es gilt $a = c - 2 \cdot \sqrt{b^2 - h^2}$ bzw. $A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$. Daraus folgt $a = 1,68 \text{ m} - 2 \cdot (\sqrt{(1,65 \text{ m})^2 - (1,63 \text{ m})^2}) = 1,16$ m und damit $A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (1,16 \text{ m} + 1,68 \text{ m}) \cdot 1,63 \text{ cm} = 2,31 \text{ m}^2$
Die zu bedeckende Fläche in Form eines Trapezes hat eine Fläche von $2,31$ Quadratmetern.



B2 Es gilt $A_{\text{Kreisring}} = \pi \cdot ({r_1}^2 - {r_2}^2)$ bzw. $A_{\text{Kreisringausschnitt}} = \frac{1}{24} \cdot A_{\text{Kreisring}}$

$A_{\text{Kreisring}} = \pi \cdot ((5,89 \text{ m})^2 - (4,19 \text{ m})^2) = 53,83 \text{ m}^2$
$A_{\text{Kreisringausschnitt}} = \frac{53{,}83 \text{ m}^2}{24} = 2,24 \text{ m}^2$

Die zu bedeckende Fläche in Form eines Kreisringausschnitts hat eine Fläche von 2,24 Quadratmetern. Die Abweichung beträgt etwa 3 Prozent. Die zweite Methode stellt die genauere der beiden Methoden dar.

B3 Folgende Maße sind zu wählen: 2 m × 2 m

Formel: (Verschnitt in Prozent) $p\% = \frac{\text{ungenutzte Fläche}\cdot 100}{\text{Gesamtfläche}}$

Rechnung: ungenutzte Fläche$= 4 \text{ m}^2 - 2,24 \text{ m}^2 = 1,76 \text{ m}^2$ bzw. $p\% = \frac{1{,}76 \text{ m}^2 \cdot 100}{4 \text{ m}^2} = 44\%$

Die Abdeckplane mit den Maßen 2 m × 2 m ist zu wählen. Der Verschnitt beträgt 1,76 Quadratmeter bzw. 44 Prozent.

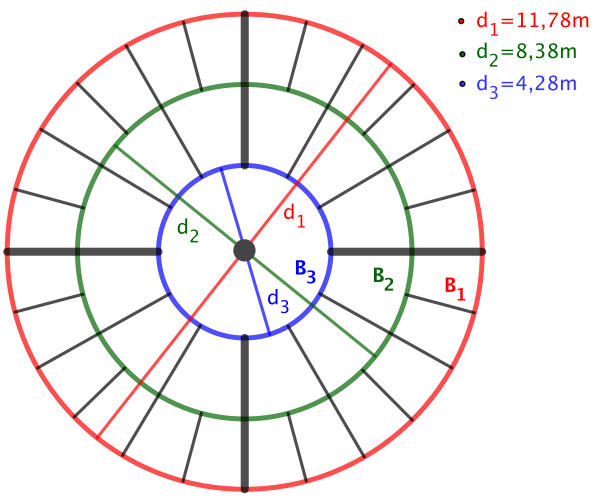
B4 Aus **A1** entnehmen wir $U_{B_1} = 37$ m. Es gilt

$$U_{\text{Kreisringausschnitt}} = 2 \cdot (r_1 - r_2) + \frac{1}{24} \cdot 37 \text{ m} + \frac{1}{24} \cdot U_{B_2}$$

und $U_{B_2} = 2 \cdot \pi \cdot r_2$. Daraus folgt $U_{B_2} = 2 \cdot \pi \cdot 4,19 \text{ m} = 26,32 \text{ m}$ und

$$U_{\text{Kreisringausschnitt}} = 2 \cdot 1,70 \text{ m} + \frac{1}{24} \cdot 37 \text{ m} + \frac{1}{24} \cdot 26,32 \text{ m} = 6,04 \text{ m}$$

Man benötigt $\frac{6{,}04 \text{ m}}{0{,}07 \text{ m}} \approx 86$ Schrauben. Es werden etwa 86 Schrauben benötigt, um die Abdeckplane zu befestigen.



Grundriss des Kranichbeckens mit den Längen d_1, d_2 und d_3

Didaktischer Kommentar:

Ein wesentliches Ziel des Geometrieunterrichts ist es, Figuren und Körper in der Umwelt zu erkennen und diese zu beschreiben. Hierbei sind die sichere Begriffsbildung bei den geometrischen Größen (Länge, Flächeninhalt und Volumen) sowie die Größenvorstellungen über diese zu schulen. Im Wesentlichen ist es das Ziel dieser Aufgabe, Probleme mit räumlichen Bezügen konkret zu erkennen und zu lösen. Dabei sollen ebene und räumliche geometrische Figuren in der Umwelt wiedergefunden und ihre Eigenschaften dazu genutzt werden, eigene Lösungsstrategien zu entwickeln, um mathematische Sachverhalte zu beschreiben.
Es wird empfohlen, die nachfolgenden Aufgaben von Schülerinnen und Schülern der achten Jahrgangsstufe bearbeiten zu lassen. Daher soll die Lehrkraft im Vorfeld die theoretischen Inhalte zur Berechnung ebener und räumlicher Strukturen einführen. Die Schülerinnen und Schüler sollen insbesondere in der Lage sein, Flächeninhalte von Kreisen und Trapezen sowie das Volumen eines Kreiszylinders zu bestimmen.
Die Teilaufgaben **A1** und **A2** sind grundlegend darauf ausgerichtet, unter Verwendung vorhandener Hilfsmittel gefragte Längen zu messen, um damit im Anschluß Berechnungen durchzuführen. Es wird betont, dass das Kranichbecken mit empfindlichem Pflanzenmaterial bepflanzt ist. Dies soll die Schülerinnen und Schüler zu einem rücksichtsvollen Umgang mit den Pflanzen veranlassen. Weiterhin soll das Schätzen von Maßen sowie das Bestimmen von Flächeninhalten und Volumina geschult werden (**A3** bis **A5**). Zunächst soll die Oberfläche des kreisrunden Sockels der Kranichskulptur geschätzt werden. Mithilfe der geschätzten Länge soll im Anschluß das Volumen, das der Sockel einnimmt, berechnet werden. Hierfür soll der Lernende das Volumen des Sockels durch das Volumen eines Kreiszylinders mit entsprechenden Maßen modellieren. Dabei muss auf das Vorwissen über den Zylinder zurückgegriffen werden. Die Formel zur Berechnung des Volumens sollte bekannt und im Rahmen des Unterrichts bereits wiederholt benutzt worden sein. Die Höhe des Zylinders kann ermittelt werden, indem der Wasserstand mithilfe eines Zollstocks gemessen wird. Dieses Ergebnis ist bei der Lösung von Teilaufgabe **A5** von Bedeutung, denn um das Wasservolumen des inneren Beckens zu berechnen, muss das Volumen des Sockels abgezogen werden. Bei der Berechnung des Wasservolumens soll erneut auf die geometrische Form des Kreiszylinders zurückgegriffen werden.
Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand des Textes einen kurzen Einblick in biologische Phänomene bekommen. Zudem bietet das reale Phänomen *Photoperiodismus* einen sinnstiftenden Kontext, der den Realitätsbezug von Mathematik angemessen verkörpern soll.
Die Lernenden sollen zunächst davon ausgehen, dass alle Ränder des Beckens dieselbe Breite haben. Ein vereinfachtes mathematisches Abbild der Realität soll somit dazu dienen, die Oberfläche eines der äußeren Kompartimente des Beckens näherungsweise zu bestimmen. Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe **B1** ist die zu ermittelnde Fläche als gleichschenkligen Trapez anzusehen. Im Anschluß daran ist die Fläche als Ausschnitt eines Kreisrings zu betrachten (**B2**), was die genauere der beiden Methoden darstellt. Hierüber soll anschließend in Zweiergruppen diskutiert werden.
Das Arbeiten mit Körpernetzen und -modellen erfordert räumliches Vorstellungsvermögen. Für die Bearbeitung der Teilaufgabe **B3** wird die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken, vorausgesetzt. Mithilfe der bereits ermittelten Maße ist eine Aussage darüber zu treffen, in welches Rechteck der Kreisringausschnitt passt. Der Verschnitt soll dabei kleinstmöglich sein.
In der letzten Teilaufgabe (**B4**) soll der Umfang des Kreisringausschnitts bestimmt werden. Hierfür müssen die Schülerinnen und Schüler auf ihre Messungen und Berechnungen aus den vorherigen Teilaufgaben zurückgreifen.

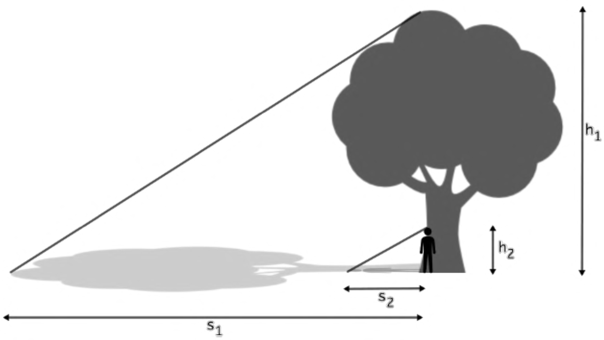
8 Geeichte Größen

A2 Die gesuchte Baumhöhe sei h_1. Nach dem 1. Strahlensatz gilt: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{s_1}{s_2}$

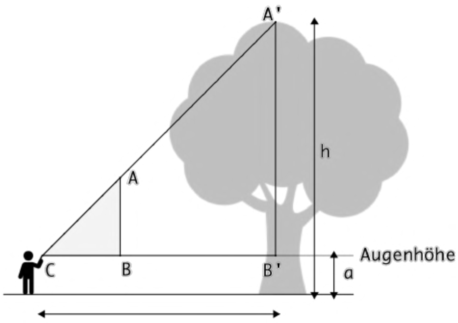
Bei einem 1,58 m großen Menschen, der einen 1,185 m langen Schatten wirft, während der Baum einen Schatten von 19,6 m wirft, gilt:

$$\frac{h_1}{1,58 \text{ m}} = \frac{19,6 \text{ m}}{1,185 \text{ m}} \Rightarrow h_1 = \frac{19,6 \text{ m}}{1,185 \text{ m}} \cdot 1,58 \text{ m} \approx 26,13 \text{ m}$$

Die Stieleiche hat eine Größe von etwa $26,13$ Metern. Damit hat sie seit 2012 etwa 13 Zentimeter an Höhe zugelegt.



A3



Die gesuchte Baumhöhe sei h. Die beiden Katheten des Geodreiecks haben jeweils die Länge $15,5$cm. Eine Messung ergibt z.B. $a = 1,50$ m und $\overline{CB'} = 24,60$ m.
Es gilt $h = \overline{A'B'} + a$ und nach dem 2. Strahlensatz $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$.
Daraus folgt $\frac{\overline{A'B'}}{24{,}60 \text{ m}} = \frac{15{,}5 \text{ cm}}{15{,}5 \text{ cm}}$ und also $\overline{A'B'} = 24,60$ m.
Wir erhalten $h = 24,60 \text{ m} + 1,50 \text{ m} = 26,10$ m.

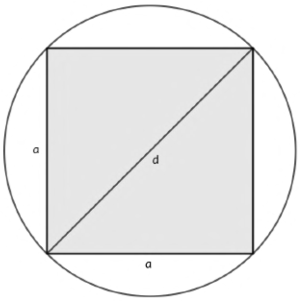
Mit dieser Methode erhalten wir eine Baumhöhe von $26,10$ Metern. Die Stieleiche hat nach dieser Rechnung seit 2012 etwa 10 Zentimeter an Höhe zugelegt.

B1 Es wurden folgende Umfänge gemessen: 310 cm, 310,3 cm und 310,8 cm. Damit folgt für den durchschnittlichen Umfang $U_{\text{Stamm}} = \frac{1}{3} \cdot (310 \text{ cm} + 310,3 \text{ cm} + 310,8 \text{ cm}) \approx 310,37$ cm. Der durchschnittliche Stammumfang (basierend auf den Messwerten) beträgt 310,37 Zentimeter.

B2 Der Baumstamm kann näherungsweise als Zylinder betrachtet werden. Es gilt $d = \frac{U_{\text{Stamm}}}{\pi}$ und $r = \frac{1}{2} \cdot d$. Wir erhalten $d = \frac{310{,}37 \text{ cm}}{\pi} \approx 98,79$ cm und $r = \frac{98{,}79 \text{ cm}}{2} \approx 49,40$ cm sowie $V_{\text{Stamm}} = \pi \cdot (49,40 \text{ cm})^2 \cdot 200 \text{ cm} \approx 1533323,41 \text{ cm}^3 \approx 1533 \text{ dm}^3$.

Der Durchmesser d beträgt ungefähr 98,79 Zentimeter und der Radius r etwa 49,40 Zentimeter. Das Teilstück des Baumstamms umfasst ein Volumen von ungefähr 1533 Liter.

B3 Das Volumen des quadratischen Balkens ist maximal, wenn die Deckfläche maximal ist.



Eine mögliche Vorgehensweise verwendet den Satz des Pythagoras. Es gilt $d^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2$ und $V_{\text{Stamm}} = a \cdot a \cdot h = a^2 \cdot h$.

Wir erhalten $2 \cdot a^2 = (98,79\text{ cm})^2 = 9759,46\text{ cm}^2$. Daraus folgt $a^2 = 4879,73\text{ cm}^2$ und schließlich $a = \sqrt{4879,73\text{ cm}^2} \approx 69,85\text{ cm}$.

Es gilt $V_{\text{Stamm}} = (69,85\text{ cm})^2 \cdot 200\text{ cm} = 975804,5\text{ cm}^3 \approx 976\text{ dm}^3 = 0,976\text{ m}^3$.
Das Volumen des quadratischen Balkens beträgt ungefähr 0,976 Kubikmeter.

B4 Die Dichte ist der Quotient aus Masse und Volumen, d.h. $m = \rho \cdot V$. Wir erhalten $m = 0,71\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 0,976\text{ m}^3 = 710\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,976\text{ m}^3 = 692,96\text{ kg}$

Die Masse des quadratischen Balkens beträgt ungefähr 692,96 Kilogramm.

C1 Die Dicke der Rinde beträgt etwa 2 Zentimeter ($d_{\text{Rinde}} = 2$ cm). Es gilt

$$V_{\text{Rinde}} = \pi \cdot (r^2 - (r - d_{\text{Rinde}})^2) \cdot h$$

Daher folgt $V_{\text{Rinde}} = \pi \cdot ((49,40\text{ cm})^2 - (47,40\text{ cm})^2) \cdot 200\text{ cm} \approx 121642,47\text{ cm}^3 \approx 122\text{ dm}^3 = 0,122\text{ m}^3$. Das Volumen der Rinde des Teilstücks beträgt ungefähr 0,122 Kubikmeter.

C2 Die Vermessung des Weinkorkens liefert folgende Maße:
Höhe $h_K = 4,5$ cm, Radius $r_K = 1,2$ cm
Es gilt $V_{\text{Korken}} = \pi \cdot r_K^2 \cdot h_K$. Daher folgt $V_{\text{Korken}} = \pi \cdot (1,2\text{ cm})^2 \cdot 4,5\text{ cm} \approx 20,36\text{ cm}^3$.
Wir schätzen den Radius des Baumes auf $r = 25$ cm und messen die Dicke der Rinde mit $d_{\text{Rinde}} = 2,5$ cm nach. Daraus folgt $V_{\text{Rinde}} = \pi \cdot ((25\text{ cm})^2 - (22,50\text{ cm})^2) \cdot 200\text{ cm} = 74612,82\text{ cm}^3$ und schließlich

$$\frac{V_{\text{Rinde}}}{V_{\text{Korken}}} = \frac{74612,82\text{ cm}^2}{20,36\text{ cm}^2} \approx 3664$$

Mit der Rinde des Teilstücks können etwa 3664 Weinflaschen verschlossen werden.

Didaktischer Kommentar:

Einer der häufigsten und sowohl ökologisch als auch wirtschaftlich bedeutendsten Laubbäume Mitteleuropas ist die Stieleiche. Die folgende Aufgabe soll Schülerinnen und Schüler dazu veranlassen, sich genauer mit der ökologischen Bedeutung von Bäumen und insbesondere mit dem Nutzen der Stieleiche und der Korkeiche zu beschäftigen.
Die Informationstafel, die vor der Stieleiche platziert ist, enthält wichtige Fakten, die die Lernenden auf die Wichtigkeit von Bäumen aufmerksam machen soll. Nicht nur für die Natur, sondern auch für den Menschen hat der Baum einen unschätzbaren Wert. Das Holz ist der meistgenutzte Stoff des Baumes. Wir nutzen es, um daraus Möbel zu bauen, stellen daraus Papier und Brennstoff her usw. Doch auch die Rinde von Bäumen wird vielfältig genutzt. Beispielsweise wird aus der Rinde der Korkeiche - wie der Name schon verrät - Kork gewonnen, welcher als Ausgangsmaterial für Weinkorken, Pinnwände oder Schuhsohlen dient. Diese Fakten nutzen wir, um realitätsbezogene Aufgaben von Schülerinnen und Schüler der

Sekundarstufe I bearbeiten zu lassen. Inhaltlich lassen sich die nachfolgenden Teilaufgaben in den Kontext des Geometrieunterrichts der achten Jahrgangsstufe einordnen.
Die Schülerinnen und Schüler sollen mit verschiedenen Methoden die Höhe der Stieleiche ermitteln. Die Bearbeitung der Teilaufgaben **A2** und **A3** setzt voraus, dass über ein grundlegendes Verständnis von Längenverhältnissen verfügt wird. Die Strahlensätze sind somit von der Lehrkraft vorab einzuführen und einzuüben. **A2** lässt die Schüler die sogenannte *Schattenmethode* verwenden. Diese Methode kann nicht durchgeführt werden, wenn es bewölkt ist. In diesem Fall ist eine Zeichnung anzufertigen und mithilfe dieser eine Gleichung aufzustellen, mit der die Baumhöhe ermittelt werden kann. Baumhöhen können außerdem mithilfe eines gleichschenkligen Dreiecks, dem sogenannten *Försterdreieck*, bestimmt werden. Diese Methode ist in Teilaufgabe **A3** anzuwenden. Das Anfertigen einer Zeichnung soll hierbei dem Lernenden helfen, die gesuchte Größe zu ermitteln.
Die Schülerinnen und Schüler sollen vorab in der Lage sein, den Umfang von Kreisen sowie das Volumen von Zylindern zu ermitteln. Zunächst sollen sie einen Schätzwert für den mittleren Stammumfang der Stieleiche angeben (**B1**), um im Anschluß sowohl den Durchmesser d als auch den Radius r des Baumstammes zu berechnen (**B2**). Außerdem lässt Teilaufgabe **B2** die Lernenden das Volumen des Baumstamms vom Boden bis zu einer Höhe von zwei Metern berechnen.
Bei Teilaufgabe **B3** handelt es sich um ein sogenanntes Extremwertproblem, genauer um ein Maximierungsproblem. Das größtmögliche Volumen des quadratischen Balkens, das aus dem Baumstamm gewonnen werden kann, soll bestimmt werden. Hierfür müssen die Schülerinnen und Schüler mit dem Satz des Pythagoras vertraut sein.
Bei den Teilaufgaben **C1** und **C2** ist das Volumen der Baumrinde zu ermitteln. Die Schülerinnen und Schüler sollen hierbei erkennen, dass das Volumen der Rinde als Differenz zweier Zylinder betrachtet werden kann.
Bei Teilaufgabe **C2** bietet die Tatsache, dass die Rinde von Korkeichen zum Verkorken von Weinflaschen genutzt wird, einen Bezug zu Realsituationen. Es wird erwartet, dass der Lernende die Aufgabe in Teilaufgaben zerlegt. Zunächst ist das Volumen eines Weinkorkens zu bestimmen, welcher von der Lehrperson mitgebracht wird. Um dann zu ermitteln, wie viele Korken dieser Größe aus der Rinde der Korkeiche produziert werden können, muss auf den Lösungsweg der Teilaufgabe **C1** zurückgegriffen werden.

9 Brunnenspiele

A1 Der Umfang des Brunnens beträgt 26,4 m. Der Durchmesser beträgt 8,4 m.

$$\frac{\text{Umfang}}{\text{Durchmesser}} = \frac{26,4\text{ m}}{8,4\text{ m}} \approx 3,14$$

Das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises wird durch die Kreiszahl π beschrieben.

A2 Der Umfang der Brunnenöffnung beträgt 23,04 m. Daraus ergibt sich ein Radius von:

$$\text{Radius} = \frac{23,04\text{ m}}{2\pi} \approx 3,67\text{ m}$$

$$\text{Gitterfläche} = \pi \cdot (3,67\text{ m})^2 \approx 42,31\text{ m}^2$$

Die Gitterfläche muss 42,31 Quadratmeter groß sein.

A3 Das Innere des Brunnens kann in vier Zylinder unterteilt werden. Addieren wir die Volumina der Teilzylinder erhalten wir das Volumen des Brunnens. Die Radien der vier übereinanderliegenden kreisförmigen Grundflächen können durch Abmessen der Durchmesser bestimmt werden. Alternativ kann der Radius eines Kreises, der unter einem anderen Kreis K liegt auch berechnet werden, indem wir vom Radius des Kreises K die Länge einer Treppenstufe abziehen. Alle Treppen haben eine Länge von 32 Zentimetern.

Aus **B1** kennen wir bereits den Umfang der ersten Kreisscheibe, die die Grundfläche des ersten Zylinders bildet. Ihren Radius haben wir auch schon zuvor berechnet. Dieser beträgt 3,67 Meter. Die Höhe des betrachteten Zylinders beträgt 15,5 Zentimeter. Mit diesen Angaben können wir das Volumen des ersten Zylinders berechnen:
$V_1 = \pi \cdot (3,67\text{ m})^2 \cdot 0,155\text{ m} \approx 6,56\text{ m}^3$

Zur Bestimmung des Radius der zweiten Kreisfläche ziehen wir nun die Länge der Treppenstufe vom bisherigen Radius ab und erhalten für den zweiten Zylinder einen Radius von 3,35 Metern. Daraus berechnen wir analog wie zuvor das Volumen des Zylinders. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} V_{\text{Brunnen}} &= 6,56\text{ m}^3 + \pi \cdot\ (3,35\text{ m})^2 \cdot\ 0,155\text{ m} + \pi \cdot (3,03\text{ m})^2 \cdot\ 0,16\text{ m} \\ &\quad + \pi \cdot (2,71\text{ m})^2 \cdot\ 0,25\text{ m} \approx 22,41\text{ m}^3 \end{aligned}$$

Der Brunnen hat ein Volumen von 22,41 Kubikmetern.

A4

$$1600\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 22,41\text{ m}^3 = 35856\text{ kg}$$

Es werden 35856 Kilogramm Sand benötigt. Das sind also etwa 35,86 Tonnen Sand. Der LKW-Fahrer muss mindestens zweimal zum Brunnen fahren, um ihn komplett mit Sand zu füllen.

A5 Es dauert lediglich 2 Sekunden bis eine 0,5-Liter-Flasche gefüllt ist. Im Brunnen befinden sich 12 Öffnungen, aus denen Wasser austritt.

$$\frac{0,5\ \mathrm{L}}{2\ \mathrm{s}} \cdot 60 \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} = 15 \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}$$

$$15 \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} \cdot 12 = 180 \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}$$

Pro Minute strömen aus allen Wasseröffnungen insgesamt 180 Liter Wasser in den Brunnen.

1 Liter entspricht 1 Kubikdezimeter. Das Volumen des Brunnens wandeln wir auch in dm^3 um: 22,41 m^3=22410 dm^3. Wir wissen bereits, dass pro Minute insgesamt 180 l (=dm^3) in den Brunnen strömen.

$$\frac{22410\ \mathrm{dm}^3}{180 \frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{min}}} = 124,5\ \mathrm{min}$$

Der Brunnnen wäre nach 124,5 Minuten, also nach 2 Stunden 4 Minuten und 30 Sekunden gefüllt.

A6 Zuerst berechnen wir wie viel Volumen der Brunnen bis zu einer Höhe von 0,5 Meter fasst. Steht das Wasser in dieser Höhe, so sind die beiden unteren Teilzylinder vollständig mit Wasser gefüllt. Das Wasser steht dann bereits in einer Höhe von 41 Zentimetern, sodass der dritte Zylinder nur teilweise bis zu einer Höhe von 9 Zentimetern gefüllt werden muss.

$$\begin{aligned} V_{\text{Brunnen bis 0,5 m Höhe}} &= \pi \cdot\ (2,71\ \ \mathrm{m})^2 \cdot\ 0,25\ \ \mathrm{m} + \pi \cdot (3,03\ \ \mathrm{m})^2 \cdot\ 0,16\ \ \mathrm{m} + \pi \cdot (3,35\ \ \mathrm{m})^2 \cdot\ 0,09\ \ \mathrm{m} \\ &\approx 13,556\ \mathrm{m}^3 = 13556\ \mathrm{dm}^3 = 13556\ \mathrm{L} \end{aligned}$$

Wenn der Brunnen bis zu einer Höhe von 0,5 Metern mit Wasser gefüllt ist, befinden sich 13566 Liter in ihm.

$$\frac{13556\ \mathrm{l}}{180 \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}} = 75,37\ \mathrm{min}$$

Das Wasser steht nach 75,37 Minuten, also nach einer Stunde 15 Minuten 22 Sekunden einen halben Meter hoch.

B1 Alle Längen werden um 100% vergrößert und damit verdoppelt. Die Radien der vier Kreise betragen nun:

Radius(Kreis 1) $= 7,34$ m
Radius(Kreis 2) $= 6,7$ m
Radius(Kreis 3) $= 6,06$ m
Radius(Kreis 4) $= 5,42$ m

B2

$$\text{Gitterfläche} = \pi \cdot (7,34\ \mathrm{m})^2 = 169,26\ \mathrm{m}^2$$

$$\begin{aligned} V_{\text{Brunnen}} =& \pi \cdot (7,34\ \mathrm{m})^2 \cdot 0,31\ \mathrm{m} + \pi \cdot (6,7\ \mathrm{m})^2 \cdot 0,31\ \mathrm{m} + \pi \cdot (6,06\ \mathrm{m})^2 \cdot 0,32\ \mathrm{m} \\ &+ \pi \cdot (5,42\ \mathrm{m})^2 \cdot 0,5\ \mathrm{m} = 179,25\ \mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Die Gitterfläche des neuen Brunnenmodells beträgt 169,26 Quadratmeter und das Volumen 179,25 Kubikmeter.

B3

	Radius Kreis 1	Gitterfläche	Volumen(Brunnen)
Modell 1	3,67 m	42,31 m^2	22,41 m^3
Modell 2	7,34 m	169,26 m^2	179,25 m^3
Verhältnis ($\frac{\text{Modell 2}}{\text{Modell 1}}$)	2	4	8

Kleine Abweichungen sind den Rundungen geschuldet. Vergleicht man die Verhältnisse der jeweiligen Größen, so lässt sich erkennen, dass die Längen, die Fläche und das Volumen um unterschiedliche Faktoren zunehmen. Bei Vergrößerung der Längen um Faktor 2 wächst die Fläche um den Faktor $2^2 = 4$ und das Volumen um den Faktor $2^3 = 8$, also allgemein: Bei einer Vergrößerung der Längen um den Faktor k, wächst die Fläche (zweidimensonal) um den Faktor k^2 und das Volumen (dreidimensional) um den Faktor k^3.

Didaktischer Kommentar:

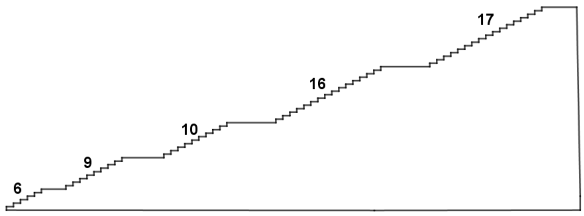
Diese Aufgabe behandelt die Volumenberechnung zusammengesetzter Körper. Das Volumen des Brunnens kann in die Volumina mehrerer Kreiszylinder unterschiedlicher Durchmesser unterteilt werden und mit Hilfe dieser von den Schülerinnen und Schülern bestimmt werden. Da die Formel zur Bestimmung des Volumens eines Zylinders vorausgesetzt wird, richtet sich die Aufgabe gemäß Kernlehrplan an Schülerinnen und Schülern der achten Klasse. Außerdem werden Berechnungen an Kreisen inhaltlich vorausgesetzt. Dieses Thema sollte vorher wiederholt und durch die Aufgabe vertieft werden. Darüber hinaus berechnen die Schülerinnen und Schülern in der Aufgabe auch die Kreiszahl π, welche bereits vorher im Unterricht eingeführt werden sollte.
Die Schülerinnen und Schülern benötigen zur Bearbeitung der Aufgabe Schreibmaterial, einen Zollstock, einen Taschenrechner, eine 0,5-Liter-Flasche, eine Stoppuhr und eine Schnur. Die Bearbeitungszeit der Aufgabe beträgt circa 45 Minuten. Die Aufgabe soll bevorzugt in Kleingruppen von drei bis vier Personen bearbeitet werden.
Zu beachten ist, dass der Brunnen in der Zeit vom 15.11.-15.01. eines jeden Jahres geschlossen ist.

10 Treppensteigen leicht gemacht

Hinweis: In dieser Lösung wird mehrfach die Tangensfunktion verwendet, um einen Winkel im rechtwinklichen Dreieck auszurechnen. Dabei ist $\tan(\alpha) = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}$*. Wenn man die Tangensfunktion nicht kennt, kann man alternativ die Hypotenuse im Dreieck mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen und anschließend den Winkel* α *durch Verwendung der Sinusfunktion bestimmen:*

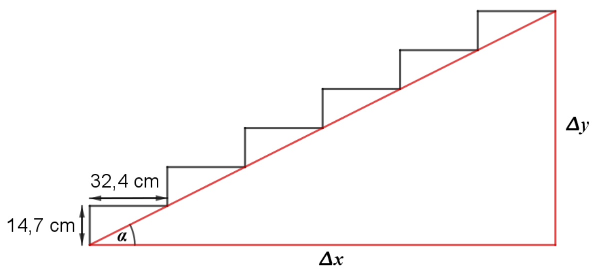
$$\sin(\alpha) = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}$$

A1 Die Skizze der Treppe in Seitenansicht kann wie folgt aussehen:



Sie zeigt die fünf Treppenabschnitte an und gibt jeweils an, aus wie vielen Treppenstufen sich die Abschnitte zusammensetzen.

A2 Eine Treppenstufe hat eine Höhe von 14,7 Zentimeter und eine Tiefe von 32,4 Zentimeter (vgl. folgende Abbildung).



Die prozentuale Steigung v lässt sich berechnen, indem man den Höhenunterschied Δy durch die horizontale Länge Δx teilt. Für den untersten Treppenabschnitt, der sich aus 6 Treppenstufen zusammensetzt, ergibt sich eine Höhe von:

$$\Delta y = 6 \cdot 14,7 \text{ cm} = 88,2 \text{ cm}$$

und eine horizontale Entfernung von:

$$\Delta x = 6 \cdot 32,4 \text{ cm} = 194,4 \text{ cm}.$$

Somit ergibt sich eine prozentuale Steigung von:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{88,2 \text{ cm}}{194,4 \text{ cm}} \approx 0,454 = 45,4~\%$$

Mithilfe der Tangens- und der Arcustangensfunktion lässt sich der zugehörige Steigungswinkel berechnen. Für den Steigungswinkel α des ersten Treppenabschnittes erhält man:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{88,2 \text{ cm}}{194,4 \text{ cm}}\right) \approx 24,40°$$

Mit diesen Werten kann die erste Zeile der Tabelle ausgefüllt werden:

Höhe Treppenstufe	Tiefe Treppenstufe	Prozentuale Steigung (%)	Steigungswinkel (Grad)	$\frac{\text{Steigungswinkel}}{\text{Prozentuale Steigung}}$
14,7 cm	32,4 cm	45,4 %	$24,4°$	

Die Treppenstufen haben eine Höhe von 14,7 Zentimeter und eine Tiefe von 32,4 Zentimeter. Der Steigungswinkel des untersten Treppenabschnittes beträgt $24,4°$, während die prozentuale Steigung $45,4$ % beträgt.

A3 Die anderen vier Treppenabschnitte haben die gleiche Steigung und somit auch den gleichen Steigungswinkel wie der unterste Treppenabschnitt. Grund dafür ist, dass Steigung immer den Verhältniswert $\frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{horizontale Entfernung}}$ angibt. Da jede Treppenstufe die gleichen Maße hat, führt eine beliebige Anzahl an Treppenstufen immer auf die gleiche Steigung. Die prozentuale Steigung ist zugleich der Tangens des Steigungswinkels, sodass sich bei gleich bleibender Steigung der Steigungswinkel entsprechend auch nicht verändert.

B1 Das Schrittmaß variiert je nach Größe eines Menschen. Beim Gehen liegt das Schrittmaß eines durchschnittlichen Erwachsenen zwischen 59 Zentimeter und 65 Zentimeter. Zwei Mal die Höhe plus die Tiefe einer Treppenstufe soll also zwischen 59 Zentimeter und 65 Zentimeter liegen, damit die Schrittmaßregel erfüllt ist. Für unsere Treppe gilt:

$$2 \cdot 14,7 \text{ cm } + 32,4 \text{ cm } = 61,8 \text{ cm}$$

Es gilt: $59 \text{ cm } < 61,8 \text{ cm } < 65 \text{ cm}$. Die Schrittmaßregel wird eingehalten.

B2 Die neue Höhe der Treppenstufe besträgt $14,7 \text{ cm} \cdot 0,5 = 7,35 \text{ cm}$. Die neue Tiefe der Treppenstufe beträgt $32,4 \text{ cm} \cdot 1,25 = 40,5 \text{ cm}$. Einsetzen in die Formel für das Schrittmaß liefert:

$$2 \cdot 7,35 \text{ cm} + 40,5 \text{ cm} = 55,2 \text{ cm}$$

Es ist 55,2 cm < 59 cm. Nach der Schrittmaßregel kann die neue Treppe nicht bequem begangen werden.

B3 In Teilaufgabe **A3** haben wir erkannt, dass es egal ist, aus wie vielen Stufen sich ein Treppenabschnitt zusammensetzt. Die prozentuale Steigung und der Steigungswinkel bleiben unverändert. Daher werden die Steigungen jetzt mit der Höhe und Tiefe einer einzelnen Treppenstufe berechnet. Es ergibt sich eine prozentuale Steigung v von:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7,35 \text{ cm}}{40,5 \text{ cm}} \approx 0,1815 = 18,15 \text{ \%}$$

Für den Steigungswinkel α des Treppenabschnittes erhält man:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7,35 \text{ cm}}{40,5 \text{ cm}}\right) \approx 10,29°$$

Mit diesen Werten kann die zweite Zeile der Tabelle ausgefüllt werden:

Höhe Treppenstufe	Tiefe Treppenstufe	Prozentuale Steigung (%)	Steigungswinkel (Grad)	$\frac{\text{Steigungswinkel}}{\text{Prozentuale Steigung}}$
14,7 cm	32,4 cm	45,4 %	$24,4°$	
7,35 cm	40,5 cm	18,15 %	$10,29°$	

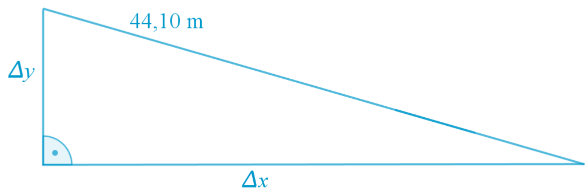
Die prozentuale Steigung der neuen Treppe beträgt 18,15 %. Der Steigungswinkel beträgt $10,29°$.

B4 Man ergänzt nun die letzte Spalte der Tabelle:

Höhe Treppenstufe	Tiefe Treppenstufe	Prozentuale Steigung (%)	Steigungswinkel (Grad)	$\frac{\text{Steigungswinkel}}{\text{Prozentuale Steigung}}$
14,7 cm	32,4 cm	45,4 %	$24,4°$	0,54
7,35 cm	40,5 cm	18,15 %	$10,29°$	0,57

Man sieht, dass die Quotienten nicht übereinstimmen. Die prozentuale Steigung und der Steigungswinkel sind nicht proportional zueinander. Das liegt natürlich daran, dass die Umkehrfunktion der Tangensfunktion keine lineare Funktion ist.

C1 Die Länge der Rampe vom obersten Treppenabsatz bis zum Knick beträgt 44,10 Meter.



Gesucht ist die prozentuale Steigung, d. h. der Quotient aus der Rampenhöhe Δy und der horizontalen Entfernung Δx. Die Rampenhöhe lässt sich über die Höhe der Treppenstufen ermitteln. Aus Teilaufgabe **A1** ist bekannt, dass der oberste Treppenabschnitt aus 17 Treppenstufen besteht. Jede Stufe hat eine Höhe von 14,7 cm. So ergibt sich:

$$\Delta y = 17 \cdot 14,7 \text{ cm} = 249,9 \text{ cm} = 2,499 \text{ m}$$

Mithilfe des Satzes des Pythagoras lässt sich nun die fehlende Seite Δx bestimmen. Setzt man in die Gleichung

$$(44,10 \text{ m})^2 = (\Delta y)^2 + (\Delta x)^2$$

den bekannten Wert für Δy ein und formt um, so erhält man:

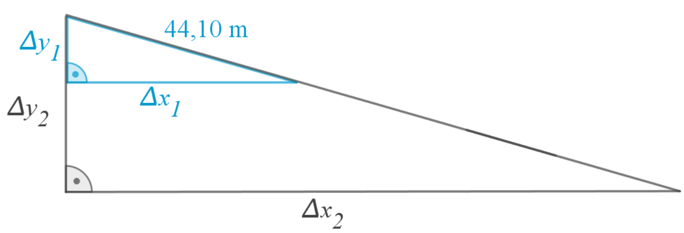
$$(44,10 \text{ m})^2 = (2,499 \text{ m})^2 + (\Delta x)^2$$

und schließlich $(\Delta x)^2 \approx 1938,56 \text{ m}^2$. Daraus folgt $\Delta x \approx 44,03$ m. Mit den berechneten Werten für den Höhenunterschied und die horizontale Entfernung lässt sich nun die prozentuale Steigung berechnen:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{2,499 \text{ m}}{44,03 \text{ m}} \approx 0,0568 = 5,68 \text{ \%}$$

Der oberste Rampenabschnitt hat somit eine Steigung von 5,68 %.

C2



Nach der vorherigen Aufgabe beträgt die Steigung des obersten Rampenabschnittes 5,68 %. In der Abbildung ist der oberste Rampenabschnitt blau gefärbt. Wenn die Rampe mit dieser Steigung weitergeführt werden soll, so muss für die Steigung der gesamten Rampe gelten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,0568 = 5,68\ \%$$

Δy beschreibt dabei den Höhenunterschied, der mit der Rampe überwunden werden muss. Dieser lässt sich mithilfe der Treppenstufen berechnen. Man weiß, dass man insgesamt 58 Treppenstufen mit einer Höhe von 14,7 cm benötigt, um den Höhenunterschied zu überwinden. So ergibt sich:

$$\Delta y = 58 \cdot 14,7 \text{ cm} = 852,6 \text{ cm} = 8,526 \text{ m}$$

Dieser Wert wird nun in die obige Gleichung eingesetzt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8,526 \text{ m}}{\Delta x} = 0,0568$$

und anschließend kann nach der Unbekannten Δx umgeformt werden:

$$\Delta x = \frac{8,526 \text{ m}}{0,0568} = 150,11 \text{ m}$$

Die gesuchte Rampenlänge l lässt sich nun über den Satz des Pythagoras ermitteln:

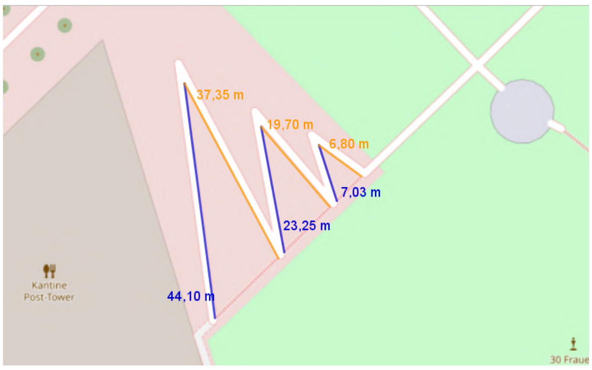
$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = l^2$$

Einsetzen der bekannten Werte für Δx und Δy und Umformen nach der Unbekannten l liefert:

$$l^2 = (150,11 \text{ m})^2 + (8,526 \text{ m})^2 \approx 22605,7 \text{ m}^2$$

und schließlich $l \approx 150,35$ m. Die Länge der Rampe beträgt circa 150,35 m.

C3 Die Längen der einzelnen Rampenabschnitte sind der folgenden Abbildung zu entnehmen:



Bildnachweis: © OpenStreetMap – Mitwirkende (www.openstreetmap.org)

Insgesamt (ohne waagerechte Teilstücke) hat die Rampe eine Länge von 138,23 Meter. Es gilt

$$\frac{138,23 \text{ m}}{150,35 \text{ m}} = 0,919 = 91,9\%$$

Die Zick-Zack-Rampe ist etwa $8,1\ \%$ kürzer.

C4 Aus der Tatsache, dass die zick-zack-förmige Rampe kürzer als die gerade verlaufende Rampe ist, lässt sich schließen, dass nicht alle Zick-Zack-Rampenabschnitte die gleiche Steigung wie der oberste Rampenabschnitt haben. Durchschnittlich haben die unteren fünf Rampenabschnitte eine größere Steigung als der oberste Abschnitt.

Didaktischer Kommentar:

Das Thema Steigung, welches in einem geometrischen Kontext im Mathematikunterricht häufig nur am Rande behandelt wird, soll in dieser Aufgabe eine praktische Anwendung finden. Die Begriffe „prozentuale Steigung“ und „Steigungswinkel“ sollten den Schülerinnen und Schülern bekannt sein.
Im Sinne der Binnendifferenzierung soll zu Beginn (Teilaufgabe **A1**) eine Skizze erstellt werden, die die Bearbeitung der folgenden Aufgaben erleichtern kann. Mit Teilaufgabe **A2** erfahren die Schülerinnen und Schüler erste Zusammenhänge zwischen der prozentualen Steigung und dem Steigungswinkel. Das Vorgehen zur Berechnung der Steigung wird dabei als bekannt vorausgesetzt und nicht näher angeleitet. Allerdings kann der vorausgegangene Aufgabenzusatz „Miss die Höhe und die Tiefe einer einzelnen Treppenstufe [...]“ als Hilfestellung dienen. Aus den Maßen einer einzelnen Treppenstufe kann mithilfe des Dreisatzes leicht auf die benötigten Werte für die Höhe und die horizontale Länge des Treppenabschnittes geschlossen werden.
Bei der Berechnung des Steigungswinkels in Teilaufgabe **A2** müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass mithilfe der Tangens- beziehungsweise Arcustangensfunktion aus der prozentualen Steigung auf den Steigungswinkel geschlossen werden kann. Vor dem mathematischen Spaziergang sollten somit die trigonometrischen Funktionen, insbesondere die Tangensfunktion und ihre charakteristischen Eigenschaften, thematisiert werden.
In Teilaufgabe **A3** können die Schülerinnen und Schüler unter Beweis stellen, dass sie den Begriff der Steigung auf einer abstrakten Ebene verstanden haben. Die offene Formulierung soll Raum für Argumentation geben.
Aufgabenteil **B** bringt die zwei zunächst separat betrachteten Begriffe „prozentuale Steigung“ und „Steigungswinkel“ in einen Zusammenhang. Mit diesem Aufgabenteil wird das Lernziel verfolgt, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass Steigung und Steigungswinkel nicht proportional zueinander sind, und es somit nicht möglich ist, Steigungen und Steigungswinkel mit einem einfachen Dreisatz ineinander umzurechnen.
Mit Aufgabenteil **C** erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, sich noch einmal intensiv mit dem Begriff der Steigung auseinanderzusetzen.
Es bietet sich an, die Aufgabe mit Schülerinnen und Schülern zu behandeln, die am Ende der achten Jahrgangsstufe stehen, vorausgesetzt die trigonometrischen Funktionen wurden bereits thematisiert. Aus ihrer vorherigen Schullaufbahn sollte den Lernenden bekannt sein, dass die Steigung das Verhältnis zwischen Höhenunterschied und horizontaler Entfernung angibt. Einfache Berechnungen mit dem Dreisatz und Prozentwerten werden ebenfalls vorausgesetzt.

11 Auf den Spuren von Felix Hausdorff

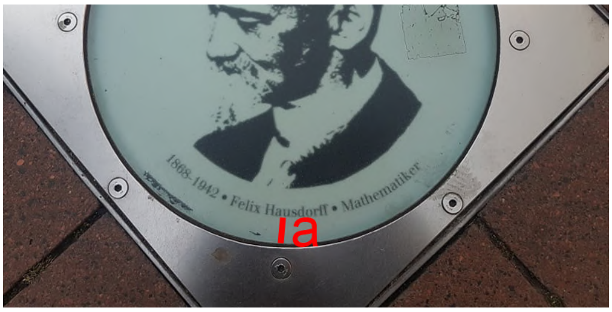
A1 Der Durchmesser des Kreises beträgt 35 Zentimeter, der Radius demnach 17,5 Zentimeter. Für den Flächeninhalt F_{Kreis} des Kreises gilt also:

$$F_{\text{Kreis}} = \pi \cdot (0,175 \text{ m})^2 \approx 0,096 \text{ m}^2$$

A2 Berechne zunächst den Flächeninhalt F_Q des Quadrates, in dem die Metallfläche und der Kreis liegen. Die Seiten des Quadrates sind 40 cm lang. Bestimme dann die Fläche F_M, die aus Metall ist.

$$F_Q = 0,4 \text{ m}0,4 \text{ m} = 0,16 \text{ m}^2$$
$$\Rightarrow F_M = F_Q - F_K \approx 0,16 \text{ m}^2 - 0,096 \text{ m}^2 = 0,064 \text{ m}^2$$

A3 Messe hierfür die in der untenstehenden Abbildung eingezeichnete Länge a. Der Radius r_2 des imaginären Kreises, auf dem die Schrift steht, entspricht dann $r - a$.



Mit $a = 2cm$ folgt: $r_2 = 0,155m$. Man erkennt anhand der Punkte, die in regelmäßigen Abständen um den Kreis verlaufen, dass der Schriftzug über $\frac{2}{8}$ des Gesamtumfangs des imaginären Kreises verläuft. Somit folgt für die gesuchte Länge l mit der Formel für den Umfang eines Kreises:

$$l = \frac{1}{4}(2\pi \cdot 0,155) \text{ m} \approx 0,243 \text{ m}$$

A4 Die gegebene Information lautet: 1868–1942. Abhängig davon, ob Hausdorff vor oder nach seinem Geburtstag im Jahr 1942 starb, ist er 73 oder 74 Jahre alt geworden. (Da er im November geboren wurde und im Januar starb, wurde er 73 Jahre alt.)

A5 Sei a_n die Anzahl der Steine der Umrahmung der Tiefe n. Dann gilt:

$$a_1 = 12,\ a_{n+1} = a_n + 8 \text{ bzw. } a_n = 4 + 8n$$

Zum Beispiel ist dann $a_2 = 20$ und $a_3 = 28$. Sei nun b_n die Anzahl der Steine innerhalb der Umrahmung der Tiefe n (einschließlich der Steine der Umrahmung n). Zur Ermittlung der b_n müssen die a_n aufsummiert werden. Es ergibt sich b_n mit

$$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Zum Beispiel gilt dann $b_1 = 12, b_2 = 32, b_3 = 60$.

A6 Durch Betrachtung der Steine erkennt man, dass es maximal eine sechste Ebene geben kann:

Die Anzahl der in ihr enthaltenen Steine ist somit gerade b_6, also:

$$\begin{aligned} b_6 = & \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ = & \quad (4+8\cdot 1)+(4+8\cdot 2)+(4+8\cdot 3)+(4+8\cdot 4)+(4+8\cdot 5)+(4+8\cdot 6) \\ = & \quad 12+20+28+36+42+50 = 188 \end{aligned}$$

Da ein quadratischer Stein eine Kantenlänge von 20 cm hat, ist die Gesamtfläche der Steine

$$188 \cdot (0,2 \text{ m})^2 = 7,52 \text{ m}^2$$

groß .

B1 Es ergeben sich die Mengen $M_1 = \{F, E, L, I, X\}$, $M_2 = \{H, A, U, S, D, O, R, F\}$, $M_3 = \{M, A, T, H, E, I, K, R\}$.

B2
$M_1 \cap M_2 = \{F\}$, $M_2 \cap M_3 = \{H, A, R\}$, $M_1 \cap M_3 = \{E, I\}$
$M_1 \cup M_2 = \{F, E, L, I, X, H, A, U, S, D, O, R\}$,
$M_2 \cup M_3 = \{H, A, U, S, D, O, R, F, M, T, E, I, K\}$,
$M_1 \cup M_3 = \{F, E, L, I, X, M, A, T, H, K, R\}$

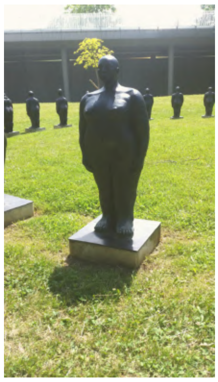
B3 $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{\}$, $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{F, E, L, I, X, H, A, U, S, D, O, R, M, T, K\}$

Didaktischer Kommentar:

Die Aufgabe „Felix Hausdorff“ ist für die Jahrgangsstufe 8 oder 9 konzipiert. Da sie das Konzept *Flächeninhalt eines Kreises* enthält, müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, diesen zu berechnen, weshalb die Aufgabe ab der Jahrgangsstufe 8 empfohlen wird. Die Aufgabe ermöglicht, neben dem Anwenden bekannter Konzepte, einen Blick über den Tellerrand in die von der Schulmathematik unberührten Gebiete der Mathematik. Dieser spielerische Einblick ist sowohl für bereits von der Mathematik begeisterte Schülerinnen und Schüler als auch für diejenigen, die ihre Begeisterung noch nicht gefunden haben, gedacht.
Die Teilaufgaben **A1** bis **A3** zielen auf das Berechnen von Flächeninhalten und Umfängen ab. Sie können gut mit der bekannten Schulmathematik bewältigt werden. Die Teilaufgaben **A5** und **A6** fordern die Schülerinnen und Schüler dazu auf, eine Folge zu benennen, die die Anzahl der Steine beschreibt. Hierzu müssen sie ihre erhobenen Daten verallgemeinern. Die Teilaufgaben **B1** bis **B3** setzen sich mit der Mengenlehre auseinander, in der Felix Hausdorff unter anderem gewirkt hat.

12 Sonnenstrahlen auf Bronze

A1 Im Folgenden wird die Größe der Figur „Egg Head“ beispielhaft bestimmt. Diese hat am 15.06.2018, einem sonnigen Tag, um 15:00 Uhr einen Schatten von 70 cm geworfen. Eine 175 Zentimeter große Mitschülerin hatte zum gleichen Zeitpunkt eine Schattenlänge von 133,50 Zentimeter.

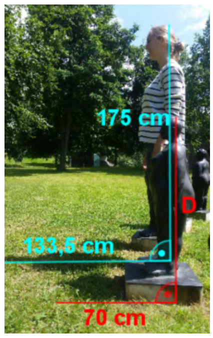


A2 Die Sachsituation lässt sich in ein mathematisches Modell übersetzen, indem zwei rechtwinklige, ähnliche Dreiecke konstruiert werden. Auf dieser Grundlage lässt sich folgende Verhältnisgleichung aufstellen:

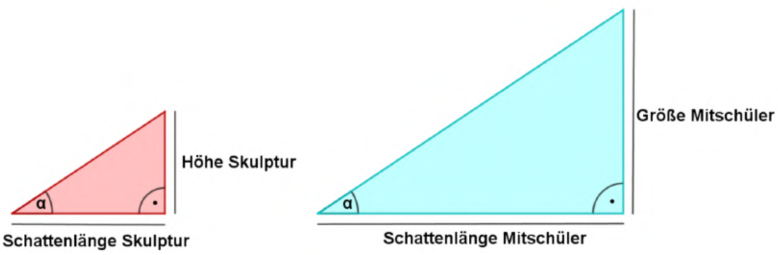
$$\frac{\text{Skulptur}}{\text{Größe Mitschüler}} = \frac{\text{Schattenlänge Skulptur}}{\text{Schattenlänge Mitschüler}}$$

Folgende Werte sind bekannt:

- Größe des Mitschülers: $A = 175$ cm
- Schattenlänge des Mitschülers: $B = 133{,}5$ cm
- Schattenlänge der Figur: $C = 70$ cm
- Höhe des Sockels, auf dem die Figur steht: 10 cm
- Höhe der Skulptur (Figur + Sockel): D
- Gesuchte Höhe der Figur: $H = D - 10$ cm

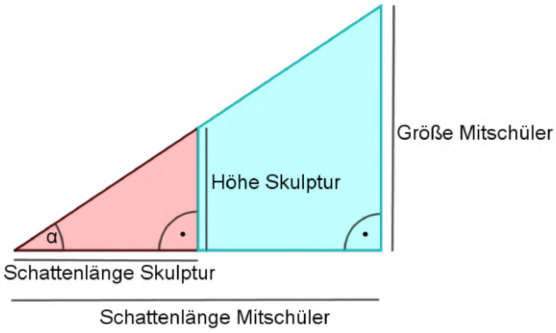


Es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke:



Diese sind ähnlich zueinander, da sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Die Rechtwinkligkeit der Dreiecke lässt sich über den (annähernd) geraden Stand der Skulptur und der Mitschülerin erklären. Die Identität des Winkels α ist darin begründet, dass es nur eine Sonne gibt, die zum Messzeitpunkt im selben Winkel auf die Figur und die Mitschülerin strahlt.

Durch Übereinanderlegen der beiden Dreiecke entsteht folgende Figur:



D_1 und D_2 überlagert

Man kann nun erkennen, dass die Längen der Schatten proportional zur Höhe der Objekte sind. Somit ist die Länge des menschlichen Schattens geteilt durch die Größe des Menschen immer gleich der Länge des Schattens der Skulptur durch ihre Größe. Es gilt folgende Verhältnisgleichung:

$$\frac{D}{A} = \frac{C}{B}$$

Dies ist gerade die Aussage des zweiten Strahlensatzes. Nach Definition von D folgt:

$$\frac{H + 10 \text{ cm}}{A} = \frac{C}{B}$$

Formt man nun die Gleichung nach der Unbekannten H um:

$$\frac{H + 10 \text{ cm}}{A} = \frac{C}{B} \Leftrightarrow H = \frac{A \cdot C}{B} - 10 \text{ cm}$$

und setzt die bekannten Werte ein, so erhält man für die Größe der Skulptur:

$$\frac{175 \text{ cm } \cdot 70 \text{ cm}}{133,5 \text{ cm}} - 10 \text{ cm} \approx 81,76 \text{ cm}$$

Die Größe der Bronzefigur „Egg Head" beträgt circa 81,76 Zentimeter.

A3 Der gesuchte Winkel kann unter Verwendung der Definition des Tangens berechnet werden. Hier variiert die Lösung je nach Zeitpunkt des Messens. Der Sonnenstand ist sowohl von der Uhrzeit als auch von der Jahreszeit abhängig. In der folgenden Beispielrechnung werden die Messwerte aus der vorherigen Teilaufgabe genutzt. Die Werte können der Skizze entnommen werden.

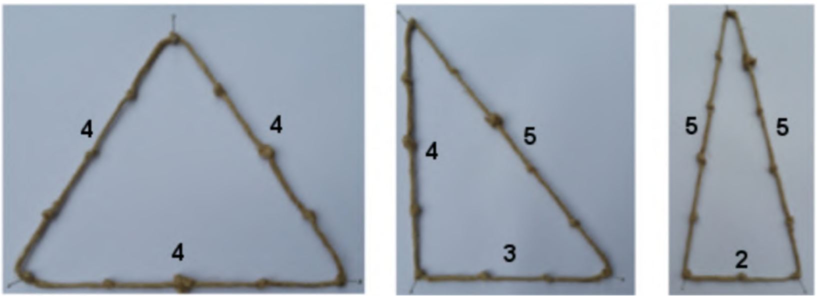
Gesucht ist der Winkel α. Unter Verwendung der Tangensfunktion erhält man:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{91,76 \text{ cm}}{70 \text{ cm}}\right) \approx 52,66°$$

Der Einfallswinkel der Sonne betrug zum Zeitpunkt der Messung circa 52,66 Grad.

B1 Folgendes Bild zeigt ein Knotenseil:

B2 Folgende Dreiecke lassen sich mit dem 12-Knotenseil aufspannen:



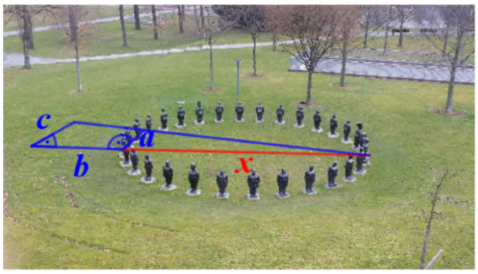
B3 Spannt man die 12-Knotenschnur zu einem Dreieck mit den Kantenlängen 3, 4 und 5 auf, so ergibt sich ein rechter Winkel zwischen den beiden kürzeren Seiten des Dreiecks. Die Tatsache beruht auf dem Satz des Pythagoras, welcher besagt, dass ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c rechtwinklig ist, genau dann wenn die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, wobei c die Hypothenuse bezeichnet (es gilt: $3^2 + 4^2 = 5^2$).

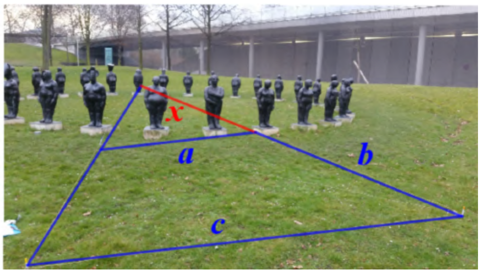
B4 Auch mit einem 30-Knotenseil lässt sich ein rechter Winkel konstruieren. Spannt man ein Dreieck mit den Kantenlängen 5, 12 und 13, so ist dieses rechtwinklig. Es gilt : $5^2 + 12^2 = 13^2$.

C1 Die Schülerinnen und Schüler diskutieren verschiedene Möglichkeiten, den Durchmesser zu berechnen. Beispiele sind:

Vorgehensweise	Vorteil	Nachteil
Umfang des Außenkreises mit einer Schnur messen und d aus der Formel $U = \pi \cdot d$ zu berechnen	sehr genau	Man benötigt sehr viel Schnur.
Breite des Figurensockels ausmessen und abschätzen, wie viele Sockel aneinandergereiht in den Kreis passen	Die Breite des Sockels kann genau gemessen werden.	Lösung beruht auf Schätzung und ist daher ungenau
Zum Kreisdurchmesser parallele Strecken abgehen und Anzahl der benötigten Schritte zählen	Kein Material wird benötigt, schnelles Vorgehen	ungenau, da Schrittmaß variiert
Zwei gegenüberliegende Figuren ausmachen, an einer der Figuren ein Ende eines Seiles festhalten und diesen Punkt auf dem Seil markieren. Den Rest des Seiles zur gegenüberliegenden Figur werfen. Seil spannen und Endpunkt am Seil markieren. Anschließend Länge zwischen Markierungspunkten abmessen.	sehr genau	Hilfe eines Mitschülers wird benötigt. Seil und Maßband werden benötigt.

C2 Die Längen der Strecken a, b, c und d sind variabel. Die Verhältnisse, in denen sie zueinander stehen, werden aber immer durch die selben Gleichungen beschrieben. Beim Abstecken der Strecken muss darauf geachtet werden, dass der Boden eben bleibt. Die folgenden Abbildungen zeigen die abgesteckten Strecken aus unterschiedlichen Perspektiven.

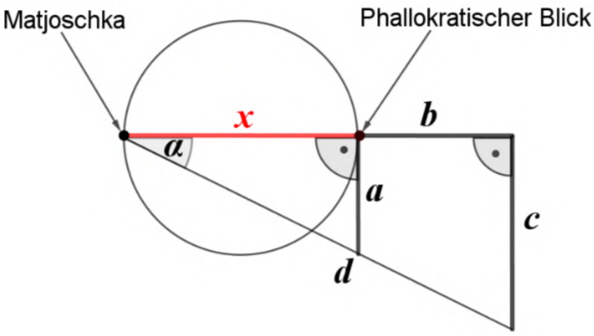




Die eingezeichneten Strecken haben dabei folgende Längen:

- $a = 3{,}73$ Meter
- $b = 4{,}17$ Meter
- $c = 4{,}88$ Meter

C3 Der schwarze Kreis in der folgenden Abbildung stellt den Figurenkreis von oben dar. Die abgesteckten Strecken sind eingezeichnet und die zueinander ähnlichen Dreiecke farblich gekennzeichnet. Dreieck 1 wird durch die Katheten x und a aufgespannt. Das dazu ähnliche Dreieck 2 wird durch die Katheten $x + b$ und c aufgespannt.



Nach dem Ähnlichkeitssatz WWW sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich, da sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Sie beinhalten den gemeinsamen Winkel α und jeweils einen rechten Winkel gegenüber der Hypothenuse. Nach dem Winkelsummensatz ist der dritte Winkel der beiden Dreiecke ebenfalls gleich groß.

C4 In dem Kontext gilt folgende Verhältnisgleichung:

$$\frac{x}{x+b} = \frac{a}{c}$$

Dies entspricht der Aussage des zweiten Strahlensatzes (Die Abschnitte auf den Parallelen (hier a und c) verhalten sich wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel aus gemessenen, Strecken auf jeweils derselben Gerade (hier x und $x + d$).
Setzt man nun die gemessenen Werte ein und formt nach x um, so erhält man:

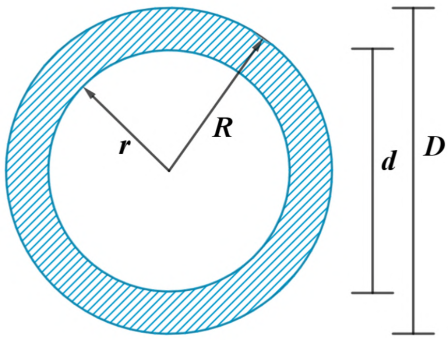
$$\frac{x}{x+4,17\text{ m}} = \frac{3,73\text{ m}}{4,88\text{ m}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4,17\text{ m}\ +x}{x} = \frac{4,88\text{ m}}{3,73\text{ m}} \quad\Leftrightarrow\quad 4,17\text{ m}+x = \frac{4,88\text{ m}\ \cdot x}{3,73\text{ m}}$$

$$\Leftrightarrow\ 15,5541\text{ m} + 3,73\text{ m}\cdot x = 4,88\text{ m}\cdot x \ \Leftrightarrow\ 15,5541\text{ m}\ = 1,15\text{ m}\cdot x\ \Leftrightarrow\ 13,53\text{ m}\ \approx x$$

Der Durchmesser des Außenkreises beträgt circa 13,53 Meter.

D1 Der Sockel hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche. Die Grundfläche hat eine Seitenlänge von 40 Zentimetern. Um den Durchmesser des Innenkreises zu erhalten, müssen wir die Seitenlänge des Sockels von dem Durchmesser des Außenkreises zwei mal abziehen: 13,53 Zentimeter $-2 \cdot 40$ Zentimeter $= 12,73$ Zentimeter.

D2 Die folgende Grafik verdeutlicht den Sachzusammenhang. Gesucht ist die Fläche des Kreisrings (hier blau schraffiert), also die Fläche zwischen Innenkreis und Außenkreis.



Dabei ist:

- A die Fläche des Kreisrings
- R der Radius des Außenkreises
- r der Radius des Innenkreises
- D der Durchmesser des Außenkreises
- d der Durchmesser des Innenkreises

Man erhält die Fläche des Kreisrings, indem man die Fläche des großen Kreises nimmt und davon die Fläche des kleinen Kreises abzieht.
Basierend auf den Angaben in der Grafik gilt somit folgende Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes des Kreisrings:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Nach den Teilaufgaben C4 und D1 beträgt der Durchmesser des Außenkreises 13,53 Meter und der Durchmesser des Innenkreises 12,73 Meter. Für den Radius r gilt allgemein: $r = \frac{d}{2}$.
Damit lässt sich der gesuchte Flächeninhalt berechnen:

$$A_{\text{Kreisring}} = \pi \cdot ((6,765\text{m})^2 - (6,365\text{m})^2) \approx 16,50\text{m}^2$$

Die Fläche des Kreisrings beträgt 16,50 Quadratmeter.

Didaktischer Kommentar:

Der Themenbereich *Strahlensatz* ist im Lehrplan der Sekundarstufe I verankert. Die Aufgabe soll den Schülerinnen und Schülern einen Eindruck davon vermitteln, wie hilfreich die Strahlensätze beim Vermessen von Objekten sind, deren Höhe oder Breite nicht ohne weiteres bestimmbar sind. Die Aufgaben lassen sich lösen, ohne dass der Begriff des Strahlensatzes im Unterricht eingeführt wurde. Es sollte jedoch die Definition von Ähnlichkeit durch vielfältige handlungsorientierte Tätigkeiten, Beispiele und Gegenbeispiele eingeführt und mit seinen Voraussetzungen bekannt sein. Besonders wichtig ist die Erkenntnis, dass bei ähnlichen Figuren entsprechende Seitenverhältnisse und entsprechende Winkel übereinstimmen.
In den Teilaufgaben **A1** bis **A3** findet eine Hinführung zum Thema Strahlensätze über eine anwendungsorientierte Aufgabe statt. Ausgehend von Messungen von Schattenlängen (Teilaufgabe **A1**) sollen die Schülerinnen und Schüler die Größe einer Bronzefigur berechnen (Teilaufgabe **A2**). Dabei sollen die bekannten Teilgrößen in das richtige Verhältnis gesetzt und so auf die Verhältnisgleichung des ersten Strahlensatzes geschlossen werden. Um die Aufgabe lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler ihr Vorwissen zur Ähnlichkeit von Dreiecken reaktivieren und sich auf dieser Grundlage die zur Messsituation passende Strahlensatzfigur selbstständig erarbeiten.
Um die inhaltliche Vorstellung des neu erarbeiteten Inhalts so zu etablieren, dass diese für ein nachhaltiges Verständnis nutzbar gemacht werden kann, findet mit den Teilaufgaben **C1** bis **C4** eine Vertiefung des Sachverhaltes statt. Vorher (in den Teilaufgaben **B1** bis **B4**) wird ein kurzer thematischer Abstecher vorgenommen, in dem sich die Schülerinnen und Schüler mit dem Satz des Pythagoras auseinandersetzen. Die Aufgabe ist mit Absicht an dieser Stelle platziert, da die neu erlernte Vorgehensweise zur Konstruktion rechter Winkel im anschließenden Aufgabenteil benötigt wird. Nach einer kurzen historischen Einleitung erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, ihr eigenes 12-Knotenseil herzustellen. Die Erstellung dieses Werkzeuges ist sehr einfach und nimmt nicht viel Zeit in Anspruch, weshalb es sich anbietet, es direkt vor Ort bauen zu lassen. Lerngruppen, denen nicht so viel Zeit zur Verfügung steht, haben die Möglichkeit, das 12-Knotenseil vorher im Unterricht vorzubereiten. Durch die informative Einleitung zu Beginn dieses Aufgabenteiles wird die historische Arbeitsweise für die Mathematik bewusst nutzbar gemacht. Gleichzeitig dient die historische Problemstellung dazu, die Geschichte im Hinblick auf die Schülermotivation gewinnbringend in den Mathematikunterricht einzubinden. Das in Dreiergruppen erstellte Knotenseil soll in Teilaufgabe **B2** experimentell zur Konstruktion verschiedener Dreiecke eingesetzt werden. Die Bearbeitung dieser Aufgabe in Dreiergruppen bietet sich an, da das Knotenseil an drei Stellen gespannt werden muss, um ein Dreieck zu konstruieren. Die Frage nach dem rechten Winkel in Teilaufgabe **B3** schafft den Rückbezug zur Mathematik. Nachdem der Satz des Pythagoras erkannt wurde, können die Lernenden in einem letzten Transfer (Teilaufgabe **B4**) die Erkenntnisse der Aufgabe zusammenfassen, indem sie ihr Wissen abstrahierend auf ein 30-Knotenseil anwenden.
Mit den Teilaufgaben **C1** bis **C4** erfahren die Schülerinnen und Schüler einen weiteren Anwendungskontext, in dem sich die Verwendung von Strahlensätzen anbietet, um nicht zugängliche Längen zu bestimmen. Sie werden bemerken, dass das ihnen bekannte Verfahren, den Durchmesser eines Kreises mit der Formel $d = 2 \cdot r$ (wobei d den Durchmesser und r den Radius des Kreises bezeichnet) zu berechnen, in diesem Kontext keine Anwendung findet. Das Schaffen neuer Zusammenhänge (hier zwischen Kreisberechnungen und Strahlensätzen) veranlasst sie, ihre gedankliche „Spurrille“ zu verlassen. In Form einer Gruppendiskussion sollen zunächst Lösungsansätze für das beschriebene Problem formuliert werden. Der Lehrer ist in dieser Gruppenphase nicht involviert, sodass zwischen den Lernenden eine lockere Lernatmosphäre herrschen kann, in der jeder seine Gedanken und Vorschläge hervorbringen kann. Mit Teilaufgabe **C2** wird den Lernenden ein Lösungsweg vorgegeben, der sie zu der gesuchten Größe

führen soll. Als eine Art Bauplan dient dabei die Abbildung „Methode zur Bestimmung des Durchmessers des Außenkreises“, aus welcher die Schülerinnen und Schüler ablesen können, nach welchem Muster die jeweiligen Strecken abgesteckt werden müssen. Das Abmessen der rechten Winkel mit dem Knotenseil schafft einen Rückbezug zu Aufgabenteil **B**. Nachdem die Strecken wie vorgegeben abgesteckt und vermessen wurden, besteht die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler darin, mithilfe der selbst erfassten Daten den gesuchten Kreisdurchmesser zu berechnen. Ähnlich wie in Aufgabenteil **A** wird diese Erkenntnis über die Reaktivierung des Schülerwissens zur Ähnlichkeit von Dreiecken herbeigeführt. Teilaufgabe **C3** trägt somit dazu bei, dass die bekannten Teilgrößen ins richtige Verhältnis gesetzt werden und die Schülerinnen und Schüler davon ausgehend auf die Verhältnisgleichung des zweiten Strahlensatzes gelangen.
Die Teilaufgaben **D1** bis **D2** wenden sich einem anderen Themengebiet zu, sind aber insofern in diesem Kontext passend, dass die Ergebnisse aus Aufgabenteil **C** aufgegriffen werden. Mit den Teilaufgaben wird eine neue Teilfläche des Kreises, der Kreisring, eingeführt. Das Lernziel ist es, dass die Schülerinnen und Schüler eine Formel entwickeln, mit deren Hilfe sie die Fläche des Kreisrings berechnen können, den die Skulpturen bilden.

13 Der Bus kommt relativ häufig: Absolut!

Hinweis: Alle angegebenen Lösungen sind nur Beispiele. Die tatsächlichen Anzahlen sind natürlich bei eurer Messung anders.

A1

Busnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der aus dem Bus austeigenden Menschen	8	9	12	21	8	13	11	12	9	8

A2 In unserem Beispiel hat der Modus den Wert 8. Dieser kommt dreimal und damit am häufigsten vor. Für die Berechnung des Medians sortieren wie die Werte der Stichprobe der Größe nach: 8, 8, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 21 und nennen sie $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Es gilt für den Median x_M:

$$x_M = \begin{cases} \frac{1}{2}((x_{\frac{n}{2}}) + (x_{\frac{n}{2}+1})) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ x_{\frac{n+1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bei uns ist n gerade, also folgt:

$$x_M = \frac{1}{2} \cdot (x_5 + x_6) = \frac{1}{2} \cdot (9 + 11) = 10$$

Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ beträgt

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(8 + 8 + 8 + 9 + 9 + 11 + 12 + 12 + 13 + 21) = \frac{1}{10} \cdot 111 = 11,1$$

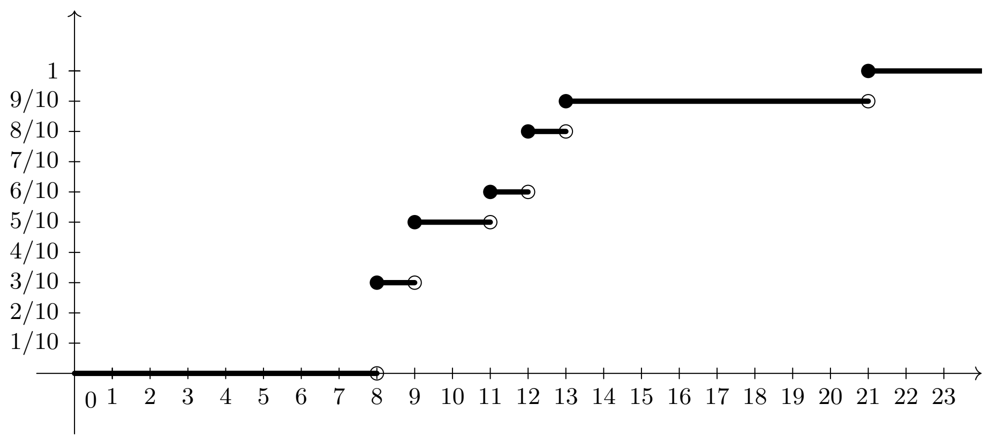
Alle drei Maße haben ihre Berechtigung, man muss diese aber korrekt interpretieren. Der Median gibt an, welche Wert am häufigsten vorkommt, betrachtet aber nicht die Größe der anderen Werte. Der arithmetische Mittelwert gibt den durchschnittlichen Wert an, ist aber empfindlich gegenüber Ausreißern. Der Median betrachtet zwar nicht die Größe der äußeren Werte, ist dafür aber unempfindlich gegenüber Ausreißern.

A3 Die Häufigkeitstabelle sieht wie folgt aus:

Anzahl der aussteigenden Menschen	8	9	11	12	13	21
absolute Häufigkeit	3	2	1	2	1	1
relative Häufigkeit	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1

Die Summe der relativen Häufigkeiten ist dabei natürlich 1.

A4 Die Verteilungsfunktion lässt sich in einem Diagramm darstellen:



B1 Es wird auch hier wieder von einem Beispiel ausgegangen. 10 Busse halten in unserer Haltebucht. 4 von ihnen müssen warten, bevor sie in die Haltebucht einfahren können.

B2 Für die vier wartenden Busse wurden in dem Beispiel die Zeiten 13 Sekunden, 5 Sekunden, 21 Sekunden und 15 Sekunden mit der Stoppuhr gezählt. Der Anteil der wartenden Busse beträgt 40%. Dieser Wert kann also als Schätzung für die Wartewahrscheinlichkeit diesen.

B3 Die durchschnittliche Wartezeit $\bar{w}$ der wartenden Busse beträgt in unserem Beispiel:

$$\bar{w} = \frac{1}{4} \cdot (13 + 5 + 21 + 15) = \frac{1}{4} \cdot 54 = 13,5$$

Die durchschnittliche Wartezeit liegt bei 13,5 Sekunden.

Die durchschnittliche Wartezeit $\bar{x}$ aller Busse beträgt in unserem Beispiel:

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot (13 + 5 + 21 + 15 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = \frac{1}{10} \cdot 54 = 5,4$$

Die durchschnittliche Wartezeit aller Busse liegt bei 5,4 Sekunden.

B4 Es sollen Pro- und Kontra-Argumente für die Konzeption der Bushaltestelle am Friedensplatz gefunden und diskutiert werden. Dabei sollen die vorherigen Berechnungen berücksichtigt werden.
Pro-Argumente könnten zum Beispiel sein:

- Wenn es die verschiedenen Haltebuchten nicht geben würde, müsste jede Person, die in den Bus einsteigen will, zu einer zufälligen Bucht laufen und der Busfahrer müsste vermutlich länger auf die einsteigenden Personen warten. Zwar würden hier keine Verzögerungen beim Anhalten der Busse entstehen, aber die Wartezeit auf die Personen, die in den Bus einsteigen, wäre größer.

- Für in der Mobilität eingeschränkte Personen ist es gut, wenn sie vorher genau wissen, wo ihr Bus anhalten wird. So entsteht kein Stress beim Einsteigen.

- Die Bushaltestelle ist zu lang. Man kann evtl. gar nicht so weit sehen, dass man die Busnummern erkennen kann, wenn man am einen Ende steht und am anderen Ende ein Bus anhält.

- Die oben berechneten Wartezeiten sind akzeptabel und der Anteil der wartenden Busse ist auch nicht so hoch.

Kontra-Argumente könnten zum Beispiel sein:

- Wenn jeder Bus einfach da anhält, wo Platz ist, dann könnte der Busfahrer schneller die Türen öffnen und müsste nicht warten, bis der Weg zur passenden Haltebucht frei ist.

- Das Warten und Wiederanfahren der Busse führt zu Gefahren, wenn Passanten die Straße überqueren.

Didaktischer Kommentar:

Die vorliegende Aufgabe gehört zum Gebiet der Stochastik. Sie dient dazu, dass die Schülerinnen und Schüler ein tieferes Verständnis für absolute und relative Häufigkeiten erhalten. Vorab sollten im Unterricht die Begriffe Modus, Median, arithmetisches Mittel, absolute und relative Häufigkeit sowie Verteilungsfunktion thematisiert und an Anwendungsbeispielen erprobt worden sein.
Im ersten Aufgabenteil erheben die Schülerinnen und Schüler Daten von ankommenden Bussen, stellen diese tabellarisch dar und berechnen Modus, Median und Mittelwert. Sie sollen die Aussagekraft dieser drei Mittelmaße unterscheiden lernen. Anschließend werden absolute und relative Häufigkeiten in Teilaufgabe **A3** berechnet. Auf Grundlage der bisherigen Ergebnisse kann nun eine Verteilungsfunktion in Teilaufgabe **A4** erstellt werden.
Im Aufgabenteil **B** steht das Berechnen und Interpretieren von arithmetischen Mittelwerten im Mittelpunkt. Die Teilung der Klasse in Arbeitsgruppen erlaubt es, im Nachgang an die Unterrichtsstunde die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler vergleichend auszuwerten.

14 Die „Kugeln“ unseres Sonnensystems

A1 Laut Informationstafel beträgt der Durchmesser der Sonne 1392000 Kilometer.

$$U_{\text{Sonne}} = \pi \cdot 1\ 392\ 000 \text{ km} = 4\ 373\ 096{,}97 \text{ km}$$

Der Umfang der Modellsonne müsste unter Beachtung des Maßstabes von 1 : 1000000000 genau 0,00437 Kilometer oder 4,37 Meter entsprechen.

A2 Der Umfang der Modellsonne beträgt 4,70 Meter. Die Maße der Modellsonne entsprechen demnach nicht dem Maßstab. Ein möglicher Grund könnte sein, dass man für die Anfertigung der Kugel einen „schönen” Wert für den Durchmesser benötigte. Der Durchmesser der Modellsonne beträgt 1,50 Meter.

A3 Der Radius der Modellsonne (MS) beträgt 0,75 Meter. Der Radius der maßstabsgetreuen Modellsonne (MMS) hätte

$$\frac{4{,}37 \text{ m}}{\pi \cdot 2} \approx 0{,}7 \text{ m}$$

lang sein müssen. Demnach beträgt die Vergrößerung des Radius der Modellsonne (MS)

$$\frac{0{,}05}{0{,}7} \cdot 100 = 7{,}14\%$$

Betrachten wir die Volumina der beiden Kugeln:

$$V_{\text{MS}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}75 \text{ m})^3 \approx 1{,}77 \text{ m}^3 \qquad V_{\text{MMS}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}7 \text{ m})^3 \approx 1{,}44 \text{ m}^3$$

Wir erhalten eine Differenz von 0,33 Kubikmeter. Demnach beträgt die Zunahme des Volumens der Modellsonne (MS):

$$\frac{0{,}33 \text{ m}^3}{1{,}44 \text{ m}^3} \cdot 100 \approx 22{,}92\%$$

Der Radius der Modellsonne ist 7,14 Prozent größer als der einer maßstabsgetreuen Sonne. Das Volumen ist um 22,92 Prozent vergrößert.

A4

$$O_{\text{MS}} = 4 \cdot \pi (0{,}75 \text{ m})^2 \approx 7{,}07 \text{ m}^2 \qquad O_{\text{MMS}} = 4 \cdot \pi (0{,}7 \text{ m})^2 \approx 6{,}16 \text{ m}^2$$

Wir erhalten eine Differenz von 0,91 Quadratmeter. Die Zunahme der Oberfläche beträgt:

$$\frac{0{,}91 \text{ m}^2}{6{,}16 \text{ m}^2} \cdot 100 \approx 14{,}77\%$$

Die Oberfläche der Modellsonne beträgt 7,07 Quadratmeter. Hätte man sie mit maßstabsgetreuen Maßen gebaut, wäre die Oberfläche 6,16 Quadratmeter groß gewesen. Die Oberfläche der Modellsonne ist um 14,77 Prozent vergrößert.

A5 Da pro Quadratmeter 250 Milliliter Farbe benötigt werden, benötigen wir zum zweimaligen Anstrich der Modellsonne $2 \cdot 7{,}07 \cdot$ 250 Milliliter = 3 535 Milliliter ≈ 3,54 Liter Farbe. Diese Menge Farbe erhalten wir, nachdem wir die pure Farbe mit 5 Prozent Wasser verdünnt haben:

$$3{,}54 \text{ L} = x + 5\% \cdot x = 105\% \cdot x \quad \Rightarrow \quad 3{,}37 \text{ L} \approx x$$

Wir benötigen 3,37 Liter Farbe und verdünnen diese mit 0,17 Liter = 170 Milliliter Wasser. Für die maßstabsgetreue Modellsonne hätte man bei einer Oberfläche von 6,16 Quadratmeter und zweimaligem Anstrich insgesamt $2 \cdot 6,16 \cdot$ 250 Milliliter = 3080 Milliliter = 3,08 Liter Farbe benötigt.

$$3,08 \text{ L} = 105\% \cdot x \quad \Rightarrow \quad 2,93 \text{ L} \approx x$$

Für die maßstabsgetreue Sonne hätten wir nur 2,93 Liter Farbe benötigt.

B1 Bei einem Schnitt durch eine Kugel entsteht immer eine Kreisfläche. Diese ist am größten, wenn der Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Da es hierfür unendlich viele Möglichkeiten gibt, gibt es auch unendlich viele größte Kreise, die entstehen können. Die Kreisfläche ist am kleinsten, wenn der Schnitt möglichst nah am Pol ist und die Kugel möglichst wenig durchtrennt. Auch hier gibt es unendlich viele Möglichkeiten.

B2 Der Umfang der Modellerde beträgt circa 4,5 Zentimeter. Übertragen in die Wirklichkeit muss unsere Erde einen Umfang von 4500000000 Zentimeter = 45000 Kilometer haben. Mithilfe der Angabe auf der Informationstafel können wir aus dem tatsächlichen Erddurchmesser den Umfang bestimmen.

$$U_{\text{Erde}} = \pi \cdot 12756 \text{ km} \approx 40074,16 \text{ km}$$

Der anhand des Modells berechnete Umfang weicht um 4925,84 Kilometer vom tatsächlichen Erdumfang ab. Diese große Differenz lässt sich einerseits durch die Schwierigkeit beim Abmessen einer so kleinen Länge erklären. Andererseits wird der Messfehler durch die Übertragung in die Wirklichkeit mit Faktor 10^9 verstärkt. Außerdem könnte es auch sein, dass die Modellerde, wie die Modellsonne, nicht maßstabsgetreu nachgebaut wurde.

B3

$$1,087 \cdot 10^{12} \text{ km}^3 = a^3 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{1,087 \cdot 10^{12} \text{ km}^3} \approx 10281,97 \text{ km}$$

$$O_{\text{Würfel}} = (10281,97 \text{ km})^2 \cdot 6 = 634313442,50 \text{ km}^2$$

Die Kantenlänge des Würfels beträgt 10 281,97 Kilometer und seine Oberfläche 634313442,50 Quadratkilometer.

B4 Der Infomationstafel können wir entnehmen, dass der Radius der Erde 6 378 Kilometer beträgt.

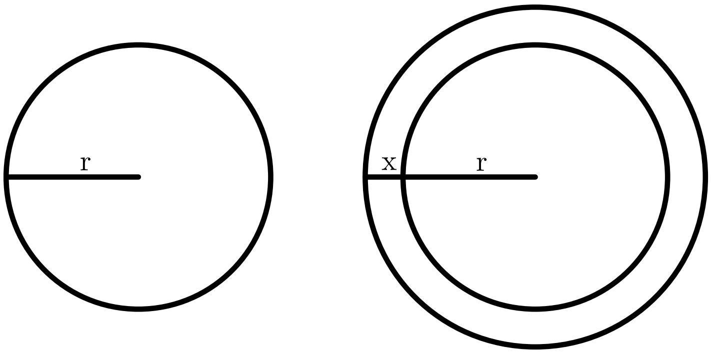
$$V_{\text{Erde}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (6\,378 \text{ km})^3 = 1,087 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$$

$$O_{\text{Erde}} = 4 \cdot \pi \cdot (6\,378 \text{ km})^2 = 511\,185\,932,5 \text{ km}^2$$

Bei gleichem Volumen von Kugel und Würfel entsteht eine Differenz der beiden Oberflächen von 123 127 510 Quadratkilometer. Dabei hat die Kugel die kleinere Oberfläche.

B5 Da die Oberfläche der Erde durch Täler und Berge zerklüftet ist, vergrößert dies die Oberfläche der Erde.

B6 Der Umfang U der Erde wird um 1 Meter verlängert: $U' = U + 1$ m. Wir interessieren uns für den Abstand, der zwischen Seil und Erdoberfläche entsteht, wenn das Seil wie beschrieben gespannt wird. Betrachten wir den Kreis, den ein eng anliegendes Seil bilden würde, so habe dieser Kreis den Radius r. Betrachten wir den Kreis, den das verlängerte Seil bildet, so habe dieser Kreis den Radius $r + x$. Die Größe von x wollen wir in dieser Aufgabe bestimmen.



$$U = \pi \cdot 2r \qquad\qquad U' = \pi \cdot 2(r+x)$$

$$U' = U + 1 \text{ m} = 2 \cdot \pi \cdot (r + x) \quad \Leftrightarrow \quad U + 1 \text{ m} = 2\pi r + 2\pi x$$

Da der Umfang U eines Kreises mit $2r\pi$ berechnet werden kann, vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$1 \text{ m} = 2\pi x \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1 \text{ m}}{2\pi} \approx 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

Das Seil hat einen Abstand von 16 Zentimeter zur Erde.

Wird für den Gullideckel die Schnur um 10 Zentimeter verlängert, so ergibt sich nach obiger Rechnung:

$$x = \frac{10 \text{ cm}}{2\pi} \approx 1,59 \text{ cm}$$

Das Seil hat einen Abstand von 1,59 Zentimetern zum Gullideckel.

C1 Der Durchmesser der Erde beträgt laut Informationstafel 12756 Kilometer. Rechnen wir den Mondurchmesser im angegebenen Verhältnis aus, so erhalten wir:

$$\frac{12\ 756 \text{ km}}{11} \cdot 3 \approx 3\ 478,9 \text{ km}$$

Der Mond hat einen Durchmesser von circa 3478,9 Kilometer.

$$V_{\text{Mond}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3478,9 \text{ km}}{2}\right)^3 \approx 2,21 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$$

$$O_{\text{Mond}} = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{3\ 478,9 \text{ km}}{2}\right)^2 = 38\ 021\ 895,44 \text{ km}^2$$

	Volumen	Oberfläche
Erde	$1,087 \cdot 10^{12}$ km^3	$511185932,5$ km^2
Mond	$2,205 \cdot 10^{10}$ km^3	$38021895,44$ km^2
Verhältnis (M/E)	0,020	0,074

C2 Der Abstand zwischen Mond und Erde auf der Bronzetafel beträgt 38 Zentimeter und wird als Radius der Mondbahn interpretiert. In die Wirklichkeit übertragen sind das 38000000000 Zentimeter = 380000 Kilometer.

$$\text{Länge der Mondbahn} = \pi \cdot 2 \cdot 380\ 000 \text{ km} \approx 2\ 387\ 610,42 \text{ km}$$

Die Länge der Mondbahn beträgt in der Wirklichkeit circa 2 387 610,42 Kilometer.

C3

$$\frac{2387610,42 \text{ km}}{27,32 \text{ d}} \approx 87394,23 \frac{\text{km}}{\text{d}}$$

Der Mond legt pro Tag eine Strecke von 87 394,23 Kilometer zurück. Ein Auto müsste die Strecke von Bonn bis Rom 62,42 Mal fahren. Um am Ende wieder in Bonn anzukommen, müsste das Auto die Strecke insgesamt 64 mal fahren.

C4

$$87\ 394,23\ \frac{\text{km}}{\text{d}} \approx 3\ 641,43\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 1,01\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\frac{3\ 641,43\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}{247,5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 14,71$$

Der Mond bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 1,01 Kilometer pro Sekunde. Damit bewegt er sich 14,71 mal schneller als Michael Schuhmacher, wenn wir von seiner schnellsten Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Rennen ausgehen.

Didaktischer Kommentar:

Die Aufgabe richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9, da für die Bearbeitung der Aufgabe die Formeln zur Volumen- und Oberflächenberechnung einer Kugel aus dem Unterricht bekannt sein müssen. Die Aufgabe bietet sich nach Abschluss des Themas *Kugel* im Unterricht an, um das Schätzen und Bestimmen von Volumen und Oberfläche an Kugeln in der Umwelt einzuüben. Außerdem sollten alle Formeln und Gesetzmäßigkeiten der Berechnung an Kreisen aus Klasse 8 bekannt sein und vorher im Unterricht noch einmal kurz angesprochen werden. Da auch die Prozent- und Maßstabsrechnung für die Aufgabe wichtig ist, sollten auch diese in Klassenstufe 7 gelernten Themen allen Schülerinnen und Schüler bekannt sein und gegebenenfalls nochmals wiederholt werden. Weiter lässt sich diese Aufgabe auch fachübergreifend mit dem Physikunterricht verbinden. Die Lernstation kann zum Beispiel mit den Themenbereichen *Strahlung und Materie* oder *Relativität von Raum und Zeit* in der Oberstufe verknüpft werden.
Die Aufgabe gliedert sich in drei Teile, die je einen anderen Himmelskörper unseres Sonnensystems behandeln. Der Bonner Planetenweg bildet die Abstände der Sonne zu den einzelnen Planeten unseres Sonnensystems zwar maßstabsgetreu ab, jedoch sind die Modelle der Himmelskörper nicht maßstabsgetreu. Dies sollen die Schülerinnen und Schüler unter anderem während der Bearbeitung der Aufgaben herausfinden und in Kleingruppen diskutieren.
Das Hauptziel der Aufgabe ist, dass die Schülerinnen und Schüler durch Berechnungen an Kugeln und Kreisen den Umgang mit den Formeln zur Oberflächen- und Volumenberechnung von Kugeln beziehungsweise Umfang- und Flächeninhaltberechnung von Kreisen schulen.
Die Bearbeitungszeit der Aufgabe beträgt circa 120 Minuten. Die Aufgabe soll bevorzugt in Kleingruppen von drei bis vier Personen bearbeitet werden.

15 Zylinder und Spitzkörper / Einfach Spitze!

A1 Zur Schätzung kann die Gebäudehöhe der Bundeskunsthalle als Hilfestellung dienen. Diese lässt sich anhand der Fenster grob abschätzen. Schätzungsweise sind die Fenster drei Meter hoch. Diese würden viermal übereinander an die Wand passen. Demnach ist das Gebäude circa zwölf Meter hoch. Da die Säulen über die Höhe des Daches hinausragen, lässt sich ihre Höhe auf 14 bis 15 Meter schätzen.

A2 Eine Säule umfasst acht Windungen. Der Abstand zwischen den Windungen beträgt 1,84 Meter. Wir betrachten die Säule von der Seite, an der die Windung am oberen Ende der Säule endet. Von oben nach unten ergeben sich acht Windungen und am unteren Ende der Säule zusätzlich eine Teilwindung von 54 Zentimetern Höhe. Die Höhe der gesamten Säule beträgt also

$$h_{\text{Säule}} = 8 \cdot 1,84 \ \text{ m} + 0,54 \ \text{ m} = 15,26 \ \text{ m}$$

Die Höhe der Säulen beträgt 15,26 Meter.

A3 Der Umfang der Säulen beträgt 2,56 Meter.

$$r = \frac{2,56 \ \text{ m}}{2\pi} \approx 0,4 \ \text{ m}$$

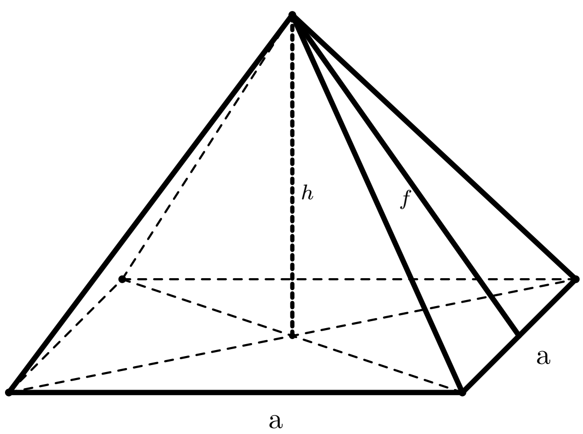
$$V_{\text{Zylinder}} = (0,4 \ \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 15,26\, m \approx 7,67 \ \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Hohlraum}} = (0,34 \ \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 15,26 \ \text{ m} \approx 5,54 \ \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Stahlsäule}} = 7,67 \ \text{ m}^3 - 5,54 \ \text{ m}^3 = 2,13 \ \text{ m}^3$$

Das Volumen einer Stahlsäule beträgt etwa 2,13 Kubikmeter. Das Volumen des Hohlraumes beträgt etwa 5,54 Kubikmeter.

B1



B2 Die Seitenlänge der Pyramide am Ende der Glasscheibe beträgt 4,2 Meter. Die Höhe der dreieckigen Seitenfläche von der Pyramidenspitze bis zum Ende der Glasscheibe beträgt 2,9 Meter. Trage diese Längen in die Skizze aus Teilaufgabe **B1** ein mit $a = 4,2$ und $f = 2,9$.

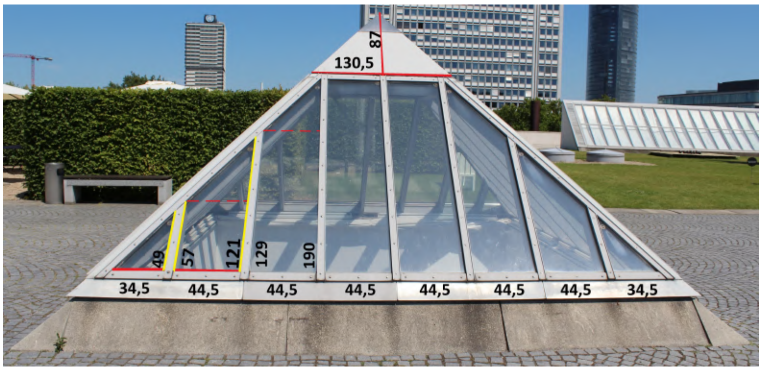
B3

$$h^2 = f^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2,9 \ \text{ m})^2 - (2,1 \ \text{ m})^2 = 4 \ \text{ m}^2$$

Daraus folgt $h = \sqrt{4 \text{ m}^2}$ und schließlich $h = 2 \ \text{ m}$. Die Höhe der Pyramide beträgt 2 Meter.

B4 Sei M_{Pyramide} die Mantelfläche der Pyramide und G_{Pyramide} der Teil der Mantelfläche, der aus Glas ist.

$$M_{\text{Pyramide}} = 4 \cdot \frac{a \cdot f}{2} = 4 \cdot \frac{4,2 \text{ m} \cdot 2,9 \text{ m}}{2} = 24,36 \text{ m}^2$$



$$\begin{aligned} G_{\text{Pyramide}} = 4 \cdot 2 \ \cdot \ &\left[\frac{34,5 \text{ cm} \cdot 49 \text{ cm}}{2} + \left(57 \text{ cm} \cdot 44,5 \text{ cm} + \frac{44,5 \text{ cm} \cdot 64 \text{ cm}}{2} \right) \right. \\ &\left. + \left(44,5 \text{ cm} \cdot 129 \text{ cm} + \frac{44,5 \text{ cm} \cdot 61 \text{ cm}}{2} \right) + 190 \text{ cm} \cdot 44,5 \text{ cm} \right] \\ \approx\ & 8 \cdot 20358,5 \text{ cm}^2 = 162868 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Die Glasfläche beträgt insgesamt 162868 cm^2 $\approx$ 16,29 m^2.

$$\frac{16,29 \text{ m}^2}{24,36 \text{ m}^2} \cdot 100 \approx 66,87\%.$$

66,87 Prozent der Mantelfläche sind aus Glas.

B5 Die Maße der oberen kleinen Pyramide können dem Foto oben entnommen werden. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche beträgt 130,5 Zentimeter und die Höhe der dreieckigen Seitenfläche beträgt 87 Zentimeter. Zur Berechnung des Volumens berechnen wir zuerst die Höhe der kleinen Pyramide.

$$h^2_{\text{Kleine Pyramide}} = h^2_{KP} = (87 \text{ cm})^2 - (65,25 \text{ cm})^2 \approx 3311,44 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow h_{KP} \approx 57,55 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Kleine Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot (130,5 \text{ cm})^2 \cdot 57,55 \text{ cm} \approx 326696,96 \text{ cm}^3 \approx 0,33 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot (4,2\ m)^2 \cdot 2 \text{ m} = 11,76 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = 11,76 \text{ m}^3 - 0,33 \text{ m}^3 = 11,43 \text{ m}^3$$

Das Volumen des Pyramidenstumpfes beträgt etwa 11,43 Kubikmeter.

B6

$$V_{\text{Würfel}} = a^3$$

Nach Aufsetzen der Pyramiden beträgt das Volumen der Figur:

$$V_{\text{Figur}} = a^3 + \frac{3}{5} \cdot a^3$$

Da auf allen Seitenflächen des Würfels Pyramiden aufgesetzt werden, machen diese 6 Pyramiden ein Gesamtvolumen von $\frac{3}{5} \cdot a^3$ aus. Pro Pyramide ist das ein Volumen von $\frac{1}{10} \cdot a^3$. Die quadratische Grundseite der Pyramide hat, wie der Würfel, eine Seitenlänge von a. Stellen wir die Formel zur Volumenberechnung einer Pyramide nach der Höhe h um, so erhalten wir:

$$h_{\text{Pyramide}} = h = \frac{3 \cdot \frac{1}{10} \cdot a^3}{a^2} = \frac{3}{10} \cdot a$$

Die aufgesetzten Pyramiden haben eine Höhe von $\frac{3}{10} \cdot a$.

C1 Die Lichttürme haben die geometrische Form eines Kreiskegels.

C2 Da Lichtturm C höher als Lichtturm B ist, kann man seine Höhe auf 19 bis 20 Meter schätzen.

C3

$$U_C = 28,9 \text{ m}$$

Der Radius beträgt demnach etwa 4,6 Meter.

$$F_{\text{C}} = \pi \cdot (4,6 \text{ m})^2 \approx 66,48 \text{ m}^2$$

C4 Wir stellen die Formel zur Volumenberechnung eines Kreiskegels nach der Höhe h um.

$$h_C = h = \frac{3 \cdot 443,17 \text{ m}^3}{66,48 \text{ m}^2} \approx 20 \text{ m}$$

Die Höhe des Lichtturms C beträgt etwa 20 Meter. Damit entspricht das Ergebnis circa der Schätzung.

C5 Zur Berechnung des Radius musst du zuerst den Umfang des Lichtkegels A bestimmen. Dieser beträgt 35,19 Meter.

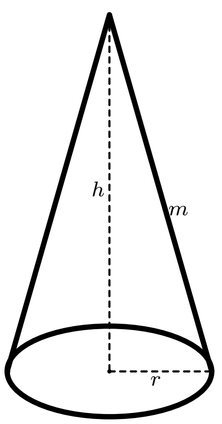
$$r_A = \frac{35,19 \text{ m}}{2\pi} \approx 5,6 \text{ m}$$

Die Höhe beträgt $12,5 \cdot 2 \text{ m} = 25 \text{ m}$.

$$V_A = \frac{1}{3} \cdot (5,6 \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 25 \text{ m} \approx 821 \text{ m}^3$$

Das Volumen von Lichtturm A beträgt etwa 821 Kubikmeter.

C6



Gerader Kreiskegel mit r=5,6 Meter und h=25 Meter.

$$m^2 = h^2 + r^2 = (25 \text{ m})^2 + (5,6 \text{ m})^2 = 656,36 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow m \approx 25,62 \text{ m}$$

Sei M die Mantelfläche.

$$M = \pi \cdot r \cdot m = \pi \cdot 5,6 \text{ m} \cdot 25,62 \text{ m} \approx 450,73 \text{ m}^2$$

Die Mantellinie hat eine Länge von etwa 25,62 Meter und die gesamte Mantelfläche beträgt etwa 450,73 Quadratmeter.

D1 Das Volumen einer quadratisch geraden Pyramide mit Quadratseitenlänge a und Höhe h lässt sich so berechnen:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

Das Volumen eines Kreiskegels mit Radius r und Höhe h hingegen so:

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Vergleichen wir beide Formel, so haben sie die gleiche Grundstruktur:

$$V_{\text{Spitzkörper}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

mit Grundfläche G und Höhe h. Die beiden Formeln unterscheiden sich in der Berechnung der Grundfläche G. Diese ist beim Kegel ein Kreis und bei der Pyramide ein Quadrat.

D2 Pyramide und Kegel der gleichen Höhe haben das gleiche Volumen, wenn auch die Grundflächen denselben Flächeninhalt haben.

D3

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 12 \text{ m} = \frac{1}{3} \cdot (6 \text{ m})^2 \cdot 12 \text{ m}$$
$$\Leftrightarrow \pi \cdot r^2 = (6 \text{ m})^2$$
$$\Leftrightarrow r \approx 3,39 \text{ m}$$

Der Radius muss etwa 3,39 Meter betragen, damit der beschriebene Kegel das gleiche Volumen wie die Pyramide hat.

D4

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2b)^2 \cdot 5b = \frac{1}{3} \cdot (4b)^2 \cdot h$$
$$\Leftrightarrow \pi \cdot (2b)^2 \cdot 5b = (4b)^2 \cdot h$$
$$\Leftrightarrow \pi \cdot 20b^3 = 16b^2 \cdot h$$
$$\Leftrightarrow h = \tfrac{20\pi \cdot b}{16} = \tfrac{5}{4}\pi \cdot b$$

Die Höhe der Pyramide beträgt $\frac{5}{4}\pi \cdot b$.

Didaktischer Kommentar:

Die Aufgabe lässt sich gemäß Kernlehrplan der Sekundarstufe I in die Unterrichtsplanung der Klassenstufe 9 einbetten, da in dieser Jahrgangsstufe die Volumen- und Oberflächenberechnung der beiden Körper Pyramide und Kegel erlernt werden. Der Zylinder wird bereits am Ende der Klassenstufe 8 behandelt, sodass die Formel zur Volumenbestimmung eventuell nochmals wiederholt werden muss. Außerdem bauen die Berechnungen an Zylindern und Kegeln auf dem Wissen zu Berechnungen am Kreis auf, sodass diese Kompetenzen, die aus der Klassenstufe 8 bekannt sein sollten, wiederholt und vertieft werden. Weiter sollten auch die Prozentrechnung sowie der Satz des Pythagoras und das Prinzip von Cavalieri, welche ebenfalls in der Jahrgangsstufe 9 kennengelernt werden, präsent sein. Neben den beschriebenen Formeln sollten die Schülerinnen und Schüler auch wissen, wie Schrägbilder gezeichnet werden und dieses bereits im Unterricht eingeübt haben.
Insgesamt gliedert sich die Aufgabe in vier Teile, in denen jeweils ein anderer Aspekt beleuchtet wird. Aufgabenteil **A** beschäftigt sich mit dem Zylinder, Aufgabenteil **B** mit der Pyramide, Aufgabenteil **C** mit dem Kegel und Aufgabenteil **D** schafft eine Verbindung der beiden Aufgabenteile **B** und **C**. Dabei können die Aufgabenteile **A**, **B** und **C** unabhängig

voneinander bearbeitet werden. Insgesamt kann die Aufgabe an der Bundeskunsthalle, sobald die Formeln zur Volumen- und Oberflächenbestimmung der Körper bekannt sind, zur Veranschaulichung oder Motivation dieser Themen im Unterricht eingesetzt werden. Alternativ kann sie auch zum Abschluss des Geometriethemas der neunten Klasse genutzt werden, sodass die gelernten Formel angewendet und vertieft werden.
Die Schülerinnen und Schüler benötigen zur Bearbeitung der Aufgaben Schreibutensilien, ein Geodreieck, einen Zollstock, ein Maßband oder eine Schnur (50 Meter) sowie einen Taschenrechner. Die Bearbeitungszeit für die gesamte Aufgabe beträgt circa 90 Minuten. Die Aufgabe soll bevorzugt in Kleingruppen von drei bis vier Personen bearbeitet werden. Zu beachten ist, dass der Dachgarten, falls keine Ausstellung auf dem Dach gezeigt wird, frei über den Fahrstuhl oder die Außentreppe zugänglich ist.

16 Wachstum der Seerosen: Exponentiell!

A1/A2

Messung: $a = 2,86$ m, $b = 1,10$ m, $c = 9,76$ m, $d = 19,36$ m

A3 Schätzung der Fläche, die die Bronzeskulptur einnimmt $A_B = 300\ \text{cm}^2 = 0,03\ \text{m}^2$.

Formel: $A = c \cdot d - 4 \cdot a \cdot b - A_B$

Lösung: $A = 9,76\ \text{m} \cdot 19,36\ \text{m} - 4 \cdot (1,10\ \text{m} \cdot 2,86\ \text{m}) - 0,03\ \text{m}^2 = 176,3386\ \text{m}^2 \approx 176,34\ \text{m}^2$

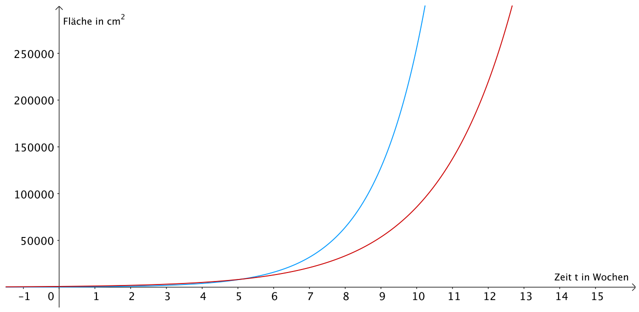
Die Wasseroberfläche des Lyrabeckens (abzüglich der Oberfläche der Becken in den Ecken und der Oberfläche des Sockels der Bronzeskulptur) beträgt ungefähr $176,34\ \text{m}^2$.

B1
$f(t) = 250 \cdot 2^t$
$g(t) = 780 \cdot 1.60^t$

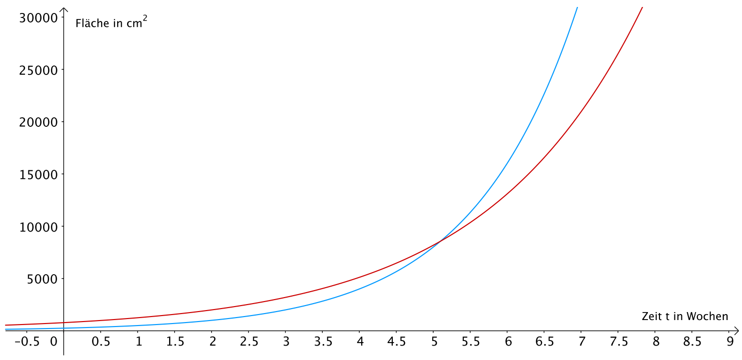
B2

t	$f(t)$
0	250 cm^2
1	500 cm^2
2	1000 cm^2
4	4000 cm^2
6	16000 cm^2
8	64000 cm^2
10	25600 cm^2
12	1024000 cm^2
13	2048000 cm^2

t	$g(t)$
0	780 cm^2
1	1248 cm^2
2	1996, 8 cm^2
4	5111, 81 cm^2
6	13086, 23 cm^2
8	33500, 74 cm^2
10	85761, 91 cm^2
12	219550, 48 cm^2
13	351280, 77 cm^2



blau: $f(x) = 250 \cdot 2^x$, rot: $g(x) = 780 \cdot 1,6^x$



Ausschnitt der obigen Abbildung mit Schnittpunkt von f und g

B3

$$f(t) = g(t) \quad \Leftrightarrow \quad 250 \cdot 2^t = 780 \cdot 1,60^t \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{1,60}\right)^t = \frac{780}{250}$$

$$\Leftrightarrow \quad \log 1,25^t = \log 3,12 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\log 3,12}{\log 1,25} \quad \Leftrightarrow \quad t \approx 5$$

Die beiden Kolonien sind nach etwa 5 Wochen gleich groß.

B4 Das Becken ist vollständig mit Seerosen bedeckt, wenn gilt: $f(t) + g(t) = 1763396$ cm^2. Mithilfe des graphischen Taschenrechners kann t bestimmt werden.

$t \approx 12.53$

In der 13. Woche ist das Becken vollständig mit Seerosen bedeckt.

B5
$\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{D}_{f+g} \approx [0; 12,53]$
$\mathbb{W}_f = [250; 1478583]$
$\mathbb{W}_g = [780; 281655]$
$\mathbb{W}_{f+g} = [1030; 1760238]$

Didaktischer Kommentar:

Inhaltlicher Schwerpunkt dieser Aufgabe ist das Anwenden exponentieller Funktionen zur Lösung außermathematischer Problemstellungen. Vor der Bearbeitung dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler somit im Rahmen des Unterrichts lernen, mit Funktionen flexibel und auf vielerlei Weise umzugehen. Insbesondere das Darstellen von Funktionen in Wertetabellen, Graphen und in Termen sowie das Nutzen dieser zur Lösung außermathematischer Problemstellungen werden hier vorausgesetzt. Zudem sollen die Begriffe Definitions- und Wertebereich bekannt sein und in konkreten Situationen angegeben werden können.
Die Teilaufgaben **A1** bis **A3** dienen zum einen der Bestimmung erforderlicher Größen und zum anderen der Wiederholung und Vertiefung von Maßstabsverhältnissen und dem Begriff des Flächeninhalts.
Bei der Thematisierung von Wachstums- und Zerfallprozessen ergibt sich eine Vernetzung zum Fach Biologie. Für die Bearbeitung der Teilaufgaben **A4** bis **A6** sollen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, Realsituationen aus dem Bereich *Wachstumsprozesse* in mathematische Modelle zu übersetzen. Hierbei soll ihnen bewusst sein, dass es sich im Fall der Seerosenkolonie um einen exponentiellen Wachstumsprozess handelt.
Bei der Bearbeitung der Teilaufgabe **A4** soll der Schüler/die Schülerin zunächst die Funktionsterme $f(t)$ und $g(t)$ in der Form $f(t) = b \cdot a^t$ und $g(t) = c \cdot d^t$ mit den Parametern $a, d \in \mathbb{R}^+$ und $b, c \in \mathbb{R}$ angeben, um im Anschluß zwei kontextbezogene Wertetabellen zu erstellen. Mithilfe dieser Tabellen sind die Funktionsgraphen $f(t)$ und $g(t)$ im kartesischen Koordinatensystem zu zeichnen.
Mit den Fragen, wann die Kolonien gleich groß sind und wie viele Tage vergehen, bis das gesamte Becken mit Seerosen bedeckt ist, beschäftigen sich die Lernenden bei der Bearbeitung der Teilaufgaben **A6** und **A7**. Dem Schüler / Der Schülerin soll dabei bewusst sein, dass es sich bei **A6** anschaulich um den Schnittpunkt der Funktionsgraphen $f(t)$ und $g(t)$ handelt. Um den Schnittpunkt der beiden Exponentialfunktionen f und g zu berechnen, müssen die Lernenden mit den Logarithmusgesetzen vertraut sein. Diese sind vorab im Unterricht einzuführen und einzuüben. Um zu ermitteln, wann das gesamte Becken mit Seerosen bedeckt ist, muss das Ergebnis aus Teilaufgabe **A3** herangezogen und es muss sowohl die Fläche, die von Art A als auch die, die von Art B eingenommen wird, berücksichtigt werden, genauso wie die Fläche, die die Bronzeskulptur einnimmt.
Die Grenzen solcher Modellierungen liegen allerdings auf der Hand: Durch räumliche Gegebenheiten können die Kolonien nicht unbegrenzt wachsen, weshalb der Sachverhalt nur eingeschränkt durch die Funktionsterme $f(t)$ und $g(t)$ beschrieben werden kann. Dies soll den Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Teilaufgabe **A8** bewusst werden. Hierbei sollen Definitions- und Wertebereich der Funktionen $f(t)$, $g(t)$ und $f(t)+g(t)$ angegeben werden, die den geschilderten Sachverhalt sinnvoll beschreiben. In der Schulpraxis tritt nur der Begriff des Wertebereichs, nicht aber der des Bildbereiches in Erscheinung, weshalb wir an dieser Stelle auch nur ersteres bestimmen lassen. Sowohl der Definitionsbereich als auch der Wertebereich sollen bei bekanntem Funktionsterm als Teilmenge von $\mathbb{R}$ angegeben werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ und ihre Eigenschaften bekannt sind.

17 Das geometrische Quadrat im Einsatz

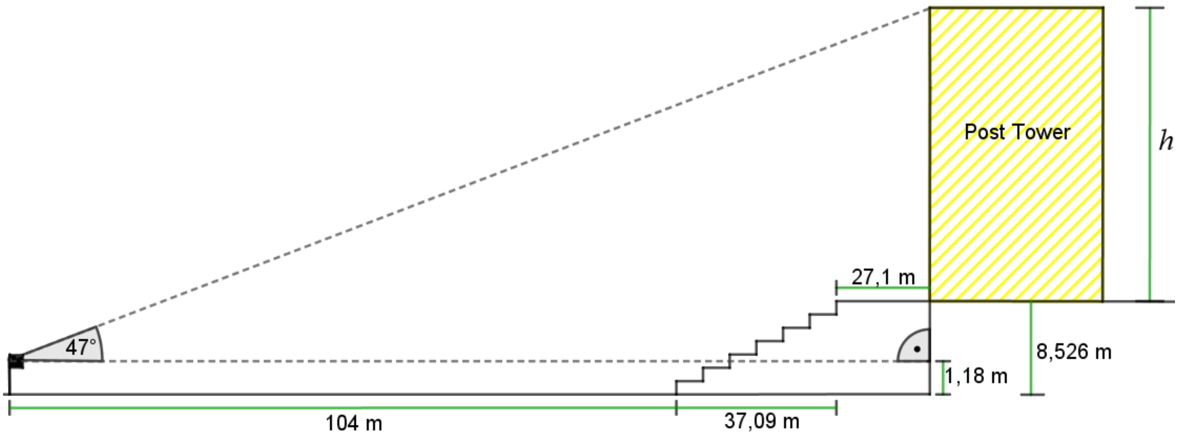
A1 Eine sinnvolle Schätzung kann mit Hilfe einer Vergleichsgröße (z.B. Mensch, Fenster, Straßenlaterne) durchgeführt werden. Beispiel für eine konkrete Lösung: Der Post Tower besteht aus 44 übereinanderstehenden Fenstern. Jedes Fenster hat eine Höhe von circa 3,5 Metern. Es ist:

$$44 \cdot 3{,}5 \text{ m} = 154 \text{ m}$$

Der Post Tower ist demnach circa 154 Meter hoch.

A2 Die Messung führt zu einem Winkel von 47 Grad.

A3 Die Maße sind der folgenden Abbildung zu entnehmen. Die Messungen der Schülerinnen und Schüler können je nach Standort und Augenhöhe beim Messen abweichen.



A4 Gesucht ist die Höhe h. Mithilfe der Tangensfunktion lässt sich folgende Gleichung aufstellen, welche neben der Unbekannten h nur bekannte Größen beinhaltet.

$$\tan(\alpha) = \frac{h + (e - a)}{b + c + d} \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\alpha) \cdot (b + c + d) = h + (e - a)$$
$$\Leftrightarrow \quad h = \tan(\alpha) \cdot (b + c + d) - (e - a)$$

Einsetzen der bekannten Werte liefert:

$$h = \tan(47°) \cdot (104 \text{ m} + 37{,}09 \text{ m} + 21{,}1 \text{ m}) - (8{,}526 \text{ m} - 1{,}18 \text{ m}) \approx 166{,}581 \text{ m}$$

Die mit dem geometrischen Quadrat gemessene Höhe des Post Towers beträgt circa 166,58 Meter.

B1 Neben dem Erdgeschoss hat der Post Tower 38 Etagen. Mit den vorgegeben Werten ergibt sich folgende Rechnung für die Höhe des Post Towers:

$$15{,}5 \text{ m} + (38 \cdot 3{,}55 \text{ m}) + 12 \text{ m} = 162{,}40 \text{ m}$$

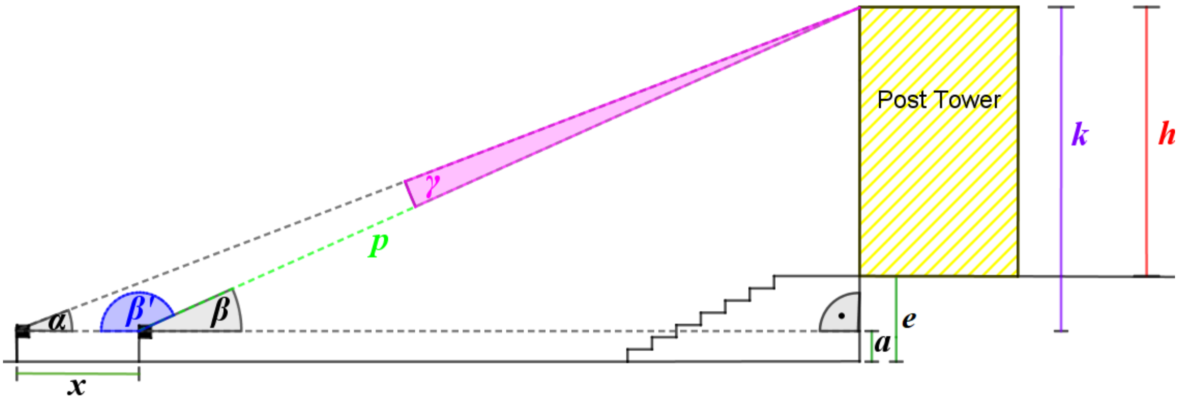
Die genaue Höhe des Post Towers beträgt 162,40 Meter. Die Abweichung zu dem mit dem geometrischen Quadrat gemessenen Ergebnis beträgt circa 4,18 Meter. Folgende Gründe können unter Anderem zur Abweichung beigetragen haben:

- Die Längen der Strecken a, b, c, d und/oder e wurden nicht exakt gemessen.
- Beim Ablesen des Winkels wurde das geometrische Quadrat nicht senkrecht gehalten.

- Beim Ablesen des Winkels war das Auge des Messenden nicht auf der Höhe des Strohhalmes.
- Unebenheiten des Bodens (Es wurde vorausgesetzt, dass die Strecken b, c, d, und e waagerecht sind).

B2 Die Messung führt zu einem Winkel von 52 Grad.

B3 Gesucht ist die Höhe h. Bekannt sind die Winkel α und β, sowie der Abstand x und die Höhen a und e. Die Herleitung der Formel verfolgt mehrere Schritte. Die folgende Abbildung dient als Visualisierung des Lösungsweges.



Schritt 1: β' berechnen
Es ist:

$$180^\circ = \beta + \beta'$$
$$\Leftrightarrow \beta' = 180^\circ - \beta$$

Schritt 2: γ berechnen
Nach dem Winkelsummensatz ist:

$$\alpha + \beta' + \gamma = 180^\circ$$

Nach Schritt 1 folgt:

$$\alpha + (180^\circ - \beta) + \gamma = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow \alpha + 180^\circ - \beta - 180^\circ = -\gamma$$
$$\Leftrightarrow -\alpha + \beta = \gamma$$

Schritt 3: p berechnen
Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{p}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{\sin(\gamma)}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

Nach Schritt 2 folgt:

$$p = \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{\sin(-\alpha + \beta)}$$

Schritt 4: k bestimmen
Mithilfe der Winkelfunktion des Sinus lässt sich k bestimmen:

$$\sin(\beta) = \frac{k}{p}$$

$$\Leftrightarrow k = \sin(\beta) \cdot p$$

Nach Schritt 3 folgt:

$$k = \frac{x \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(-\alpha + \beta)}$$

Schritt 5: h bestimmen
Zuletzt muss die Höhe der Treppe minus die Höhe des Messgerätes subtrahiert werden. Somit ergibt sich die gesuchte Formel:

$$h = \frac{x \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(-\alpha + \beta)} - (e - a)$$

Nun können die bekannten Werte $\alpha = 47°$, $\beta = 52°$, $x = 20$ m, $a = 1{,}18$ m und $d = 8{,}526$ m in die Formel eingesetzt werden:

$$h = \frac{20 \text{ m } \cdot \sin(47°) \cdot \sin(52°)}{\sin(-47° + 52°)} - (8,526 \text{ m } - 1,18 \text{ m}) \approx 124,90 \text{ m} .$$

Mit diesem Verfahren ergibt sich eine Höhe von circa 124,90 Metern.

B4 Die exakte Höhe des Post Towers beträgt nach Teilaufgabe **B1** 162,4 Meter. Mit einer Abweichung von 37,5 Meter ist das Ergebnis aus Aufgabenteil **B** deutlich ungenauer als das aus Aufgabenteil **A**, welches lediglich um 4,18 Meter abweicht. Sowohl in dem Verfahren aus Aufgabenteil **A** als auch in dem aus Aufgabenteil **B** werden die Längen der Strecken a und e, sowie der Winkel α gemessen. Da für diese Größen in beiden Verfahren die gleichen Werte verwendet wurden, können diese nicht zur Ungenauigkeit des Ergebnisses aus Aufgabenteil **B** beigetragen haben. In Aufgabenteil **A** mussten zusätzlich die Längen der Strecken b, c und d gemessen werden, während bei dem Vorgehen in Aufgabenteil **B** die Länge der Strecke x, sowie ein weiterer Winkel β bestimmt werden musste. Die Tatsache, dass das Ergebnis aus Aufgabenteil **B** zu einer deutlich größeren Abweichung führt, lässt darauf schließen, dass weniger die Messungenauigkeiten bei den Strecken am Boden, sondern vielmehr die Ungenauigkeiten bei der Verwendung des geometrischen Quadrates zur Irritation des Ergebnisses beigetragen haben.

Didaktischer Kommentar:

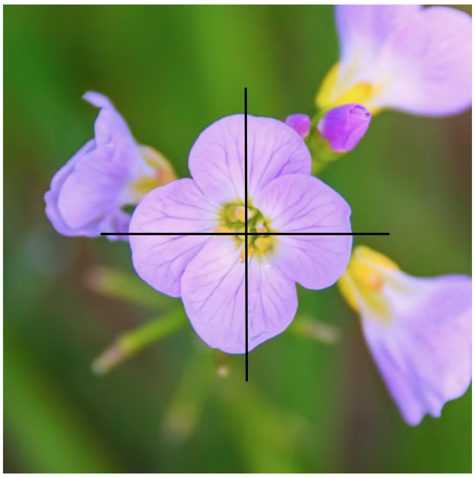
In dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler mithilfe ihres selbstgebauten geometrischen Quadrates die Höhe des Post Towers ermitteln und ein Gefühl für die Genauigkeit ihrer Messdaten entwickeln. Elementare trigonometrische Beziehungen sollen an einem praktischen Beispiel erfahren werden. Die Aufgabe untergliedert sich in die zwei Aufgabenteile **A** und **B**. Pro Aufgabenteil lernen die Schülerinnen und Schüler eine Vorgehensweise kennen, um mithilfe ihres Messinstrumentes die Höhe des Post Towers zu bestimmen.
Das geometrische Quadrat bietet als Vermessungsinstrument zwei große Vorteile: Zum einen kann es aufgrund seiner einfachen Bauart ohne großen Aufwand und mit geringen Kosten hergestellt werden. Zum anderen lernen die Schülerinnen und Schüler mit seinem Gebrauch ein

historisches Verfahren kennen, welches vollständig nachvollzogen und vor allem selbstständig durchgeführt werden kann. Dabei kann die Nachhaltigkeit noch gesteigert werden, wenn die Lernenden ein solches Messinstrument selber herstellen. → Die Bauanleitung für das geometrische Quadrat finden Sie auf unserer Homepage.
Vor dem Bearbeiten der Aufgabe sollte im Unterricht behandelt werden, wie mithilfe der trigonometrischen Funktionen unbekannte Längen im rechtwinkligen Dreieck bestimmt werden können. Kenntnisse über die Begriffe Sinus, Kosinus, Tangens sowie Ankathete, Gegenkathete und Hypothenuse werden vorausgesetzt. Der Begriff des Winkels sowie die Erkenntnis, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt, sollten ebenfalls bekannt sein.
Die Teilaufgaben **A3** sowie **B2** sollen in Gruppenarbeit durchgeführt werden. Die Vermessung in Dreiergruppen eignet sich hierbei optimal, da ein Lernender die Ausrichtung durch Beobachtung des Lots überwachen kann, während ein anderer das Objekt anvisiert und ein Dritter die Dokumentation der Messwerte vornimmt. Unter Verwendung der Definition des Tangens soll in Teilaufgabe **A4** eine Formel zur Berechnung der Gebäudehöhe entwickelt werden. Die Definition der Winkelfunktion wird dabei als bekannt vorausgesetzt. In Aufgabenteil **B** findet schrittweise eine Fehlerbetrachtung statt. Gleichzeitig machen die Teilaufgaben **B2** und **B3** darauf aufmerksam, dass trigonometrische Funktionen nicht ausschließlich in rechtwinkligen Dreiecken Anwendung finden. Der Sinussatz wird in der Aufgabenstellung eingeleitet, sodass die Kenntnis über seinen Inhalt nicht vorausgesetzt wird.
Im Anschluss an diese Aufgabe bietet es sich an, die Thematik auf allgemeine Dreiecke auszuweiten. Neben einer näheren Betrachtung des Sinussatzes ist es möglich, den Kosinussatz durchzunehmen.

18 Symmetrie und Blattstellung von Pflanzen / Pflanzen Folgen Gesetzmäßigkeiten

A1/A2

Zygomorphe Blüte des Korallenbaums



Disymmetrische Blüte des Kresse-Schaumkrauts

Radiärsymmetrische Blüte der kriechenden Hornnarbe

Der Oleander mit einem Drehwinkel von 72°

A3 Die Schülerinnen und Schüler sollen versuchen, folgendes zu erkennen: Wenn eine Figur achsensymmetisch zu zwei aufeinander senkrecht stehenden Achsen ist, dann ist sie auch drehsymmetrisch mit dem Winkel 180°.

B1 Die geschätzten Divergenzwinkel sollten im Bereich $120° - 144° \pm 5°$ liegen, oder $\alpha = 90°$ oder $\alpha = 180°$ sein.

B2 Individuelle Lösungen sind möglich. Lösungsvorschlag: Die Schatten zweier aufeinanderfolgender Blätter können mithilfe einer Taschenlampe auf ein Stück Papier projiziert werden. Dann können auf Höhe der Mittelrippen der Blätter zwei Linien eingezeichnet werden. Nun kann mit dem Geodreieck der Winkel zwischen den zwei Geraden und somit der Divergenzwinkel gemessen werden.

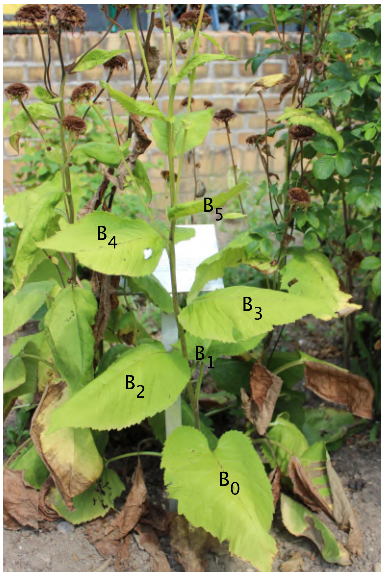
C1

$$\begin{array}{lllll} f_1 = 1, & f_2 = 1, & f_3 = 2, & f_4 = 3 & f_5 = 5, \\ f_6 = 8, & f_7 = 13, & f_8 = 21, & f_8 = 34, & f_{12} = 55. \end{array}$$

C2 Die am häufigsten beobachteten Blattstellungsquotienten und die dazugehörigen Divergenzwinkel sind:

1. $\frac{1}{2}$ (Divergenzwinkel 180°): z.B. Tulpe und Gladiole.
2. $\frac{1}{3}$ (Divergenzwinkel 120°): z.B. dreikantige Gräser und Herbstzeitlose.
3. $\frac{2}{5}$ (Divergenzwinkel 144°): z.B. Pflanzen der Familie der Rosengewächse.
4. $\frac{3}{8}$ (Divergenzwinkel 135°): z.B. bei den meisten Kohlarten oder Löwenmaul.
5. $\frac{5}{13}$ (Divergenzwinkel 138,46°): z.B. Löwenzahn, Sanddorn.
6. $\frac{8}{21}$ (Divergenzwinkel 137,14°): z.B. Zapfen der Waldkiefer.

Beispiel:



Die große Telekie mit einem Blattstellungsquotienten von $\frac{2}{5}$.

C3 Berechnet man weitere Folgenglieder der Fibonacci-Zahlen und setzt diese in die Folge D_n ein, so kommt man zu folgender Feststellung: Die Folge D_n strebt gegen einen Winkel von etwa 137,5°. Anders ausgedrückt:

$$\lim_{n\to\infty} D_n \approx 137,5^\circ$$

Grund dafür ist, dass der Quotient $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den sogenannten *Goldenen Schnitt* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert. Daher konvergiert $\frac{f_n}{f_{n+2}} \cdot 360^\circ = \frac{f_n}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} \cdot 360^\circ$ gegen

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot 360^\circ \approx 137,5^\circ.$$

Didaktischer Kommentar:

In der Natur begegnen uns oft symmetrischen Formen, wie etwa bei Schmetterlingen und Blüten. Insbesondere die Achsensymmetrie bietet hier eine Vernetzung zum Fach Biologie, denn die Botanik klassifiziert achsensymmetrische Blütenstände abhängig von der Anzahl der Symmetrieachsen in *zygomorph, disymmetrisch* und *radiärsymmetrisch*. Den Lernenden soll somit bewusst werden, dass die Symmetrie nicht nur in der Mathematik eine wichtige Rolle spielt.
Die Teilaufgaben **A1** bis **B2** können bereits in der sechsten Klassenstufe bearbeitet werden. Vorab sollen im Rahmen des Fachunterrichts ebene Figuren auf Symmetrieeigenschaften untersucht worden sein. Zudem sind im Vorfeld wichtige Fachbegriffe (Achsensymmetrie, Drehsymmetrie, Spiegelachse etc.) einzuführen und die sachangemessene Anwendung dieser sicherzustellen. Eine weitere Kompetenz, die sich in den Kontext der sechsten Jahrgangsstufe einordnen lässt, ist das Messen und Schätzen von Winkeln. Für die Bearbeitung der Teilaufgaben **B1** und **B2** wird vorausgesetzt, dass der Schüler bereits eine Grundvorstellung von Winkelgrößen hat. Zudem wird erwartet, dass das Geodreieck zum Messen und Zeichnen von Winkeln genutzt werden kann.
Konvergenz und Grenzwerte sind zentrale Konzepte der Analysis. Stellen wir uns nun die Frage, inwiefern der Grenzwertbegriff in der Schulmathematik eine Rolle spielt, so besagt der Kernlehrplan für die Sekundarstufe 2: Schülerinnen und Schüler sollen bis zum Ende der Einführungsphase auf Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate erläutern können. Wir können somit davon ausgehen, dass Schülerinnen und Schüler spätestens am Ende der Einführungsphase über Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff verfügen, die in der Differential- und Integralrechnung wieder aufgegriffen werden. Der Begriff des Grenzwertes fällt nämlich erneut bei dem Übergang von der Produktsumme zum Integral.
Der Folgenbegriff hingegen kommt in den Bildungsstandards nicht mehr vor. Er ist jedoch ein wichtiges Hilfsmittel für die Entwicklung des Unendlichkeits- und Grenzwertbegriffs. Mit den Fibonacci-Zahlen soll dazu motiviert werden, im Unterricht auch einen Blick auf Folgen zu werfen.
Die Bearbeitung der gesamten Aufgabe wird empfohlen, sobald Schülerinnen und Schüler der Einführungsphase über die genannten Kompetenzen verfügen. Eine weitere Möglichkeit für die Bearbeitung dieser Aufgabe bietet sich im Rahmen einer Projektwoche, beispielsweise zum Thema „Mathematik in der Natur“, an.