MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE IN

SIEGBURG

50°47'47,3"N 7°12'40,1"O

Lernheft für die Sekundarstufen I + II

Lösungsvorschläge und didaktische Kommentare

Lösungsvorschläge und didaktische Kommentare zu

Mathematische Spaziergänge in Siegburg

Lernheft für die Sekundarstufen I + II

Projektleitung Dr. Antje Kiesel, Dr. Thoralf Räsch
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universtität
Mathematik-Zentrum
Endenicher Allee 60, 53115 Bonn
spaziergaenge@math.uni-bonn.de

Autorenteam Marek Müller, Katharina Thome, Nina Vorreyer

Projektteam 2022 Alexandra Bettin, Gabriela Brüll, Carsten Hoffmann, Gerrit Keller, Dr. Antje Kiesel, Yannick Müller, Annika Mester, Nik Oster, Dr. Thoralf Räsch, Diana Raineri, Hannah Sophia Schmitt, Julia Schuster, Leonard Strotmann, Chiara Thelen, Florian Winterscheid

Stand 14. Januar 2023

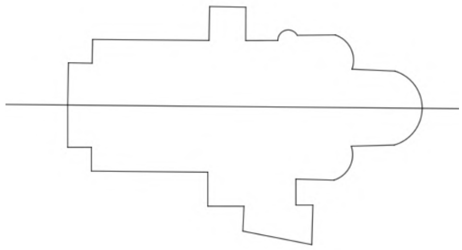
Hinweis: Manche Aufgaben sind aktuell aufgrund von baulichen Umgestaltungen in der Stadt Siegburg nicht mehr durchführbar. Wir haben dies bei den entsprechenden Aufgaben vermerkt.

Inhaltsverzeichnis

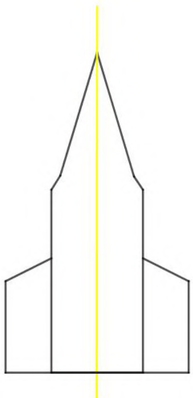
1 Von Kirchen und symmetrischen/m Messen

A1 Die Informationstafel befindet sich an der Kirchenfront rechts neben dem Haupteingang. Die ältesten Teile der Kirche wurden bis 1073 erbaut und sind somit mindestens 947 Jahre alt (im Jahre 2020). Der jüngste Teil der Kirche, eine Erhöhung des Langhauses, wurde 1503-1514 erbaut und ist somit 506 Jahre alt (im Jahre 2020).

A2 Der Grundriss ist nicht symmetrisch. Auf der vorgegebenen Seite der Abbildung befindet sich die Sakristei als Anbau. Dieser fehlt auf der noch nicht eingezeichneten Seite.



A3 Die Vorderansicht sieht etwa wie folgt aus:



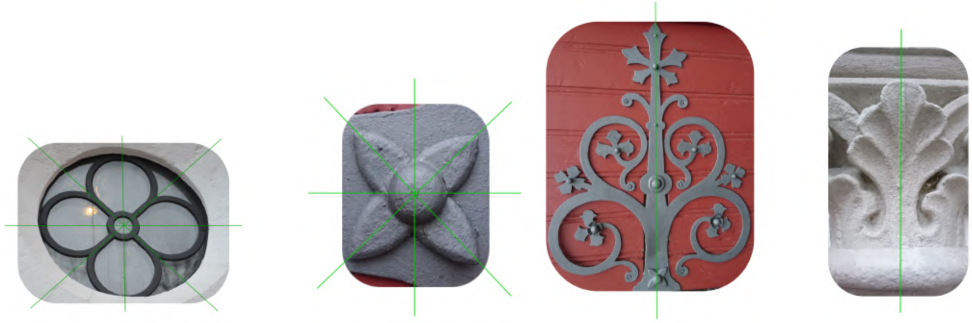
Folgende Elemente durchbrechen die Symmetrie: sämtliche Türgriffe, die Informationstafel rechts neben der Tür oder das Wappen über der Informationstafel. Häufig ist die Eingangstür geöffnet; auch dies kann als Beispiel für Asymmetrie genannt werden.

B1
Achsensymmetrie: Es existieren eine oder mehrere Symmetrieachsen, an welchen die Figur jeweils gespiegelt werden kann, ohne dass sie sich verändert.
Drehsymmetrie: Eine drehsymmetrische Figur besteht aus einem Grundbaustein, der, um bestimmte Winkel gedreht, immer wieder vorkommt und so die gesamte Figur erzeugt.
Punktsymmetrie: Spezialfall der Drehsymmetrie, bei dem der Grundbaustein genau einmal um 180 Grad gedreht wird.

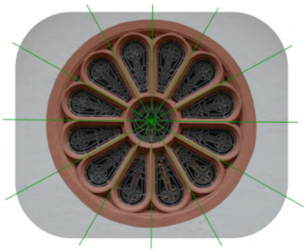
B2 Man findet die Motive von links nach rechts wie folgt:

- an der Frontseite der Kirche auf der linken und rechten Seite in einigen Metern Höhe
- an einer Verzierung der Nebeneingangstür
- über der Haupteingangstür auf der rechten Seite
- an der linken Seite der Kirche, an dem ersten Vorsprung, dem Eingang zugewandt
- an der Nebeneingangstür

B3 Alle Motive bis auf das dritte sind achsensymmetrisch.



B4 Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Aufgabe individuell zu lösen. Eine Möglichkeit ist die folgende:



Dieses Fenster ist auch drehsymmetrisch.

C1 Aufgelistet ist im Folgenden, welche ganzzahligen Werte der gesuchte Winkel haben kann und wie oft der Grundbaustein dann jeweils in der Figur vorkommt.

- 1°, 360 mal
- 2°, 180 mal
- 3°, 120 mal
- 4°, 90 mal
- 5°, 72 mal
- 6°, 60 mal
- 8°, 45 mal
- 9°, 40 mal
- 10°, 36 mal
- 12°, 30 mal
- 15°, 24 mal
- 18°, 20 mal
- 20°, 18 mal
- 24°, 15 mal
- 30°, 12 mal
- 36°, 10 mal
- 40°, 9 mal
- 45°, 8 mal
- 60°, 6 mal
- 72°, 5 mal
- 90°, 4 mal
- 120°, 3 mal
- 180°, 2 mal
- 360°, 1 mal

C2

Der Grundbaustein muss jeweils einmal um 90, 180 und um 270 Grad gedreht werden.
Die Spiegel stehen in einem Winkel von 90 Grad zueinander.

Der Grundbaustein muss jeweils einmal um 90, 180 und um 270 Grad gedreht werden.
Die Spiegel stehen in einem Winkel von 90 Grad zueinander.

C3 Es gibt individuelle Lösungen für diese Aufgabe.

C4 Viele architektonische Bauwerke sind symmetrisch aufgebaut oder enthalten symmetrische Elemente. Grund dafür ist zum einen, dass Symmetrie einen hohen ästhetischen Wert hat. Symmetrische Gebäude wirken oftmals ruhig, harmonisch und gut strukturiert. Ein weiterer praktischer Effekt von Symmetrie ist die mit ihr einhergehende Stabilität. Große Gebäude werden häufig symmetrisch gebaut, um ihr Gleichgewicht zu halten und somit ihre Statik zu verbessern.

Didaktischer Kommentar:

Das Thema Symmetrie ist laut Lehrplan Gegenstand der 5. und 6. Jahrgangsstufe. Diese Aufgabe ist für Schülerinnen und Schüler der 6. Jahrgangsstufe konzipiert, da sie neben der schon in der 5. Jahrgangsstufe eingeführten Achsensymmetrie auch das Prinzip der Drehsymmetrie betrachtet.
Die Schülerinnen und Schüler müssen zur Bearbeitung der Aufgaben bereits ein Grundverständnis von Achsen- und Drehsymmetrie besitzen und diese beiden Arten der Kongruenzabbildungen voneinander abgrenzen können. Außerdem müssen ihnen die Begriffe Symmetrieachse und Symmetriepunkt aus dem Unterricht geläufig sein.
Architektonischer Symmetrie begegnen die Schülerinnen und Schüler in dieser Aufgabe auf mehreren Ebenen; Symmetrien im Großen, welche die globale Form eines Gebäudes oder gar einer Stadt betreffen, und Symmetrien im Kleinen, die zum Beispiel der ornamentalen Ausschmückung von Gebäuden dient.
Wenn nicht genug Zeit bleibt, lässt sich Teilaufgabe **C3** auch nach dem Spaziergang im Klassenzimmer bearbeiten.
Es bietet sich an, diese Aufgabe im Anschluss an den Themenblock Symmetrie zu bearbeiten, da sämtliche Themen des Unterrichts aufgegriffen werden. So ist diese Aufgabe als Festigung des bereits Gelernten gedacht.

2 Mit Mathematik in Richtung Sieg

A1 Zum Messzeitpunkt wurde ermittelt, dass ein Stück Holz auf dem Wasser für 10 Meter 15 Sekunden braucht. Die Fließgeschwindigkeit beträgt also

$$\frac{10\text{ m}}{15\text{ s}} = \frac{2\text{ m}}{3\text{ s}} \approx 0,67\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A2 Der Wert aus Teilaufgabe **A1** muss in Kilometer pro Stunde umgerechnet werden:

$$\begin{aligned}1\text{ Stunde} &\mathrel{\widehat{=}} 60\text{ Minuten} \mathrel{\widehat{=}} 3600\text{ Sekunden}\\ 1\text{ Kilometer} &\mathrel{\widehat{=}} 1000\text{ Meter}\\ \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}\text{ m}}{1\text{ s}} &= \frac{2400\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{2,4\text{ km}}{1\text{ h}} = 2,4\text{ km/h}\end{aligned}$$

Die Fließgeschwindigkeit des Flusses beträgt an der gemessenen Stelle 2,4 Kilometer pro Stunde.

A3 Verschiedene Faktoren können die die Fließgeschwindigkeit eines Gewässers beeinflussen, z.B. Wirbel, Strömungsunterschiede, Gefälleunterschiede, in den Fluss hineinragende Äste/Büsche uvm. In den folgenden Rechnungen wird 2,4 Kilometer pro Stunde als errechnete Geschwindigkeit verwendet.

A4 Von Brücke 2 bis zur Kreuzung braucht ein Stück Holz 51 Sekunden. Also hat es

$$51\text{ s} \cdot \frac{2\text{ m}}{3\text{ s}} = 34\text{ m}$$

zurückgelegt.

Von Brücke 1 bis zur Kreuzung braucht ein Stück Holz 4:29 Minuten, also 269 Sekunden.

$$\frac{51\text{ s}}{269\text{ s}} \approx 0,19$$

Der Bacharm unter der Brücke 1 fließt 0,19-mal so schnell wie der unter Brücke 2.

$$\frac{2\text{ m}}{3\text{ s}} \cdot 0,19 \approx 0,13\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Also hat der Teil des Baches unter Brücke 1 eine Fließgeschwindigkeit von 0,13 Metern pro Sekunde.

B1 Es wird beispielhaft gemessen, dass zum Zurücklegen von 6 Metern 8 Schritte benötigt werden.

$$\frac{6\text{ m}}{8} = 0,75\text{ m}$$

Ein Schritt hat eine durchschnittliche Länge von 0,75 Metern. Für die Strecke zwischen Brücke 2 und Brücke 4 werden 484 Schritte benötigt. Dies entspricht $484 \cdot 0,75\text{ m} = 363\text{ m}$. Die Strecke zwischen Brücke 2 und Brücke 4 beträgt also etwa 363 Meter.

B2 Das Boot fährt mit einer Geschwindigkeit von 12 Kilometern pro Stunde.

$$\begin{aligned}\frac{12000\text{ m}}{3600\text{ s}} &= \frac{10\text{ m}}{3\text{ s}} \approx 3,33\frac{\text{m}}{\text{s}}\\ \text{bzw. } \frac{12000\text{ m}}{60\text{ min}} &= 200\frac{\text{m}}{\text{min}}\end{aligned}$$

Für 363 Meter benötigt das Boot

$$\frac{363}{200} \text{ Minuten} = 1{,}82 \text{ Minuten} \mathrel{\widehat{=}} 1 \text{ Minute und } 49{,}2 \text{ Sekunden}$$

B3 Die Ente bewegt sich mit der Fließgeschwindigkeit des Wassers fort, also mit 2,4 Kilometern pro Stunde (siehe Teilaufgabe **A2**).
Das Boot fährt mit einer Geschwindigkeit von 12 Kilometern pro Stunde.

$$12\frac{\text{km}}{\text{h}} : 2{,}4\frac{\text{km}}{\text{h}} = 5$$

Das Boot bewegt sich 5-mal so schnell fort wie die Ente, diese braucht also 5-mal so lang für die Strecke, wie das Boot.

$$1{,}82 \text{ min} \cdot 5 = 9{,}1 \text{ min} \mathrel{\widehat{=}} 9 \text{ Minuten und } 6 \text{ Sekunden}$$

Die Ente benötigt 9 Minuten und 6 Sekunden, um die Strecke zurückzulegen.

B4 Die betrachtete Strecke von Brücke 2 bis zur Siegmündung beträgt mit Hilfe der Berechnung aus Teilaufgabe **B1**:

$$363 \text{ m} + 2200 \text{ m} = 2563 \text{ m}$$

Nach sieben Minuten Fahrzeit auf Höchstgeschwindigkeit hat das Boot eine Strecke von

$$7 \text{ min} \cdot 12\frac{\text{km}}{\text{h}} = 7 \text{ min} \cdot 200\frac{\text{m}}{\text{min}} = 1400 \text{ m}$$

zurückgelegt.
Nach der Drosselung um 30 Prozent der Höchstgeschwindigkeit, fährt das Boot noch

$$12\frac{\text{km}}{\text{h}} - \left(\frac{12\frac{\text{km}}{\text{h}}}{100} \cdot 30\right) = 8{,}4\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Mit dieser Geschwindigkeit kann das Boot weitere fünf Minuten lang fahren.

$$5 \text{ min} \cdot 8{,}4\frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \text{ min} \cdot 140\frac{\text{m}}{\text{min}} = 700 \text{ m}$$

Das Boot legt in diesen fünf Minuten weitere 700 Meter Strecke zurück.

$$1400 \text{ m} + 700 \text{ m} = 2100 \text{ m}$$

Insgesamt kann das Boot also eine Strecke von 2100 Metern zurücklegen. Somit erreicht das Boot die Mündung nicht, da der Akku

$$2563 \text{ m} - 2100 \text{ m} = 463 \text{ m}$$

davor leer ist.

Didaktischer Kommentar:

Um den Spaziergang durchführen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler im Unterricht bereits das Umwandeln von Größen und Maßen in andere Einheiten, den Geschwindigkeitsbegriff und die Prozentrechnung behandelt haben sowie Verhältnisse ausrechnen können.

In Aufgabenteil **A** geht es hauptsächlich um die Fließgeschwindigkeit des Mühlengrabens. Damit einhergehend sollen die Schülerinnen und Schüler das Umwandeln von Einheiten einüben und sich außerdem mit den tatsächlichen realen Gründen für Fließgeschwindigkeitsunterschiede auseinandersetzen, was eine gute Verbindung zwischen Mathematik, Modellbildung und Realitätsabgleich darstellt.
In Aufgabenteil **B** sollen die Schülerinnen und Schüler die Entfernung zwischen zwei Brücken messen, indem sie ihre mittlere Schrittlänge ermitteln. Daneben geht es abermals um Geschwindigkeitsvergleiche. Hierbei ist zu beachten, dass man am besten mehrere Aufsichtspersonen dabei haben sollte, da die Schülerinnen und Schüler eine gewisse Strecke zurücklegen. Teilaufgabe **B4** muss nicht notwendigerweise am Mühlengraben selbst gelöst werden. Sie ist allerdings als Abschluss des Spaziergangs dennoch gut geeignet, da sie die vorangegangenen Überlegungen und Rechenmethoden in einer komplexeren Aufgabe bündelt.

Im Anschluss können im Unterricht weitergehende Fragen der Bruch- und Prozentrechnung behandelt werden.

3 Geometrie - Alles Hexerei?

A1 Der Turm ist 7,36 Meter hoch.

A2 Der Durchmesser innen beträgt $d_i = 4,72$ Meter und der Radius innen folglich $r_i = 2,36$ Meter. Der Durchmesser außen beträgt $d_a = 7,12$ Meter und der Radius außen folglich $r_a = 3,56$ Meter.

A3 Wir betrachten den Turm als halben Hohlzylinder.

$V = 7,36 \text{ m } \cdot (0,5 \cdot \pi \cdot (3,56 \text{ m})^2 - 0,5 \cdot \pi \cdot (2,36 \text{ m})^2) = 7,36 \text{ m } \cdot (19,91 \text{ m}^2 - 8,75 \text{ m}^2) = 7,36 \text{ m } \cdot 11,16 \text{ m}^2 = 82,13 \text{ m}^3$

Wenn man das Volumen genauer berechnen möchte, dann könnte man noch berücksichtigen, dass oben auf der Plattform Einkerbungen in der Mauer sind, die das Volumen des Turmes verringern. Man kann sich mit der Klasse Gedanken machen, wie man das Volumen dieser Einkerbungen näherungsweise bestimmen kann und dieses vom Volumen des halben Hochzylinders abziehen.

B1 $m_{\text{hohl}} = 2,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 82130000 \text{ cm}^3 = 188899000 \text{ g } = 188899 \text{ kg } = 188,899\text{t}$

B2 $V_{\text{ganz}} = 7,36 \text{ m } \cdot 0,5 \cdot \pi \cdot (3,56 \text{ m})^2 = 146,52 \text{ m}^3$

$m_{\text{ganz}} = 2,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 146520000 \text{ cm}^3 = 336966000 \text{ g } = 336996 \text{ kg}$

$\frac{m_{\text{ganz}}}{m_{\text{hohl}}} = 1,784$

Der Turm wäre etwa 1,8 mal schwerer.

C1 $1,5 \text{ h } \cdot (188,899 \text{ t } : 1,5 \text{ t } : 5) = 37,78$ h. Setzt man zwölf Stunden als mittelalterlichen Arbeitstag an, dauert der Transport 3,15 Tage, war also am vierten Tag beendet.

Didaktischer Kommentar:

Dieser Spaziergang führt Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 8 zum Hexenturm. Er soll als Beispiel für einen halben Hohlzylinder erfahren werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen zur erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe den Flächeninhalt von Kreisteilen und das Volumen von Hohlzylindern berechnen können.

Der Hexenturm liegt auf dem Michaelsberg. Er steht an einem Fußweg. Der Turm wurde 2018 saniert und ist jetzt wieder begehbar und auch barrierefrei zugänglich. Die Plattform des Turms ist durch die Wände des Turms und ein Geländer gesichert. Auf der stadtauswärts des Turms gelegenen Seite befindet sich eine große Wiese, auf der die Schülerinnen und Schüler arbeiten können, nachdem sie ihre Messungen abgeschlossen haben.

In den Teilaufgaben **A1** und **A2** arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Gruppen. Die Messungen, die sie durchführen sollen, erfordern mehrere Personen. Die Reihenfolge der Teilaufgaben **A1** und **A2** ist frei wählbar. Die späteren Teilaufgaben bauen jedoch auf den Messergebnissen auf. Es ist problemlos möglich, dass mehrere Gruppen gleichzeitig die Messungen durchführen. Je nach Klassengröße sollte die Hälfte der Kleingruppen mit der Bearbeitung von Teilaufgabe **A1** und die andere Hälfte mit der Bearbeitung von Teilaufgabe **A2** beginnen.

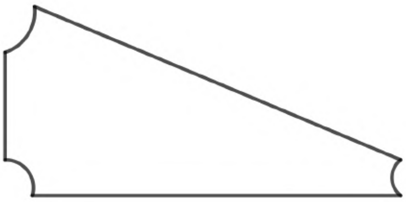
Der Spaziergang ist als Teil der Unterrichtsreihe zur Geometrie in der Jahrgangsstufe 8 konzipiert, in der Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und Kreisteilen, sowie Oberfläche und Volumen von Prismen und Zylindern behandelt werden. Da der Turm von den Schülerinnen und Schülern als halber Hohlzylinder erkannt und behandelt werden soll, kann der Spaziergang erst am Ende der Reihe durchgeführt werden. Bei der Volumenberechnung in Teilaufgabe **A3** kann man, wenn Zeit dafür bleibt, zusätzlich thematisieren, dass man das Volumen des halben Hohlzylinders noch um das Volumen der Einkerbungen auf der Plattform verringern mšste, um ein exakteres Ergebnis zu erhalten.

In den Teilaufgaben **B2** und **C1** werden Inhalte aus der Jahrgangsstufe 7, nämlich die Prozentrechnung und der Dreisatz, vorausgesetzt. Je nach Leistungsniveau der Lerngruppe kann dies als implizite Wiederholung dienen oder als explizite Wiederholung im Unterricht vorbereitet werden. Die Unterrichtsreihe zur Geometrie ist an vielen Schulen die letzte Unterrichtsreihe der Jahrgangsstufe 8 vor den Sommerferien. Daher wird im Anschluss an die Unterrichtsreihe ohnehin wiederholt. Der Spaziergang kann als Abschluss der Reihe zur Geometrie verwendet werden und gleichzeitig die Wiederholungsphase einleiten.

4 Gärtnern mit den Strahlensätzen

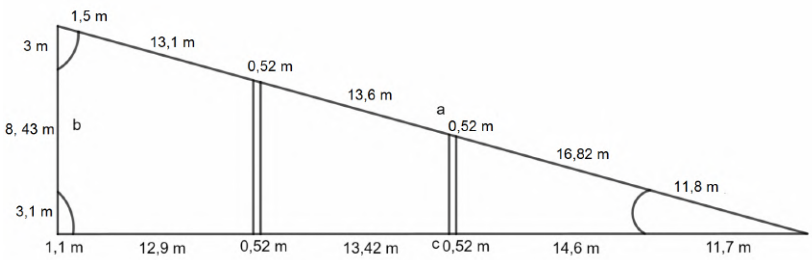
Hinweis: Diese Aufgabe ist aufgrund von baulichen Veränderungen am Lernort aktuell nicht durchführbar.

A1



A2 Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck.

A3 Es werden die einzelnen Teilstrecken gemessen und von links nach rechts addiert:
$a = 1,5 \text{ m} + 13,1 \text{ m} + 0,52 \text{ m} + 13,6 \text{ m} + 0,52 \text{ m} + 16,82 \text{ m} + 11,8 \text{ m} = 57,86 \text{ m}$
$b = 3 \text{ m} + 8,43 \text{ m} + 3,1 \text{ m} = 14,53 \text{ m}$
$c = 1,1 \text{ m} + 12,9 \text{ m} + 0,52 \text{ m} + 13,42 \text{ m} + 0,52 \text{ m} + 14,6 \text{ m} + 11,7 \text{ m} = 54,8 \text{ m}$

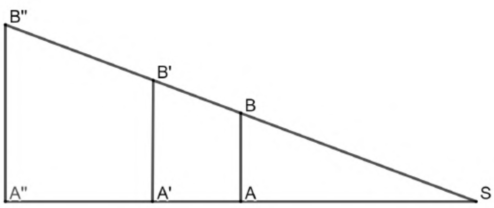


A4 Grundsätzlich gilt für ein Dreieck zur Flächenberechnung die Formel: $A = \frac{g \cdot h}{2}$. In unserem Beispiel gilt:

$$A = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{14,53 \text{ m} \cdot 54,8 \text{ m}}{2} \approx 398,12 \text{ m}^2$$

Der Flächeninhalt des dreieckigen Gartens beträgt etwa 398,12 Quadratmeter. Dabei wurden die Aussparungen an den Ecken vernachlässigt.

B1



1. Strahlensatz: Werden zwei sich schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so sind die Längenverhältnisse entsprechender Abschnitte auf den sich schneidenden Geraden gleich.
Beispiele: $\frac{\overline{|SA|}}{\overline{|SA'|}} = \frac{\overline{|SB|}}{\overline{|SB'|}}$ oder $\frac{\overline{|SA|}}{\overline{|AA'|}} = \frac{\overline{|SB|}}{\overline{|BB'|}}$

2. Strahlensatz: Werden zwei sich im Punkt S schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so ist das Längenverhältnis der Parallelabschnitte gleich dem Längenverhältnis der entsprechenden von S aus gemessenen Abschnitte einer der Geraden.
Beispiele: $\frac{\overline{|A''B''|}}{\overline{|A'B'|}} = \frac{\overline{|SB''|}}{\overline{|SB'|}}$ oder $\frac{\overline{|AB|}}{\overline{|SA|}} = \frac{\overline{|A'B'|}}{\overline{|SA'|}}$

B2 Gegeben:

$$\overline{|AB|} = 5 \text{ m}$$
$$\overline{|A'B'|} = 7,62 \text{ m}$$

Es müssen nun die Verhältnisse der gemessenen Teilstrecken verglichen werden mit dem Verhältnis der gegebenen Längen der beiden Parallelen.
Das Längenverhältnis der Parallelabschnitte:

$$\frac{\overline{|AB|}}{\overline{|A'B'|}} = \frac{5 \text{ m}}{7,62 \text{ m}} \approx 0,66$$

Beispielhaft werden hier jetzt Längenverhältnisse der gemessenen Seiten betrachtet.
$\frac{\overline{|SA|}}{\overline{|SA'|}} = \frac{26,6 \text{ m}}{40,54 \text{ m}} \approx 0,66 \quad \rightarrow$ Es wurde genau gemessen.
$\frac{\overline{|SB|}}{\overline{|SB'|}} = \frac{28,88 \text{ m}}{43 \text{ m}} \approx 0,67 \quad \rightarrow$ Die Messung ist auch ausreichend (geringe Messfehler).

B3 Der Flächeninhalt des mittleren Gartenstücks kann durch ein Trapez beschrieben werden, welches die Höhe $\overline{|AA'|}$ hat. Aus den bisherigen Messungen ergibt sich:
$\overline{|AA'|} = \frac{0,52}{2} \text{ m} + 13,42 \text{ m} + \frac{0,52}{2} \text{ m} = 0,26 \text{ m} + 13,42 \text{ m} + 0,26 \text{ m} = 13,94 \text{ m}$
Mit den in **B2** gegebenen Werten kann der Flächeninhalt durch Einsetzen der Werte in die Formel berechnet werden:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{\overline{|AB|} + \overline{|A'B'|}}{2} \cdot \overline{|AA'|} = \frac{5 \text{ m} + 7,62 \text{ m}}{2} \cdot 13,94 \text{ m} = 6,31 \text{ m} \cdot 13,94 \text{ m} \approx 87,96 \text{ m}^2$$

Die Grundfläche des mittleren Gartenstücks beträgt 87,96 Quadratmeter. Nicht die gesamte berechnete Fläche wird bepflanzt, da die Grundfläche der Hecke abgezogen werden muss. Die Hecke ist nach Messungen 0,45 Meter breit. Wir berechnen daraus die Fläche der Hecke. Die Fläche zwischen den Punkten A und A' kann durch ein Rechteck, die Fläche der Hecke zwischen B und B' durch ein Parallelogramm beschrieben werden:

$$A_{\text{HeckeA}} = g \cdot h = 13,42 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} = 6,03 \text{ m}^2$$
$$A_{\text{HeckeB}} = g \cdot h = 13,6 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} = 6,12 \text{ m}^2$$

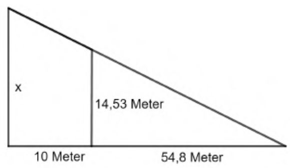
Daraus folgt für die zu bepflanzende Fläche $A_{\text{Rosenfläche}}$:

$$A_{\text{Rosenfläche}} = A_{\text{Trapez}} - A_{\text{HeckeA}} - A_{\text{HeckeB}} = 87,96 \text{ m}^2 - 6,03 \text{ m}^2 - 6,12 \text{ m}^2 = 75,81 \text{ m}^2$$

B4 Es passen $75,81 \cdot 9 \approx 628$ Rosen auf das mittlere Gartenstück.

B5 Gemessen wird die Länge des Gartens an der vom Eingang aus gesehen linken Seite des Gartens. In der Skizze aus Teilaufgabe **A3** entspricht die Länge der Seite c. Eine Messung ergibt, dass der Rosengarten auf jeden Fall um 10 Meter verlängert werden könnte, ohne dass die Gefahr besteht, dass man nicht mehr um den Garten herumgehen könnte. Bei einer Verlängerung um 10 Meter ist hinter dem Garten noch Platz für einen Weg, dessen Breite etwa der Breite des restlichen Weges entspricht.

B6

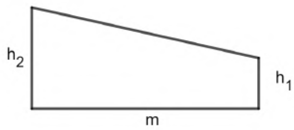


Wir verwenden den zweiten Strahlensatz, um herauszufinden, wie lang die Kopfseite nach Verlängerung des Gartens wäre.

$$\frac{54,8}{14,53} = \frac{64,8}{x}$$

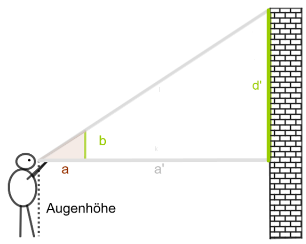
Daraus folgt $x \approx 17,18$. Die Kopfseite des Gartens wäre nach der Verlängerung $17,18$ Meter lang.

C1 Es kommt zu individuellen Schätzungen.



Realistische Schätzungen für die Höhe: $h_1 = 3 \text{ m} \pm 0,5 \text{ m}$, $h_2 = 10 \text{ m} \pm 1,5 \text{ m}$

C2



Es werden individuelle Messdaten auftreten, daher wird das Vorgehen am Modell erklärt.

$$\begin{aligned} a &= \text{Erste Schenkellänge des Geodreiecks} \\ b &= \text{Zweite Schenkellänge des Geodreiecks} \\ a' &= \text{Entfernung zur Mauer} \end{aligned}$$

Zuerst muss die Entfernung a' von deinem Standpunkt zur Mauer gemessen werden. Du kennst außerdem die Länge b des anderen Schenkels des Geodreiecks. Wende den zweiten Strahlensatz an, um die Länge b' zu ermitteln:

$$\frac{b}{a} = v \stackrel{!}{=} \frac{b'}{a'} \quad \Rightarrow \quad b' = v \cdot a'$$

Nachdem b' ermittelt wurde, muss die individuelle Augenhöhe zu b' addiert werden, um die Höhe h_1 der Mauer zu berechnen. Analog zu diesem Rechenweg muss mit konkreten gemessenen Werten vorgegangen werden.
Zur Kontrolle: Die Höhe der Mauer an ihrer niedrigsten Stelle beträgt 3 Meter.

C3 Falls nun auffällt, dass der geschätzte Wert für h_1 deutlich zu groß/zu klein war, kann aufgrund der ermittelten tatsächlichen Höhe die Schätzung für h_2 angepasst werden.

C4 Es liegt nahe, wieder die Methode aus Teilaufgabe **C2** zu verwenden. Falls die sogenannte „Schattenmethode“ angewendet wurde, ist die Rechnung ebenfalls durch Verwendung des zweiten Strahlensatzes durchzuführen. Ergebnis: $h_2 = 9,82$ Meter.

C5 Die Frontansicht der Mauer kann durch ein Trapez beschrieben werden (siehe Abbildung in Teilaufgabe **C1**). Die Formel zur Berechnung der Fläche lautet

$$A_{\text{Mauer}} = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot m$$

Die Länge m muss durch Messungen ermittelt werden. Für $m = 58,5$ m ergibt sich

$$A_{\text{Mauer}} = \frac{3 \text{ m} + 9,82 \text{ m}}{2} \cdot 58,5 \text{ m} = \frac{12,82 \text{ m}}{2} \cdot 58,5 \text{ m} \approx 374,99 \text{ m}^2$$

Um das Volumen der Mauer zu berechnen, muss das Ergebnis mit der Dicke der Mauer multipliziert werden. Die Dicke der Mauer beträgt laut Messungen 0,60 Meter. Daraus ergibt sich für das Volumen der Mauer

$$V_{\text{Mauer}} = 374,99 \text{ m}^2 \cdot 0,6 \text{ m} \approx 225 \text{ m}^3$$

In der Mauer wurden 225 Kubikmeter Steine verbaut.

Didaktischer Kommentar:

Die Strahlensätze haben vielen Anwendungen. Besonders in der Höhen- und Streckenberechnungen kommen die Gesetze des Strahlensatzes zum Einsatz. Das Hauptziel der Aufgabe ist die Vertiefung des Wissens über Strahlensätze und die Motivation für die weitere Beschäftigung mit diesen.

Aufgabenteil **A** beschäftigt sich mit Orientierungsaufgaben, die größtenteils aus früheren Jahrgangsstufen bekannte Themen aufgreifen. Die Teilaufgaben **A1** und **A2** dienen dazu, dass sich die Schülerinnen und Schüler mit dem Garten vertraut machen und die Grundstruktur der Beete erkennen.

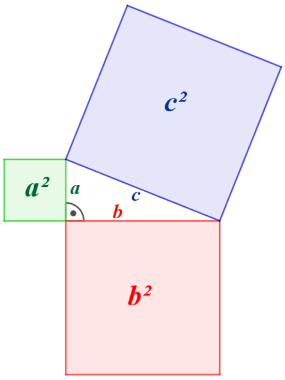
Aufgabenteil **B** beschäftigt sich intensiv mit verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der Strahlensätze. Teilaufgabe **B1** dient als Wiederholung der Strahlensätze. In Teilaufgabe **B2** müssen die Schülerinnen und Schüler die Strahlensätze anwenden, um eine mögliche Beet-Vergrößerung anzugeben. In Teilaufgabe **B3** und **B4** benötigen die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über die Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms und müssen die Anzahl der Rosen, die auf diese Fläche gepflanzt werden können, errechnen. Hierbei muss beachtet werden, dass der Bereich der umgrenzenden Hecke nicht bepflanzt werden soll. Grundlegend für die Teilaufgaben **B5** und **B6** sind wiederum die Strahlensätze.

Im Aufgabenteil **C** liegt der Fokus nicht mehr auf dem Gartenstück selbst, sondern auf der angrenzenden Mauer. Es werden wiederum Anwendungsmöglichkeiten der Strahlensätze durch die Schülerinnen und Schüler selbst erprobt. In Teilaufgabe **C1** müssen die Schülerinnen und Schüler die Höhe der höchsten und niedrigsten Stelle der Mauer schätzen und ihre Schätzungen in den folgenden Teilaufgaben evaluieren und mithilfe der Strahlensätze auf Richtigkeit überprüfen. Insbesondere bei Teilaufgabe **C2** sollte die Lehrperson für Fragen bereitstehen. In Teilaufgabe **C5** sollen die Schülerinnen und Schüler anhand ihrer Ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben das Volumen der Mauer berechnen.

5 Pythagoras zu Besuch bei der Bank

A1 Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



A2 Die Tür hat die folgenden Maße: Höhe $h_{\text{Tür}} = 2,5$ m, Breite $b_{\text{Tür}} = 3,37$ m
Somit passt die Platte weder hochkant noch waagerecht durch die Tür. Daher wird die Diagonale des Eingangs mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet:

$$\begin{aligned}(2,5\ \text{m})^2 + (3,37\ \text{m})^2 &= c^2\\ 6,3\ \text{m}^2 + 11,36\ \text{m}^2 &= c^2\\ 17,61\ \text{m}^2 &\approx c^2\\ 4,2\ \text{m} &\approx c\end{aligned}$$

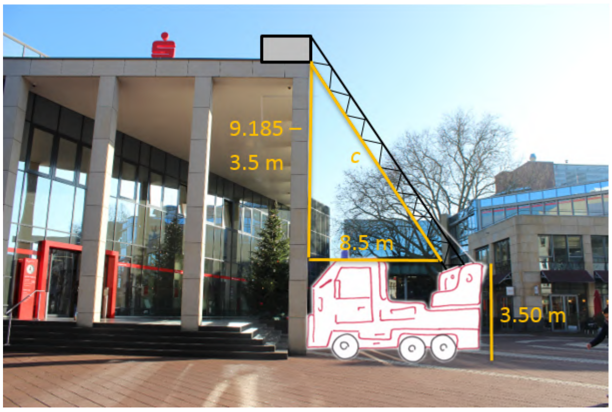
Die Diagonale der Tür misst 4,20 Meter. Somit passt die neue Türplatte mit ihrer Breite von 3,80 Metern problemlos durch die Tür, wenn man die 4,50 Meter lange Seite senkrecht durch die Tür trägt.

A3 Zuerst muss die Höhe der Überdachung ermittelt werden, indem die Höhe und Breite einer Säule ermittelt werden. Die Säulen bestehen aus jeweils 8 Elementen, deren Höhe gemessen werden muss. Außerdem muss die Dicke des Dachs selbst bestimmt werden. Diese entspricht der Breite der Säule.

$$h_{\text{Dach}} = 8 \cdot 108\ \text{cm} + 54,5\ \text{cm} = 918,5\ \text{cm} = 9,185\ \text{m}$$

Das Dach ist 9,185 Meter hoch.

Um die notwendige Mindestlänge der Drehleiter zu ermitteln, muss der Satz des Pythagoras angewendet werden. Die Mindestlänge der Leiter entspricht hierbei der Hypotenuse c. Die Längen der Katheten a und b sind nun durch die Angaben aus der Aufgabenstellung ermittelbar.



$$
\begin{aligned}
(8,5\text{ m})^2 + (9,185\text{ m} - 3,50\text{ m})^2 &= c^2 \\
72,25\text{ m}^2 + 32,32\text{ m}^2 &\approx c^2 \\
104,57\text{ m}^2 &\approx c^2 \\
\sqrt{104,57}\text{ m} &\approx c \\
10,23\text{ m} &\approx c
\end{aligned}
$$

Die 30 Meter lange Drehleiter reicht aus, um eine Strecke von 10,23 Metern zu überbrücken. Die Drehleiter ist dann zu $(10,23 : 30) \cdot 100 = 34,1$ Prozent ausgefahren.

A4 In diesem Fall können wir die Höhe der Kamera (ähnlich wie in Teilaufgabe **A3**) über die Anzahl der Säulensegmente ermitteln, da die Kamera an der Unterseite des Daches angebracht ist.
Die Kamera macht innerhalb eines Kugelausschnitts mit dem Radius 10 Meter überall Bilder, wo keine Mauern sind. Wir können die maximal mögliche Entfernung vom Treppenaufgang mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ermitteln. Hierbei stellt die Höhendifferenz zwischen der jeweiligen Kopfhöhe und der Kamera eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks dar, der Abstand zum Treppenaufgang die andere Kathete, deren Länge gesucht wird. Die Hypotenuse ist ebenfalls bekannt und entspricht den 10 Metern Maximalentfernung von der Kamera.
Es muss beachtet werden, dass die jeweilige Kopfhöhe ausschlaggebend ist für den zu ermittelnden Wert, da Personen anhand von Bildern ihres Gesichts identifiziert werden.
Für eine durchschnittliche Kopfhöhe eines Schülers von $1,60$ Metern ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(h_{\text{Dach}} - h_{\text{Kopf}})^2 + b^2 &= (10\text{ m})^2 \\
(9,185\text{ m} - 1,6\text{ m})^2 + b^2 &= (10\text{ m})^2 \\
(10\text{ m})^2 - (7,585\text{ m})^2 &= b^2 \\
100\text{ m}^2 - 57,53\text{ m}^2 &\approx b^2 \\
42,47\text{ m}^2 &= b^2 \\
6,52\text{ m} &\approx b
\end{aligned}
$$

Ab einem Abstand von 6,52 Metern von dem Treppenaufgang könnte die Kamera Bilder machen, auf der man eine Person mit 1,60 Metern Kopfhöhe identifizieren kann.

B1 Um mit Hilfe eines solchen Knotenseils rechte Winkel zu konstruieren, wird ausgenutzt, dass

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

gilt. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras gilt also, dass ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 rechtwinklig ist. Bei dem Knotenseil ist lediglich zu beachten, dass die

Knoten alle im exakt gleichen Abstand voneinander in das Seil gebunden werden.

B2 Um zu überprüfen, ob die Überdachung des Haupteinganges einen rechten Winkel hat, sollten die Schülerinnen und Schüler die Ebene des Daches gedanklich auf den Boden projizieren. Die Lernenden können nun alle drei Seitenlängen des projizierten Dreiecks abmessen und mithilfe des Satzes des Pythagoras nachrechnen, dass ein rechter Winkel vorliegt.

Andernfalls kann zum Beispiel an den beiden vermeintlichen Katheten jeweils eine Strecke von 3 beziehungsweise 4 Metern abgemessen werden. Die Verbindungsstrecke zwischen den abgemessenen Endpunkten der beiden Strecken müsste dann eine Länge von 5 Metern haben.

Als Ergebnis bekommt man in beiden Fällen, dass die Überdachung einen rechten Winkel hat.

B4 Weitere pythagoreische Zahlentripel neben $(3, 4, 5)$ sind zum Beispiel

$$(6, 8, 10), \quad (5, 12, 13), \quad (9, 12, 15)$$

Didaktischer Kommentar:

Das Thema dieses Spaziergangs ist der Satz des Pythagoras und insbesondere dessen Anwendung. Laut Lehrplan ist die Satzgruppe des Pythagoras Thema der Jahrgangsstufe 9.
Die Schülerinnen und Schüler sollten den Satz des Pythagoras im Unterricht bereits kennengelernt und im besten Fall auch bewiesen haben, damit sie mit der Aufgabenstellung zurechtkommen. Daneben brauchen die Schülerinnen und Schüler lediglich Grundkenntnisse im Lösen von Gleichungen und ein solides Grundverständnis von der Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke.
In Aufgabenteil **A** lernen die Schülerinnen und Schüler den Satz des Pythagoras auf verschiedenste Weise anzuwenden. In Aufgabenteil **B** geht es um die Umkehrung des Satzes des Pythagoras. Es macht nichts, wenn die Schülerinnen und Schüler die Umkehrung noch nicht im Unterricht behandelt haben. Sie können sie vor Ort entdecken und erlernen.
Im Anschluss an den Spaziergang kann sich der Unterricht sowohl mit den beiden anderen Sätzen aus der Satzgruppe des Pythagoras als auch mit den pythagoreischen Zahlentripeln beschäftigen.

6 Auf die Rampe! Fertig! Rollt!

A1 Die Rampe hat eine Länge von $10,7$ Metern.

A2 Bei fünf Messungen mit einem Tischtennisball ergaben sich die Zeiten: 9,8 s - 9,3 s - 9,7 s - 9,6 s - 10,2 s. Im Durchschnitt benötigt der Ball also ungefähr 9,72 Sekunden.

A3 Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt $\frac{10{,}7\ \mathrm{m}}{9{,}72\ \mathrm{s}} \approx 1,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

B1 Als mögliche Ideen könnten die Schülerinnen und Schüler folgendes festhalten

- mit einem Messgerät die Geschwindigkeit festhalten
- die beobachtete Strecke verkleinern

B2 Wenn man die Rampe aufteilt in die Teilstrecken von der Stange vor dem ebenen Teilstück bis zum Ende der Rampe und von der vorletzten Stange bis zum Ende der Rampe, dann ergibt sich folgende Tabelle:

Länge der Strecke in Meter	Durchschnittswert der gemessenen Zeit in Sekunden	Durchschnittliche Geschwindigkeit in Meter je Sekunde
$10,7\mathrm{m}$	$9,72\mathrm{s}$	$1,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$5,1\mathrm{m}$	$4,25\mathrm{s}$	$1,2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$1,4\mathrm{m}$	$0,9\mathrm{s}$	$1,6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

B3 Weil der Ball am Ende der Rampe am schnellsten ist und der Anfang der Strecke beim Experiment mit dem kürzesten Weg näher am Ende der Rampe ist, sind die $1,6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die beste Annäherung für die Geschwindigkeit im Endpunkt.

B4

$$\frac{1,6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3600\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}}}{1000\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}} = 5,76\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Die Geschwindigkeit im Endpunkt beträgt näherungsweise $5,8$ Kilometer pro Stunde. Damit würde der Ball nicht geblitzt werden.

C1 Man könnte $a = b - h$ schreiben, wobei h der Abstand zwischen dem Intervallende b und dem Intervallanfang a ist. Somit hätte der Differenzenquotient die Form:

$$m_{[b-h,b]} = \frac{f(b) - f(b-h)}{h}$$

Je kleiner das h wird, desto genauer ist der Wert für die Geschwindigkeit im Endpunkt.

C2 Mögliche Orte für weitere Rampen wären z.B:

- Eingang Arbeitsgericht Siegburg
- gegenüber des Arbeitsgerichtes auf dem Seitenweg des Flusses

Wichtig: Die Rampe am Bahnhof Siegburg neben der Bahnhaltestelle der Stadtbahn ist für diese Aufgabe ungeeignet, da der Ball hier auf die Schienen rollen könnte.

Didaktischer Kommentar:

Dieser mathematische Spaziergang kann als Teil einer Unterrichtseinheit in der Einführungsphase im Inhaltsfeld Analysis verwendet werden. Die Lerneinheit stellt den Übergang von der *durchschnittlichen Änderungsrate* zur *momentanen Änderungsrate* in den Fokus. Ziel der Stunde ist die Vermittlung des Konzepts, dass die momentane Änderungsrate durch die durchschnittliche Änderungsrate approximiert werden kann. Somit muss den Schülerinnen und Schülern die Ermittlung der durchschnittlichen Änderungsrate bekannt sein. Allerdings sollte die momentane Änderungsrate vorab noch nicht im Unterricht behandelt worden sein. Da in den Aufgabenteilen eine intuitive Vorstellung der momentanen Änderungsrate vermittelt wird, ist in der nachfolgenden Stunde eine mathematische Präzisierung erforderlich. Zudem sollte im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit auf die geometrische Interpretation der momentanen Änderungsrate eingegangen werden.

7 Das Warten hat ein Ende

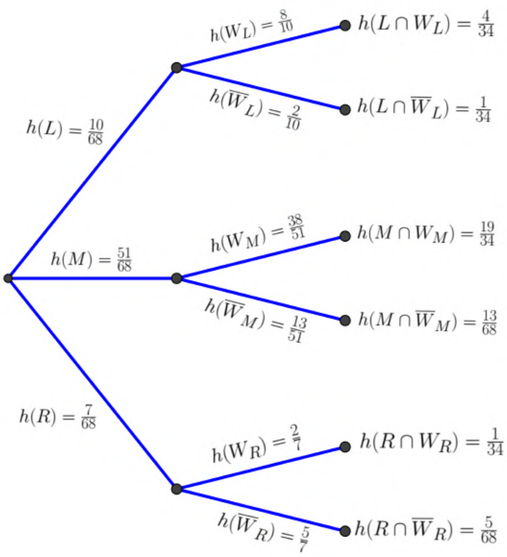
A1 Es wurde exemplarisch aus Richtung Kaiser-Wilhelm-Platz eine Datenerhebung werktags um 08:30 Uhr durchgeführt.

	Linke Spur	Mittlere Spur	Rechte Spur
Wartezeit 1. Ampelzyklus [s]	43	62, 60, 58, 54, 46, 44, 39, 32, 25, 8, 4	-
Wartezeit 2. Ampelzyklus [s]	69, 13, 10, 7	52 , 50, 48, 37, 35, 32, 26, 14, 11, 9, 4, 2	8
Wartezeit 3. Ampelzyklus [s]	61, 21	79, 77, 72, 59, 32, 19, 17, 7	4
Wartezeit 4. Ampelzyklus [s]	28	67, 56, 51, 48, 34, 23, 17	-
Durchschnittliche Wartezeit der stehenden Autos [s]	31,5	37,1	6
Anzahl der Autos, die stehen bleiben	8	38	2
Anzahl der Autos, die durchfahren	2	13	5
Anzahl der Autos insgesamt	10	51	7

Sofern ein Auto warten muss, dauert dies also durchschnittlich 34,9 Sekunden.

A2 Die relativen Häufigkeiten sind in der folgenden Abbildung eingetragen.

B1



B2 Für die linke Spur beträgt der Mittelwert $\overline{x}_{\text{links}} = \frac{8}{10} \cdot 31,5\text{s} = 25,2\text{s}$. Für die mittlere Spur beträgt der Mittelwert $\overline{x}_{\text{mitte}} = \frac{38}{51} \cdot 37,1\text{s} \approx 27,6\text{s}$. Für die rechte Spur beträgt der Mittelwert $\overline{x}_{\text{rechts}} = \frac{2}{7} \cdot 6\text{s} \approx 1,7\text{s}$.

Für die gesamte Straße ergibt sich die durchschnittliche Wartezeit aller Autos durch:

$$h(L) \cdot \overline{x}_{\text{links}} + h(M) \cdot \overline{x}_{\text{mitte}} + h(R) \cdot \overline{x}_{\text{rechts}} = \frac{10}{68} \cdot 25,2\text{s} + \frac{51}{68} \cdot 27,6\text{s} + \frac{7}{68} \cdot 1,7\text{s} \approx 24,6\text{s}.$$

C1 Für die Datenerhebung wurde exemplarisch die Bonner Str. aus Richtung Kaiser-Wilhelm-Platz ausgewählt. Insgesamt sind 28 Autos stehen geblieben und 25 konnten durchfahren, ohne stehen zu bleiben. Als durchschnittliche Wartezeit der stehenden Autos ergaben sich 9 Sekunden.

C2 Die relative Häufigkeit, dass ein Auto warten muss ist $h(W) = \frac{28}{53}$ und die durchschnittliche Wartezeit beträgt $h(W) \cdot 9\text{s} \approx 4,8\text{s}$.

C3 Die durchschnittliche Wartezeit pro Auto ist beim untersuchten Kreisverkehr mit ungefähr $4,8$ Sekunden deutlich geringer als bei der Kreuzung am Kaiser-Wilhelm-Platz mit ungefähr $24,6$ Sekunden. Offenbar stellt ein Kreisverkehr laut den gemessenen Daten tendenziell eine Verbesserung dar.

Didaktischer Kommentar:

In dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler die durchschnittlichen Wartezeiten an einer Ampelkreuzung und an einem Kreisverkehr ermitteln und diese miteinander vergleichen. Auf Grundlage der erhobenen Daten sollen die Schülerinnen und Schüler beurteilen, ob ein Kreisverkehr am Kaiser-Wilhelm-Platz die durchschnittliche Wartezeit der Autos verringern würde. Die Aufgabe richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Einführungsphase und beinhaltet typische Aufgaben des Inhaltsfelds Stochastik. Nachdem in Aufgabenteil **A** die relevanten Daten erhoben und die relativen Häufigkeiten berechnet wurden, sollen die Schülerinen und Schüler in Teilaufgabe **B2** das arithmetische Mittel der Wartezeit aller Autos berechnen. Dazu bieten sich zwei Möglichkeiten an: Zum einen kann das Mittel durch die Formel $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ berechnet werden, die den Schülerinnen und Schülern bekannt ist und die standardmäßig zur Berechnung des arithmetischen Mittels benutzt wird. Die zweite Möglichkeit, nämlich $h(L) \cdot \overline{x}_{links} + h(M) \cdot \overline{x}_{mitte} + h(R) \cdot \overline{x}_{rechts}$, ist mathematisch äquivalent, jedoch in der Durchführung schneller, da die Schülerinnen und Schüler die hierfür benötigten Werte in den vorherigen Teilaufgaben berechnet haben. Dabei sind $h(L)$, $h(M)$ und $h(R)$ die relativen Häufigkeiten, dass die Autos auf den entsprechenden Spuren fahren, die die Schülerinnen und Schüler in **B1** berechnet haben und $\overline{x}_{links}$, $\overline{x}_{mitte}$ und $\overline{x}_{rechts}$ die durchschnittlichen Wartezeiten der Autos auf den einzelnen Spuren. Bei der Besprechung der Teilaufgabe ist es sinnvoll, dass die Lehrperson die Schülerinnen und Schüler darauf hinweist, dass beide Möglichkeiten äquivalent verwendbar sind, der zweite Weg jedoch an dieser Stelle ökonomischer ist.

8 Klettern am Pythagerüst

Hinweis: Diese Aufgabe ist aufgrund von baulichen Veränderungen am Lernort aktuell nicht durchführbar.

A1 Die Kugel A_1 ist von der Kugel D_1 3,30 Meter entfernt. Bei den anderen Kugeln ist es wegen der Symmetrie des Klettergerüstes genau der gleiche Abstand.
Das ergibt folgende Koordinaten:
$D_1(1,15|1,15|3,30), D_2(1,15|-1,15|3,30), D_3(-1,15|-1,15|3,30), D_4(-1,15|1,15|3,30)$

A2 Wir bestimmen zunächst die Länge der Diagonalen $\overline{D_1D_3}$ und dann die Höhe h des Dreiecks D_1D_3F: $\overline{D_1D_3} = \sqrt{2,3^2+2,3^2} \approx 3,25$
Der gemessene Abstand beträgt $\overline{D_1F} = 1,70$ Meter.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt die Höhe $h = \sqrt{1,7^2 - (\frac{3,25}{2})^2} \approx 0,5$
Die Spitze F hat die Koordinaten $F(0|0|3,80)$.

A3 Wir bestimmen zunächst die Höhe h des Dreiecks $A_1B_1D_1$, die auf der Strecke $\overline{A_1D_1}$ startet und im Punkt B_1 endet. Wir bestimmen anschließend daraus die x- und y-Koordinaten des Punktes B_1.
Dazu messen wir zuerst die Länge der Strecke $\overline{B_1D_1} = 1,70$ Meter ab. Aus dem Satz des Pythagoras und der Länge der Strecke $\overline{A_1D_1} = 3,30$ Meter, die wir aus Teilaufgabe **A1** kennen, folgt die Höhe $h = \sqrt{1,7^2 - (\frac{3,3}{2})^2} \approx 0,41$.
Aus der Länge der Höhe h bestimmen wir nun die x- und y-Koordinaten des Punktes B_1. Es gilt x=y, weiter gilt mit dem Satz des Pythagoras $\sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2x^2} = 0,41$, also $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,41 \approx 0,29$.
Wir können jetzt die Koordinaten des Punktes B_1 ausgehend von Punkt A_1 angeben: $B_1(1,15+0,29|1,15+0,29|0+\frac{3,3}{2}) = (1,44|1,44|1,65)$.
Mithilfe von Symmetrie folgt:
$B_2(1,44|-1,44|1,65), B_3(-1,44|-1,44|1,65), B_4(-1,44|1,44|1,65)$.

A4 Wir berechnen zunächst die Länge der Strecke a von B_1 nach B_2 aus ihren Koordinaten. Wir berechnen dann die Höhe h des Dreiecks $B_1B_2C_1$, die auf der Strecke $\overline{B_1B_2}$ startet und in C_1 endet.
Es gilt $a = \overline{B_1B_2} = \sqrt{(1,44-1,44)^2 + (-1,44-1,44)^2 + (1,65-1,65)^2} = 2,88$.
Für die Höhe h folgt mit dem Satz des Pythagoras $h = \sqrt{1,7^2 - (\frac{2,88}{2})^2} \approx 0,90$
Somit hat der Punkt C_1 ausgehend vom Punkt A_1 die Koordinaten $C_1(1,44+0,90|1,44-1,44|0+1,65) = (2,34|0|1,65)$. Mithilfe von Symmetrie folgt:
$C_2(0|-2,34|1,65), C_3(-2,34|0|1,65), C_4(0|2,34|1,65)$.

B1 Die betragsmäßig längste Strecke ist $\overline{C_1C_3} = \overline{C_2C_4} = 4,68$. Andere nur wenig kürzere Strecken, die für die Schülerinnen und Schüler vielleicht offensichtlicher sind, sind $\overline{A_1D_3} = \overline{A_2D_4} = \overline{A_3D_1} = \overline{A_4D_2} = 4,63$ oder $\overline{A_iF} = 4,13$ für $i = 1,\dots,4$.

C1 Mit F als Stützvektor und $\overrightarrow{D_1F}$ und $\overrightarrow{D_2F}$ als Spannvektoren ergibt sich die Ebenengleichung $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,80 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1,15 \\ 1,15 \\ -0,50 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1,15 \\ -1,15 \\ -0,50 \end{pmatrix}$
Analog dazu:

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,80 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1,15 \\ -1,15 \\ -0,50 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1,15 \\ -1,15 \\ -0,50 \end{pmatrix}$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,80 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1,15 \\ -1,15 \\ -0,50 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1,15 \\ 1,15 \\ -0,50 \end{pmatrix}$$
$$E_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,80 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1,15 \\ 1,15 \\ -0,50 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1,15 \\ 1,15 \\ -0,50 \end{pmatrix}$$

C2 Die Ebenengleichung des Sandbodens in Koordinatenform ist $E_S : z = 0$. Hier hinein setzen wir die dritte Zeile der E_i ein und erhält: $3,8 - 0,5s - 0,5t = 0 \Leftrightarrow t = 7,6 - s$. Setzen wir dies in die Gleichungen ein, so erhalten wir:

in $E_1 : g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8,74 \\ -8,74 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2,30 \\ 0 \end{pmatrix}$

in $E_2 : g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -8,74 \\ -8,74 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2,30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

in $E_3 : g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -8,74 \\ 8,74 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2,30 \\ 0 \end{pmatrix}$

in $E_4 : g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8,74 \\ 8,74 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2,30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

C3 Die unteren Eckpunkte der Pyramide haben die Koordinaten $S_1(8,74|8,74|0)$, $S_2(8,74|-8,74|0)$, $S_3(-8,74|-8,74|0)$, $S_4(-8,74|8,74|0)$. Nun ist der größte Abstand zwischen je zwei Kugeln $\overline{S_1S_3} = \overline{S_2S_4} = 24,72$. Allerdings ist dies auf dem Boden und wird somit nicht geklettert.

C4 Nein, für diese Pyramide wäre nicht genug Platz, da andere Spielgeräte im Umkreis von weniger als acht Metern stehen.

Didaktischer Kommentar:

In dieser Aufgabe modellieren die Schülerinnen und Schüler ein Klettergerüst. Zur Bestimmung der Koordinaten von Punkten verwenden sie den Satz des Pythagoras und nutzen die Symmetrie des Klettergerüstes. Mithilfe von Ebenen und deren Schnittgeraden entwerfen sie eine Erweiterung des Klettergerüsts zu einer Pyramide und prüfen, ob für diese Erweiterung genügend Platz auf dem Spielplatz wäre.

Auf dem Spielplatz am Michaelsplatz steht ein Klettergerüst aus Kugeln und Stangen, zwischen denen Seile gespannt sind. Das Klettergerüst hat viele Symmetrieachsen. Um den Spielplatz herum stehen Sitzbänke, auf denen die Schülerinnen und Schüler sitzen und arbeiten können. Um Messungen durchzuführen, müssen die Schülerinnen und Schüler auf dem Klettergerüst klettern. Um die Verletzungsgefahr dabei möglichst klein zu halten, sollten die Messungen mit einem Maßband und nicht mit einem Zollstock durchgeführt werden. Alternativ können die Schülerinnen und Schüler die Abstände mit einer Kordel bestimmen, die sie am Boden mit dem Zollstock abmessen.

Um diesen Spaziergang vollständig bearbeiten zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler Koordinaten im Raum bestimmen, Abstände berechnen, Ebenengleichungen aufstellen und deren Schnittgeraden bestimmen können. Daher richtet sich der Spaziergang primär an Schülerinnen und Schüler der Qualifikationsphase. Da der Boden mit der Ebenengleichung $z = 0$ eine einfache Form hat, kann der Spaziergang bereits zu Beginn der Unterrichtsreihe zu Lagebeziehungen von Ebenen durchgeführt werden.

Da die Themen Vektoren als Punkte im Raum, das Rechnen mit Vektoren und der Betrag von Vektoren als Länge von Vektoren schon in der Einführungsphase bearbeitet werden, können die Aufgabenteile **A** und **B** schon von Schülerinnen und Schüler der Einführungsphase bearbeitet und gelöst werden. Der Spaziergang bietet sich am Ende der Einheit zur analytischen Geometrie der Einführungsphase an. Dadurch, dass er zu diesem Zeitpunkt noch nicht vollständig durchgeführt werden kann, stellt er einen Ausblick auf die Inhalte der Qualifikationsphase dar.

In der Nachbesprechung des Spaziergangs im Unterricht sollte thematisiert werden, wie die Symmetrie des Klettergerüstes genutzt werden konnte. Außerdem können alternative Lösungswege für Aufgabenteil **C** durch Modellierung mit Geraden und Berechnung von Durchstoßpunkten angesprochen werden.

9 Schaukeln mit Sinus und Co

Hinweis: Diese Aufgabe ist aufgrund von baulichen Veränderungen am Lernort aktuell nicht durchführbar.

Auf dem Spielplatz befinden sich zwei Schaukelpaare mit verschiedenen Längen. Für die Musterlösung wurde eine der Schaukeln mit Seitenlänge 1,84 m verwendet.

A1 Die gemessenen Werte betragen:

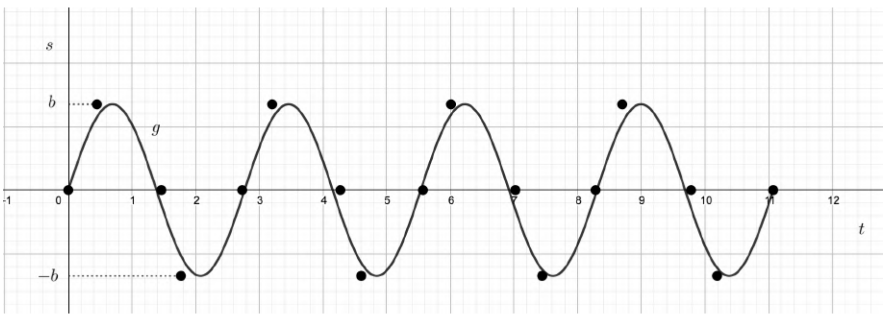
- Zeitpunkte am Ausgangspunkt (Ruhelage): 0 s - 1,46 s - 2,73 s - 4,27 s - 5,57 s - 7,02 s - 8,28 s - 9,78 s - 11,07 s
- Zeitpunkte am vordersten Punkt: 0,45 s - 3,2 s - 6,01 s - 8,7 s
- Zeitpunkte am hintersten Punkt: 1,77 s - 4,6 s - 7,44 s - 10,19 s

A2 Für α wurde ein Winkel von 48° gemessen. Zusammen mit dem rechten Winkel folgt dann aus dem Innenwinkelsatz $\beta = 42°$.

A3 Der Radius r der Schaukel beträgt $1,84$ m. Für den Teil des Kreisbogens b gilt:

$$b = 2\pi r \frac{\beta}{360°} = 2\pi \cdot 1,84\text{m} \cdot \frac{42°}{360°} \approx 1,35\text{m}.$$

A4 In der Abbildung wurden die Werte aus Teilaufgabe **A1** eingetragen und durch die Funktion g aus **B2** mit $g(x) = 1,35 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right)$ approximiert.

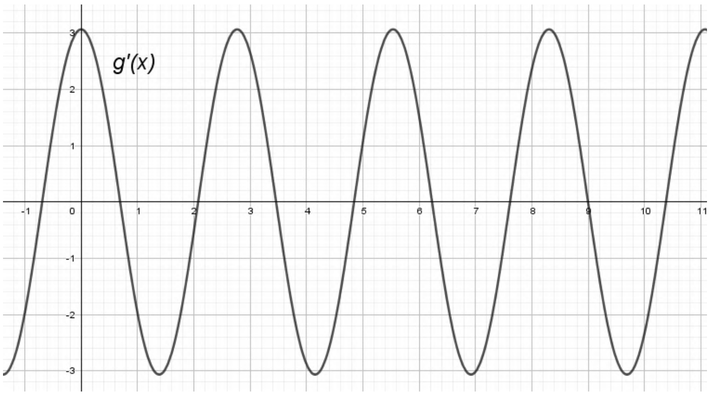


B1 Folgende Eigenschaften könnten genannt werden: Die Sinusfunktion ist periodisch mit Periode 2π. Der Bildbereich ist $[-1; 1]$. Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Cosinusfunktion. Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

B2 Die Amplitude a der Schwingung beträgt 1,35 Meter.
Für c gilt: $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,7675}$, wobei für $T = 2,7675$ die durchschnittliche Periodendauer der vier Schaukeldurchgänge eingesetzt wurde.
Somit ergibt sich:

$$g(x) = 1,35 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right).$$

C1 Die skizzierte Ableitung ähnelt einer Cosinusfunktion.



C2 Die Ableitung gibt die momentane Geschwindigkeit des Schaukelbretts an.

C3 Die maximale Geschwindigkeit kann als Hochpunkt der Ableitung bestimmt werden. Für die Ableitung von g gilt:

$$g'(x) = 1,35 \cdot \frac{2\pi}{2,7675} \cos\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right)$$

Die zweite Ableitung lautet:

$$g''(x) = 1,35 \cdot \left(\frac{2\pi}{2,7675}\right)^2 \cdot \left(-\sin\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right)\right)$$

Die dritte Ableitung lautet:

$$g'''(x) = 1,35 \cdot \left(\frac{2\pi}{2,7675}\right)^3 \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{2,7675}x\right)\right)$$

Um Extremstellen von g' zu ermitteln, müssen wir die Nullstellen der zweiten Ableitung untersuchen. Offensichtlich ist $g''(x) = 0$ genau dann, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{2,7675}{2}$ ist, also an den Stellen, $x = 0$, $x = \frac{1}{2} \cdot 2,7675$, $x = 2,7675$, $x = \frac{3}{2} \cdot 2,7675$ usw.
Wenn wir diese Stellen in die dritte Ableitung einsetzen, dann stellen wir fest, dass an den Stellen $x = 0$, $x = 2,7675$, $x = 2 \cdot 2,7675$ usw. jeweils ein negativer Wert der dritten Ableitung vorliegt. Es handelt sich hier also um Hochpunkte von g'. An den Stellen $x = \frac{1}{2} \cdot 2,7675$, $x = \frac{3}{2} \cdot 2,7675$, $x = \frac{5}{2} \cdot 2,7675$ usw. ist die dritte Ableitung positiv. Es liegen somit Tiefpunkte von g' vor. Man muss sich bewusst machen, dass die Geschwindigkeit beim Schwingen nach hinten negativ angegeben wird. Einsetzen der Extremstellen in g' ergibt die jeweilige Maximalgeschwindigkeit von $\pm 1,35 \cdot \frac{2\pi}{2,7675} \approx \pm 3,06$ Metern pro Sekunde.
Alle Stellen, an denen diese Geschwindigkeit erreicht wird, sind die Nullstellen von g, also die Stellen, wo der Schaukelnde durch die Ruhelage schwingt (mit Auslenkung $\beta = 0°$).

Didaktischer Kommentar:

Die Aufgabe ist für Schülerinnen und Schüler des Grund- und Leistungskurses der Qualifikationsphase konzipiert und lässt sich in eine Unterrichtsreihe des Inhaltsfeldes Analysis mit dem Schwerpunkt Differentialrechnung einbetten.

In Teilaufgabe **A1** müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst verschiedene Werte messen. In Teilaufgabe **A2** müssen die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse über die Innenwinkel von Dreiecken anwenden, um den Winkel der maximalen Schaukelschwingung nach vorne zu ermitteln. In Teilaufgabe **A3** soll die Länge des Kreisbogens zwischen dem Ausgangspunkt und dem vordersten Punkt ermittelt werden. Die hierfür benötigten Kenntnisse sollten aus der Sekundarstufe 1 bekannt sein. In Teilaufgabe **A4** soll die Schaukelschwingung in ein Zeit-Bogenlänge-Diagramm gezeichnet werden. Anhand der Messungen ihrer Schaukelbewegung skizzieren die Schülerinnen und Schüler eine Sinusfunktion.

Teilaufgabe **B1** dient als Wiederholung der Eigenschaften der allgemeinen Sinusfunktion. In Teilaufgabe **B2** approximieren die Schülerinnen und Schüler die gezeichnete Funktion durch eine Transformation der allgemeinen Sinusfunktion.

In Teilaufgabe **C1** wird das Zeichnen einer Ableitungsfunktion geübt und den Schülerinnen und Schülern wird nochmals in Erinnerung gerufen, dass die Cosinusfunktion die Ableitung der Sinusfunktion ist. Dies sollte aus der Einführungsphase bereits bekannt sein. In Teilaufgabe **C2** wird das Verständnis der Ableitung im Sachzusammenhang als Geschwindigkeit vertieft. In Teilaufgabe **C3** soll die maximale Geschwindigkeit mithilfe eines Hochpunktes der Ableitung errechnet werden. Für diese Teilaufgabe wird die Kettenregel benötigt.

10 Pyramiden - Viel Spat mit Vektoren

Alle Angaben in dieser Lösung haben die Einheit Meter.

A1 Die gesuchten Koordinaten lauten: $A(0|0|0)$, $B(18,03|0|0)$ und $C(11,32|10,34|0)$.

Die Gleichung der Geraden durch A und B lautet $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 18,03 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Gleichung der Geraden durch A und C lautet $g_{AC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 11,32 \\ 10,34 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A2 Wir verwenden beispielhaft den Punkt $A_s(0,37|0,19|0,16)$ auf der Geraden durch A und S. Die Gleichung der Ebene durch A, B und S lautet daher:

$$E_{ABS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0,37 \\ 0,19 \\ 0,16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18,03 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A3 Wir verwenden beispielhaft den Punkt $C_s(11,31|9,89|0,5)$ auf der Geraden durch C und S. Die Gleichung der Geraden durch A und C lautet $g_{AC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11,32 \\ 10,34 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -0,01 \\ -0,45 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

A4 Mithilfe der Ebenengleichung in Parameterform ergibt sich der Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0,37 \\ 0,19 \\ 0,16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18,03 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 2,88 \\ -3,43 \end{pmatrix}$$

Da A in der Ebene liegt, lautet die Koordinatenform der Ebene:
$E_{ABS}: 2,88x_2 - 3,43x_3 = 0$

Durch Einsetzen von g_{CS} in E_{ABS} erhält man $s \approx 9,89$ und somit $S(11,22|5,89|4,95)$. Die Pyramide ist also etwa $4,95$ Meter hoch.

B1 Folgende Längen lassen sich bestimmen:

$$\begin{array}{ll}
|\overrightarrow{AB}| = 18,03 & |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{10,33^2 + 5,89^2 + 4,95^2} \approx 12,88 \\
|\overrightarrow{BC}| \approx 12,32 & |\overrightarrow{BS}| = \sqrt{(18,03 - 11,22)^2 + 5,89^2 + 4,95^2} \approx 10,27 \\
|\overrightarrow{AC}| \approx 15,33 & |\overrightarrow{CS}| = \sqrt{(11,32 - 11,22)^2 + (10,34 - 5,89)^2 + 4,95^2} \approx 6,66
\end{array}$$

B2 Das Volumen lässt sich mit folgender Formel bestimmen:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AS}|}{6} = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 18,03 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11,32 \\ 10,34 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 11,22 \\ 5,89 \\ 4,95 \end{pmatrix} \right|}{6} = 153,8$$

Das Volumen der Pyramide beträgt also etwa $153,8$ Kubikmeter. Das Bauwerk ist keine vollständige Pyramide und füllt vielleicht nur etwa die Hälfte des Volumens tatsächlich aus.

Didaktischer Kommentar:

Diese Aufgabe richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Qualifikationsphase. Zur erfolgreichen Bearbeitung sollten die Schülerinnen und Schüler sicher im Umgang mit Geraden und Ebenen in ihren verschiedenen Darstellungsformen sein.

Ziel des Aufgabenteils **A** ist es, mithilfe von Modellierungen die Höhe der Pyramide zu bestimmen. Dazu sollen verschiedene Punkte und Strecken gemessen, Geraden- und Ebenengleichungen aufgestellt sowie Schnittpunkte zwischen Geraden und Ebenen berechnet werden.
In Aufgabenteil **B** soll anschließend unter Verwendung des Spatproduktes das Volumen der Pyramide berechnet werden.

Die Pyramide befindet sich auf einer großen Wiese vor dem Kreishaus. Diese ist frei zugänglich und durch eine Hecke von Bürgersteig und Straße getrennt. Die Pyramide lässt sich gut vermessen, da sie nur teilweise ausgefüllt ist und die Schülerinnen und Schüler sich zwischen den Teilen der Pyramide bewegen und dort Messungen durchführen können.

11 Steigungen überwinden - barrierefrei mit Sinus und Cosinus

A1 Die Höhe der Absätze beträgt jeweils 0,14 Meter. Eine Stufe ist 2,53 Meter lang und hat einen Steigungswinkel von 5 Grad. Mit der Schrägen gewinnt man pro Stufe also zusätzlich $\sin(5°) \cdot 2,53 \approx 0,22$ Meter Höhe. Die Treppe hat 11 Stufen, ist also $11 \cdot 0,36 = 3,96$ Meter hoch.

A2 Der Abstand vom untersten Treppenabsatz bis zum Punkt T_u beträgt $0,70$ Meter. Um die x-Koordinate des Punktes T_u zu berechnen, kann man die trigonometrischen Funktionen verwenden. Δx sei die Verschiebung des Punktes T_u in x-Richtung, ausgehend vom Koordinatenursprung. Dann gilt: $\cos(5°) = \frac{\Delta x}{2,53 \cdot 11} \Leftrightarrow \Delta x = \cos(5°) \cdot 2,53 \cdot 11$.
Mit den Ergebnissen aus **A1** folgt: $T_u = (0,7 + 11 \cdot \cos(5°) \cdot 2,53|0| - 3,96) \approx (28,42|0| - 3,96)$.

A3 Eine Gleichung der Ebene, in der die Rampe liegen würde, ist gegeben durch:
$$E_T : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 28,42 \\ 0 \\ -3,96 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren der Ebenen.
Der Normalenvektor der Ebene E_T ist $\vec{n_T} = \begin{pmatrix} 28,42 \\ 0 \\ -3,96 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,96 \\ 0 \\ 28,42 \end{pmatrix}$. Die untere Ebene hat die Gleichung $z = -3,96$, also den Normalenvektor $\vec{n_u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den Steigungswinkel ergibt sich $\alpha = \cos^{-1}(\frac{|0+0+28,42|}{\sqrt{3,96^2 + 28,42^2} \cdot 1}) \approx 7,93°$.

B1 Die obere Schräge schließt mit der Treppe einen 90° Winkel ein, ist 28,65 Meter lang und hat einen Steigungswinkel von 3°.
Damit ergibt sich $S_o = (0|\cos(3°) \cdot 28,65| - \sin(3°) \cdot 28,65) \approx (0|28,72| - 1,50)$.

B2 Die gemessene Länge der Strecke $\overline{S_oS_m}$ beträgt $d = 0,62$ Meter und der Winkel $\angle T_oS_oS_m$ beträgt $\alpha = 100°$.
Mithilfe der trigonometrischen Funktionen ergibt sich $\Delta x = \sin(80°) \cdot 0,62 \approx 0,61$ und $\Delta y = \cos(80°) \cdot 0,62 \approx 0,11$ und damit $S_m \approx (0 + 0,61|28,72 + 0,11| - 1,50) \approx (0,61|28,83| - 1,50)$.

Für die Koordinaten des Punktes S_u wird zunächst die Länge der Strecke $\overline{T_uS_u}$ gemessen. Sie beträgt $d = 3,10$ Meter. Der Winkel $\angle T_oT_uS_u$ hat eine Größe von 135°.
Damit ergibt sich mithilfe der trigonometrischen Funktionen $\Delta x = \sin(45°) \cdot 3,1 \approx 2,19$ und $\Delta y = \cos(45°) \cdot 3,1 \approx 2,19$ und damit $S_u \approx (28,42 + 2,19|0 + 2,19| - 3,96) \approx (30,61|2,19| - 3,96)$.

B3 Die Gerade durch T_o und S_o ist die untere Kante der oberen Rampe. Eine Geradengleichung lautet:
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 28,72 \\ -1,50 \end{pmatrix}$$
T_o liegt natürlich in der Ebene E_T aus Teilaufgabe **A3**. Wir rechnen nun nach, dass S_o nicht in der Ebene E_T liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 28,72 \\ -1,50 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 28,42 \\ 0 \\ -3,96 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

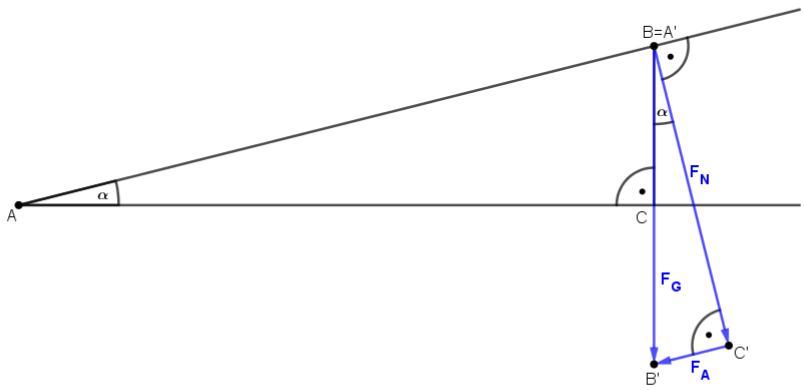
Dieses Gleichungssystem besitzt offensichtlich keine Lösung. Da S_o nicht in der Ebene liegt, liegt auch die Gerade durch S_o nicht in der Ebene. Die Gerade schneidet die Ebene im Punkt T_o.

B4 $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,61 \\ 28,83 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 30 \\ -26,64 \\ -2,46 \end{pmatrix}$

Zur Berechnung des Steigungswinkels wird zunächst der Normalenvektor $\vec{n}$ derjenigen Ebene gesucht, an welcher die Rampe ansetzt (Das ist genau die Ebene, auf welcher die Punkte T_u und S_u liegen). Da diese Ebene parallel zur xy-Ebene ist, lautet der Normalenvektor der gesuchten Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 30 \\ -26,64 \\ -2,46 \end{pmatrix}$ der Geradengleichung h lässt sich der Steigungswinkel α wie folgt berechnen: $\alpha = \sin^{-1}(\frac{|0+0-2,46|}{\sqrt{30^2+26,64^2+2,46^2}\cdot 1}) \approx \sin^{-1}(\frac{2,46}{40,1963}) \approx 3,51°$.

C1 Für die Hangabtriebskraft gilt: $F_A = \sin(\alpha) \cdot F_G$.
Zur Herleitung dieser Formel wurde ausgenutzt, dass die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ ähnlich zueinander sind, da sie in 2 Winkeln übereinstimmen, dem rechten Winkel und dem Winkel α. Begründung: Die Winkel bei B und B' sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und somit gleich groß. Daraus folgt unter Ausnutzung des rechten Winkels, dass bei A und A' der gleiche Winkel α vorliegt.



Der Steigungswinkel der Rampe aus **A3** beträgt $7,93°$. Damit gilt $F_A \approx 121,8$ Newton.
Die obere Rampe hat einen Steigungswinkel von $3°$. Damit gilt $F_A \approx 46,2$ Newton. Für die untere Rampe haben wir in **C1** einen Steigungswinkel von $3,51°$ errechnet. Damit gilt $F_A \approx 54,1$ Newton.

Didaktischer Kommentar:

In dieser Aufgabe modellieren die Schülerinnen und Schüler der Qualifikationsphase Rampen mithilfe von Geraden und Ebenen. Dabei messen und berechnen sie Steigungswinkel und sollen ein Gefühl dafür bekommen, was Steigung bedeutet.

Der Spaziergang ist in drei thematische Abschnitte unterteilt. Aufgabenteil **A** beschäftigt sich mit der Treppe, Aufgabenteil **B** mit den Rampen und Aufgabenteil **C** mit der Bedeutung von Steigung.

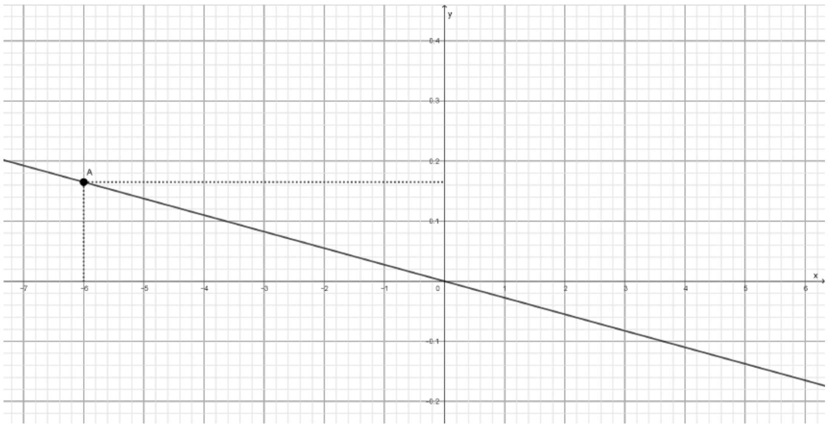
Für die Einbettung dieses Spaziergangs in die Unterrichtsreihe zur analytischen Geometrie sollten die Schülerinnen und Schüler bereits gut mit folgenden Themengebieten vertraut sein:

- Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck
- Gleichungen von Ebenen im $\mathbb{R}^3$ in Parameter- und in Gleichungsform
- Normalenvektor einer Ebene und Kreuzprodukt
- Winkel, den zwei Ebenen miteinander einschließen
- Geradengleichungen im $\mathbb{R}^3$ in Parameterform
- Lösen linearer Gleichungssysteme

Es handelt sich um einen thematisch anspruchsvollen Spaziergang. Natürlich ist es möglich, sich auf einzelne Teilaufgaben zu beschränken. Dabei sind verschiedene Auswahlen möglich.

12 Crescendo am Marktplatz

A1 Es könnte zum Beispiel der Punkt $A(-6|0,165)$ gemessen werden. Die Werte ergeben sich, wenn man die Höhe einer Stufe und die Länge eines Stufensegments misst.



A2 Die allgemeine Form der Parameterform einer Geraden setzt sich zusammen aus einem Ortsvektor $\vec{a}$, einem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden und einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.
Die allgemeine Geradengleichung in Parameterform lautet:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

In unserem Fall:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0,165-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0,165 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0,165 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0,165 \end{pmatrix}$$

A3 Die Steigung der Geraden beträgt $\frac{0,165}{-6} = -0,0275$. Die prozentuale Steigung beträgt demnach $-2,75$ Prozent. Für den Steigungswinkel gilt $\tan(\alpha) = -0,0275$ und damit $\alpha \approx -1,58$ Grad. Der Marktplatz ist abschüssig und verläuft also abwärts mit einem Winkel von etwa $1,58$ Grad.

B1 Mögliche Punkte: $N = (0/0,165), M = (-0,3/0,33)$

$$h : \vec{x} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,165 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,165 \end{pmatrix}$$

B2 Die Formel zur Berechnung des Schnittwinkels γ zweier Geraden lautet:

$$\cos(\gamma) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \Rightarrow \quad \gamma = cos^{-1}\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right).$$

Zuerst muss das Skalarprodukt der Richtungsvektoren berechnet werden:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0,165 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,165 \end{pmatrix} = -6 \cdot (-0,3) + 0,165 \cdot 0,165 \approx 1,827 = |\vec{u} \cdot \vec{v}|$$

Daraufhin wird die Länge der Richtungsvektoren berechnet:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2 + 0,165^2} \approx 6,002 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{(-0,3)^2 + 0,165^2} \approx 0,34$$

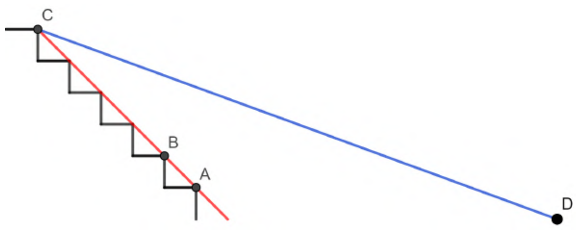
Diese Werte können in die Formel eingesetzt werden. Daraus folgt:

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1,827}{6,002 \cdot 0,34}\right) \approx \cos^{-1}(0,895) \approx 26,59°$$

Der Schnittwinkel der Geraden g und h beträgt $26,59$ Grad.

B3 Nein, eine solche Rampe wäre zu steil für Rollstuhlfahrende. Es bestünde die Gefahr, dass Fahrende nach hinten kippen oder ihnen schlicht die Kraft fehlt, die Rampe zu befahren.

B4 Um diese Entscheidung treffen zu können, muss berechnet werden, wie lang die Rampe bei der angegebenen Steigung würde und wo diese dementsprechend enden würde. Es muss nicht überprüft werden, ob sich die beiden Geraden (Marktplatz und Rampe) wirklich schneiden, da schon bekannt ist, dass sie eine unterschiedliche Steigung haben. Somit können sie nicht parallel sein und es ergibt sich genau ein Schnittpunkt.



Durch die gegebene Steigung ergeben sich zwei Punkte der zu modellierenden Geraden:

$$C = (-2,1/1,32) \text{ und } D = (-2,1+100/1,32-6) = (97,9/-4,68)$$

So lässt sich die Geradengleichung in Parameterform aufstellen, die den Verlauf der neuen Rampe modelliert:

$$i : \vec{x} = \vec{c} + \mu \cdot \vec{w} \quad \text{mit } \vec{c} = \begin{pmatrix} -2,1 \\ 1,32 \end{pmatrix} \text{und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ -6 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow i : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2,1 \\ 1,32 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Um den Schnittpunkt der Geraden g und i zu ermitteln, müssen die Geradengleichungen zuerst gleichgesetzt werden:

$$\vec{a} + \lambda\vec{v} = \vec{c} + \mu\vec{w}$$

Es ergeben sich die Gleichungen:

$$-6\lambda = -2,1 + 100\mu$$
$$0,165\lambda = 1,32 - 6\mu$$

Aus den Gleichungen folgt $\mu \approx 0,39$ und $\lambda \approx -6,15$. Um den Schnittpunkt zu berechnen, wird der Wert für λ in die Geradengleichung von g eingesetzt:

$$\vec{s} = -6,15 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0,165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36,9 \\ -1,02 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt S hätte die Koordinaten $S = (36,9/-1,02)$. Die Länge der Rampe von ihrem Anfangspunkt C bis zum Schnittpunkt S mit dem Marktplatz ist die Länge des Vektors $\vec{CS}$:

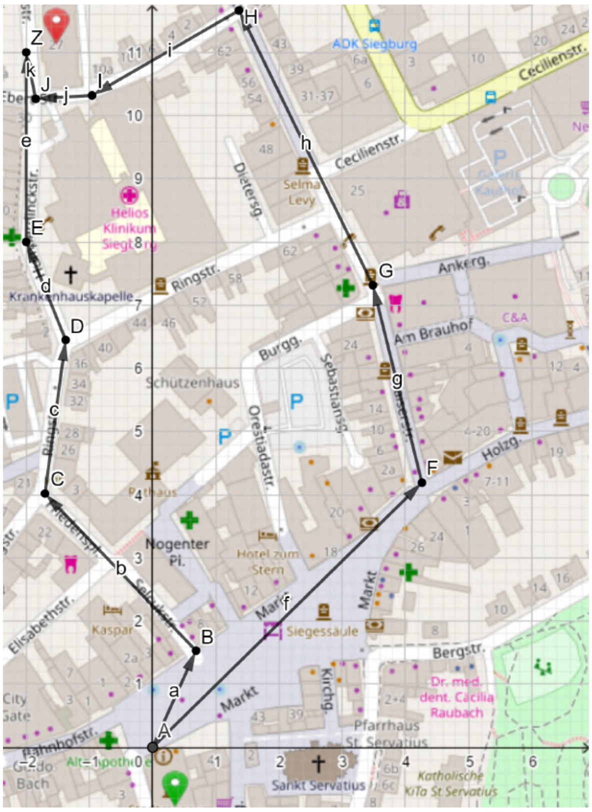
$$|\vec{CS}| = |\begin{pmatrix} 36,9+2,1 \\ -1,02-1,32 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} 39 \\ -2,34 \end{pmatrix}| = \sqrt{39^2 + 2,34^2} \approx 39,07$$

Die Rampe wäre etwa 39,07 Meter lang. So viel Platz ist allerdings an der rechten Seite des Museums nicht. Die Rampe würde nicht nur eine Straße kreuzen, sondern sogar bis hinter die Häuserfront der nebenstehenden Gebäude ragen.

B5 Man könnte die Rampe verwirklichen, indem man sie beispielsweise an der Gebäudewand entlang um das Stadtmuseum herum führt. Außerdem bestünde die Möglichkeit, die Rampe in Zickzackform zu bauen.

C1 Die mittlere Schrittgeschwindigkeit kann berechnet werden, indem eine Strecke abgemessen wird und daraufhin mithilfe der Uhr gemessen wird, wie lange man braucht, um die Strecke zurückzulegen.
Die durchschnittliche Schrittgeschwindigkeit variiert unter den Schülerinnen und Schülern. Ein realistischer Wert liegt zwischen 3,5 und 5 Kilometern pro Stunde.

C2 Folgende zwei Wege könnten eingezeichnet werden:



Bildnachweis: © OpenStreetMap – Mitwirkende (www.openstreetmap.org)

C3 $A = (0/0)$, $B = (24,5/52,5)$, $C = (-59,5/140)$, $D = (-49/227,5)$,
$E = (-70/280)$, $F = (150,5/147)$, $G = (122,5/255,5)$, $H = (49/409,5)$,
$I = (-35/360,5)$, $J = (-63/357)$, $Z = (-70/385)$

Aus den abgeschätzten Punkten lassen sich die gesuchten Vektoren bestimmen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 24,5 \\ 52,5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -84 \\ 87,5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 10,5 \\ 87,5 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -21 \\ 52,5 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 105 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 150,5 \\ 147 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} -28 \\ 108,5 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -73,5 \\ 154 \end{pmatrix} \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} -84 \\ -49 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} -28 \\ -3,5 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} -7 \\ 28 \end{pmatrix}$$

C4 Der Weg 1 (links) hat die Länge

$$\begin{aligned} |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| + |\vec{e}| = & \sqrt{24,5^2 + 52,5^2} + \sqrt{84^2 + 87,5^2} + \sqrt{10,5^2 + 87,5^2} \\ & + \sqrt{21^2 + 52,5^2} + \sqrt{0^2 + 105^2} \approx 428,9 \end{aligned}$$

Der Weg ist also 428,9 Meter lang. Der Weg 2 (rechts) hat die Länge

$$\begin{aligned} |\vec{f}| + |\vec{g}| + |\vec{h}| + |\vec{i}| + |\vec{j}| + |\vec{k}| = & \sqrt{150,5^2 + 147^2} + \sqrt{28^2 + 108,5^2} + \sqrt{73,5^2 + 154^2} \\ & + \sqrt{84^2 + 49^2} + \sqrt{28^2 + 3,5^2} + \sqrt{7^2 + 28^2} \approx 647,4 \end{aligned}$$

Der Weg ist also 647,4 Meter lang. Der linke Weg (Weg 1) ist der kürzere.

Didaktischer Kommentar:

Innerhalb des Inhaltsfeldes analytische Geometrie sollen sich die Schülerinnen und Schüler in dieser Aufgabe mit Geraden und Vektorzügen beschäftigen.

Voraussetzung für die Bearbeitung der Aufgabe ist, dass die Schülerinnen und Schüler die Begriffe Vektorzug, Parameterform, Schnittwinkel und Steigungswinkel sowie prozentuale Steigung aus dem Unterricht kennen und entsprechende Gleichungen selbstständig aufstellen können.

Im Aufgabenteil **A** sollen die Schülerinnen und Schüler einfache Berechnungen mit Geraden durchführen. Im Aufgabenteil **B** werden Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden thematisiert. Außerdem sollen die Schülerinnen und Schüler durch die Wahl des Sachkontextes für das Thema Inklusion sensibilisiert werden. Im Aufgabenteil **C** wird thematisiert, in welchen Bereichen des Alltags Mathematik verwendet wird. In Zeiten, in denen die Navigation durch Internetdienste für die Schülerinnen und Schüler selbstverständlich ist und gleichzeitig viele von ihnen der Mathematik den Vorwurf machen, sie sei nicht alltagsrelevant, ist es besonders wichtig aufzuzeigen, in welchen Bereichen Mathematik enthalten ist, ohne dass sie als solche wahrgenommen wird.

Im Anschluss an diese Aufgabe bietet es sich an, das Thema Ebenengleichungen einzuführen.

Da die Schülerinnen und Schüler in Aufgabenteil **C** durch die Innenstadt von Siegburg spazieren, ist es hilfreich, wenn mehrere Aufsichtspersonen vor Ort sind.