MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE IN

SIEGBURG

50°47'47,3"N 7°12'40,1"O

Lernheft für die Sekundarstufen I+II

hausdorff center for mathematics

UNIVERSITÄT BONN

Grußwort

Liebe Schülerinnen und Schüler, liebe Lehrerinnen und Lehrer,

vor euch liegt ein kleines Heft, das mit sehr viel Liebe zum Detail von Lehramtsstudierenden der Mathematik an der Universität Bonn entworfen und gestaltet wurde. Sie möchten euch dazu einladen, Mathematik im Alltag zu entdecken und dabei die Freude an neuen Erkenntnissen und tieferem Verständnis zu erleben, die auch die Forscher*innen der Universität Bonn immer wieder beflügelt. Die Spaziergänge sollen das an euch gerichtete und vielfältige Wissenschaftsangebot im Rahmen der jungen Uni, wie beispielsweise die Kinderuni, die Wissenschaftsrallyes oder auch das Frühstudium (FFF), weiter ergänzen. Wer sich mit dieser Broschüre auf den Weg macht, der wird, davon bin ich überzeugt, in Zukunft seine Umwelt mit anderen Augen betrachten und vielleicht auch eine ganz neue Einstellung zur Mathematik entwickeln.

Wozu kann man sie nicht alles brauchen! Was hatten Menschen vor Jahrtausenden nicht schon für Ideen, um die ihnen gestellten Aufgaben mithilfe mathematischer Zusammenhänge zu lösen! Und was sind das doch für spannende Regeln, die sich als mathematische Formeln beschreiben lassen, denen die Natur in so vielen Fällen folgt! Und warum sie dies tut, das erfahrt ihr nebenbei auch noch.

So lädt dieses kleine Heft euch zur Beschäftigung mit der Mathematik ein. Ihr werdet unter anderem architektonische Fragestellungen beantworten, tolle Orte am Michaelsberg erkunden, Verkehrsknotenpunkte unter die Lupe nehmen und stadtplanerisch tätig werden. Dass ihr zusätzlich in der schönen Stadt Siegburg so manche Details entdecken werdet, an denen ihr wahrscheinlich, wie auch ich bisher, achtlos vorbeigegangen seid, ist nur ein weiterer schöner Nebeneffekt.
Ich wünsche euch viel Spaß dabei.

Prof. Dr. Karin Holm-Müller
Prorektorin für Studium und Lehre

Liebe Schülerinnen und Schüler, liebe Lehrerinnen und Lehrer,

Mathematik lässt sich erleben und entdecken – überall um uns herum! Mit dem Projekt „Mathematische Spaziergänge in Siegburg" möchten wir Sie dazu ermuntern, Mathematik auch außerhalb des Klassenzimmers zu betreiben. Sie erhalten die Chance, das in der Schule gelernte Wissen an mathematischen Fragestellungen anzuwenden und zu festigen, die eng mit der Architektur und der Natur der Stadt Siegburg verbunden sind. Uns liegt es am Herzen zu zeigen, dass Mathematik überall zu finden ist und diese uns draußen mit spannenden Fragestellungen fesseln kann.

An der Universität Bonn sind im Rahmen von Bachelorarbeiten im Lehramtsfach Mathematik die Aufgaben für die Mathematischen Spaziergänge entstanden. Die Lehrerinnen und Lehrer von morgen machen sich also schon heute Gedanken, wie man den Schulunterricht bereichern kann. Wir schicken euch an viele Orte. Überall werdet ihr messen, zählen und rechnen. Die Aufgaben sind so konzipiert, dass man sie nur vor Ort lösen kann, also abseits des Klassenzimmers. Und das ist auch unser Ziel: Mathematik soll draußen in Siegburg erfahren werden.

Ein paar Dinge sind uns wichtig:

- Da ihr viele Messungen durchführt, ist bei allen Rechnungen das Runden explizit erlaubt. Anders als sonst geht es hier nicht darum, Ergebnisse ganz exakt (z.B. in Abhängigkeit eines Wurzelausdrucks oder von π) anzugeben. Ihr dürft eure Zwischenergebnisse runden und mit den gerundeten Werten weiterrechnen. Natürlich sollt ihr alle nötigen Formeln exakt anwenden.
- Die meisten Aufgaben sind so gestaltet, dass man sie mit Stift, Papier und Taschenrechner lösen kann. Nur ganz selten werden eure Handys verwendet, z.B. für das Erstellen von Fotos. Wir wollen hier ganz bewusst nicht in Konkurrenz zu existierenden Mathematik-Apps o.ä. treten, sondern euch vielmehr dazu anregen, die Aufgaben in Ruhe und mit genügend Zeit selbständig zu lösen.
- Die Aufgaben haben verschiedene Aufgabenteile (A, B und C), die wiederum Teilaufgaben haben. Der Schwierigkeitsgrad ist ansteigend. Helft euch im Team und versucht so, möglichst viele Aufgaben zu lösen.

Bei Fragen und Anregungen stehen wir unter spaziergaenge@math.uni-bonn.de jederzeit gerne zur Verfügung.

Wir danken der Joachim Herz Stiftung sowie dem Hausdorff Center for Mathematics herzlich für die finanzielle Unterstützung unseres Projektes!

Wir wünschen euch und Ihnen viel Spaß, gutes Gelingen und schönes Wetter bei den Mathematischen Spaziergängen in Siegburg.

Das Projektteam, Bonn, Juli 2020

Legende

- A1 Kasten oder Bild gehören zur angegebenen Aufgabe.
- Teamarbeit
- Gehe schonend mit der Natur um.
- Themengebiet Gemischtes
- Themengebiet Lineare Algebra
- Themengebiet Geometrie
- Themengebiet Analysis
- Themengebiet Stochastik

Spaziergänge im Überblick

Seite		Themengebiet
8	**01 Von Kirchen und symmetrischen/m Messen** Servatiuskirche, Jahrgangsstufe 6	
12	**02 Mit Mathematik in Richtung Sieg** Mühlengraben, Jahrgangsstufe 6	
18	**03 Geometrie – Alles Hexerei?** Hexenturm, Jahrgangsstufe 8	
22	**04 Gärtnern mit den Strahlensätzen** Rosengarten, Jahrgangsstufe 8-9	
28	**05 Pythagoras zu Besuch bei der Bank** Moderne Baukunst im Herzen Siegburgs, Jahrgangsstufe 9	
34	**06 Auf die Rampe! Fertig! Rollt!** Rampe an der Kreissparkasse, Einführungsphase	

Seite		Themengebiet
38	**07 Das Warten hat ein Ende** Kaiser-Wilhelm-Platz, Einführungsphase	
42	**08 Klettern am Pythagerüst** Spielplatz am Michaelsberg, Einführungsphase/Qualifikationsphase	
46	**09 Schaukeln mit Sinus und Co** Spielplatz am Michaelsberg, Qualifikationsphase	
50	**10 Pyramide – Viel Spat mit Vektoren!** Kreishaus, Qualifikationsphase	
54	**11 Steigungen überwinden – barrierefrei mit Sinus und Cosinus** Siegburg Bahnhof, Qualifikationsphase	
60	**12 Crescendo am Marktplatz** Stadtmuseum, Qualifikationsphase	

Spaziergang 01

Von Kirchen und symmetrischen/m Messen

Servatiuskirche

- Symmetrie

Jahrgangsstufe
6

Ort
Servatiuskirche

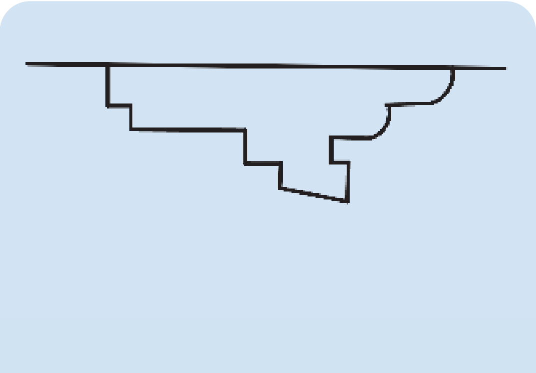
Zeit
90 Minuten

Material
Zwei eckige Handspiegel pro Gruppe, Geodreieck, Zirkel, Pfeifenputzer (oder Draht), Schere, Schreibmaterial, Pausenbrot

Die Servatiuskirche ist die älteste der noch erhaltenen Kirchen in Siegburg. Sie ist im spätromanisch-frühgotischen Stil aus einheimischem Tuffstein erbaut, der auch „Wolsdorfer Brocken" genannt wird. In der Schatzkammer der Kirche befindet sich einer der kunsthistorisch bedeutendsten romanischen Kirchenschätze der Welt.

A1 Suche die Informationstafel, welche an der Vorderseite der Kirche angebracht ist. Wie alt sind die ältesten Teile der Kirche? Wie alt die neuesten?

A2 Gehe um die Kirche herum. Übertrage die Skizze in dein Heft und ergänze sie zum Grundriss der Kirche. Ist der Grundriss symmetrisch?



Wusstest du schon?

Die Servatiuskirche ist dem Eisheiligen Servatius von Tongern geweiht. Ihre Schatzkammer birgt mit zahlreichen Schreinen und Altarsteinen Kirchenschätze von großer kunsthistorischer Wichtigkeit, gleichzusetzen mit den Schatzkammern des Kölner oder Aachener Doms. Dazu gehört der Annoschrein, der die Gebeine des Erzbischofs Anno II. von Köln (1010-1075) beinhaltet hatte und aus dem 12. Jahrhundert stammt.

Die Servatiuskirche wurde im Zweiten Weltkrieg stark beschädigt und später umfassend restauriert. Sie steht seit vielen Jahren unter Denkmalschutz.

Begib dich nun auf den Platz vor der Kirche.

A3 Erstelle eine Skizze vom Umriss der Kirchenvorderseite. Zeichne die Symmetrieachse ein. Wenn du nah an die Kirche herangehst, erkennst du, dass die eingezeichnete Symmetrieachse nur für den Umriss, nicht aber für die ganze Fassade gilt. Finde drei Elemente, die die Symmetrie der Fassade durchbrechen.

B2

B1 Ihr habt bisher nur Fälle von Achsensymmetrie betrachtet. Ihr kennt noch zwei andere Arten der Symmetrie: die Drehsymmetrie und (als Spezialfall dieser) die Punktsymmetrie. Diskutiert untereinander, was die genannten Symmetriearten voneinander unterscheidet.

Gehe zur weiteren Untersuchung von Symmetrien noch näher an die Kirche heran.

B2 Suche die hier abgebildeten Motive an der Kirche und notiere, wo du sie gefunden hast.

B3 Entscheidet für jedes Motiv, ob es achsensymmetrisch ist. Diskutiert die Lage und die Anzahl der Symmetrieachsen.

B4 Suche an der Kirche ein anderes Motiv mit besonders vielen Symmetrieachsen. Skizziere es in dein Heft und zeichne die Achsen ein. Ist das gefundene Motiv auch drehsymmetrisch?

Ein Grundbaustein einer drehsymmetrischen Figur ist derjenige Ausschnitt, der, um einen bestimmten Winkel gedreht, immer wieder vorkommt und so die gesamte Figur erzeugt.

C1 Der Innenwinkel des Kreises (Vollwinkel) hat 360 Grad. Nenne fünf ganzzahlige Winkel, die ein Grundbaustein am Symmetriepunkt haben kann. Wie oft muss man den Grundbaustein jeweils drehen, damit eine vollständige Figur entsteht?

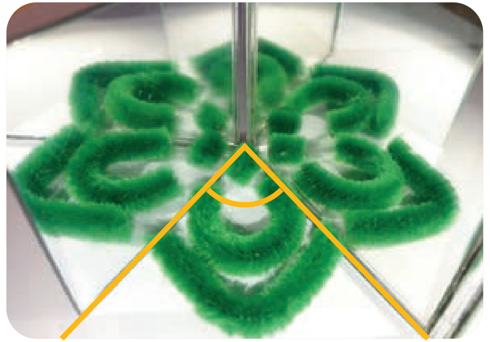
C2 Bearbeitet für die drehsymmetrischen Bildausschnitte aus Teilaufgabe **B2** jeweils die folgenden Aufgaben:

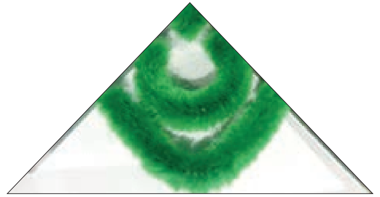
- Findet zu jeder Figur den Grundbaustein. Zeichnet ihn möglichst genau in euer Heft.
- Wie oft und um welchen Winkel müsst ihr den Grundbaustein drehen, damit die abgebildete Figur entsteht?
- Stellt die Spiegel so zu dem Grundbaustein auf, dass ihr im Spiegel die ursprüngliche Figur wieder sehen könnt. In welchem Winkel stehen die Spiegel zueinander?

Orientiert euch dabei an dem Aufbau in der Abbildung.

C3 Legt mithilfe der Pfeifenputzer (oder des Drahtes) verschiedene Grundbausteine für eigene drehsymmetrische Figuren. Nutzt eure Spiegel wie in Teilaufgabe **C2**, um die gesamte Figur zu sehen. Haltet euer schönstes Ergebnis in eurem Heft fest. In welchem Winkel stehen die Spiegel zueinander?

C4 Warum sind an Kirchen und anderen Gebäuden so viele Symmetrien zu finden? Diskutiert eure Ideen und haltet sie stichpunktartig fest.

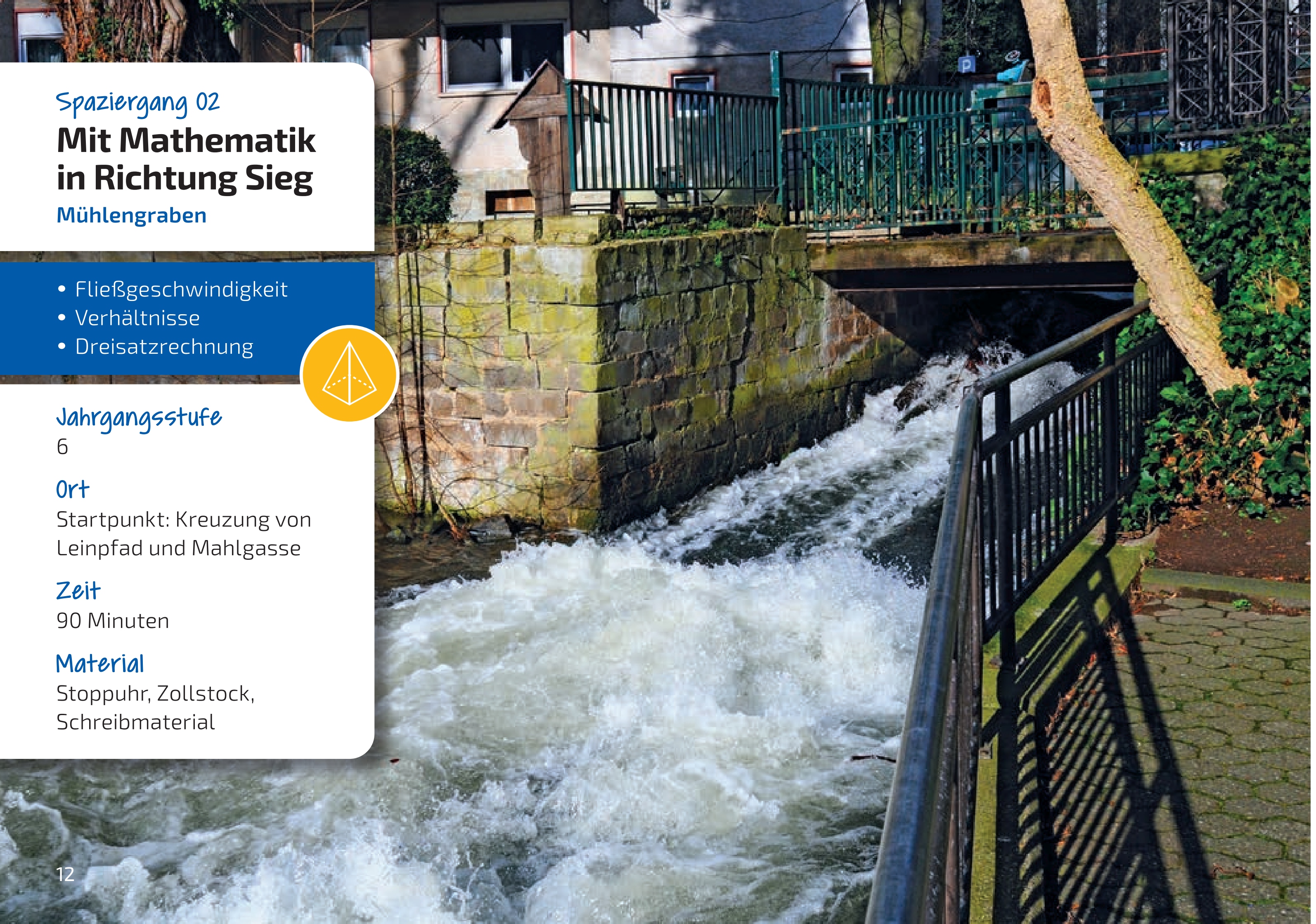




Grundbaustein

Mach mal Pause

Iss dein mitgebrachtes Pausenbrot oder anderes Frühstück so, dass nach jedem zweiten Bissen eine symmetrische Figur entsteht.



Spaziergang 02

Mit Mathematik in Richtung Sieg

Mühlengraben

- Fließgeschwindigkeit
- Verhältnisse
- Dreisatzrechnung

Jahrgangsstufe
6

Ort
Startpunkt: Kreuzung von Leinpfad und Mahlgasse

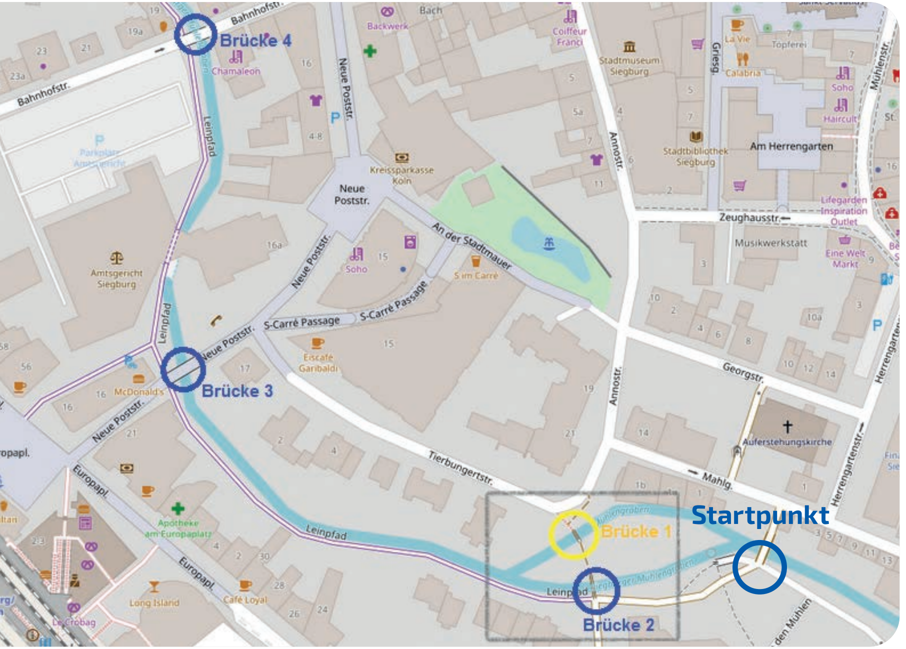
Zeit
90 Minuten

Material
Stoppuhr, Zollstock, Schreibmaterial

Der Mühlengraben wurde im 12. Jahrhundert, vermutlich im Zuge des Ausbaus der Stadtmauer, errichtet. Er ist ein 4,7 Kilometer langer, künstlich angelegter Wasserlauf, der seinen Ausgang am heutigen Buisdorfer Wehr an der Sieg nimmt und östlich der Agger-Mündung wieder in diese hineinfließt. Der Mühlengraben war lange Zeit notwendig für den Betrieb der Siegburger Mühlen und diente daneben lange Zeit auch als Wasserquelle und Waschmöglichkeit für die Siegburger Bevölkerung. Auch heute kann man noch ein paar der alten Mühlen finden. Weil der Mühlengraben künstlich angelegt ist, unterscheidet er sich von anderen Bächen dadurch, dass das Ufer steil abfällt.

A1 Bestimmt die Fließgeschwindigkeit des Mühlengrabens in einem Bachabschnitt. Sucht euch dazu an beliebiger Stelle des Mühlengrabens einen 10 Meter langen Abschnitt aus. Messt nun mithilfe der Stoppuhr, wie lange ein Holzstück braucht, um die 10 Meter zurückzulegen. Berechnet mit eurer Messung die Fließgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde.

Verwendet nur bereits abgebrochene Holzstücke, die auf dem Boden liegen und achtet darauf, keine Pflanzen zu beschädigen.



A2 Die übliche Einheit zur Angabe von Geschwindigkeiten ist Kilometer pro Stunde (km/h). Stellt euer Ergebnis aus Teilaufgabe **A1** auch in dieser Einheit dar.

A3 Vergleicht euer Ergebnis mit dem von anderen Gruppen, die an anderen Stellen des Baches gemessen haben. Wie kommt es, dass sich die Werte unterscheiden? Bildet nun den Mittelwert aus euren Ergebnissen, um eine Schätzung für die durchschnittliche Fließgeschwindigkeit des Mühlengrabens zu erhalten.

Wusstest du schon?

Entlang des Mühlengrabens befinden sich fünf Mühlen, die heute nicht mehr in Betrieb sind: Die Mahlmühle, die Walkmühle, die Lohmühle, die Papiermühle und die Ölmühle. Nur die Mahlmühle lag im Mittelalter innerhalb der Stadtmauer.

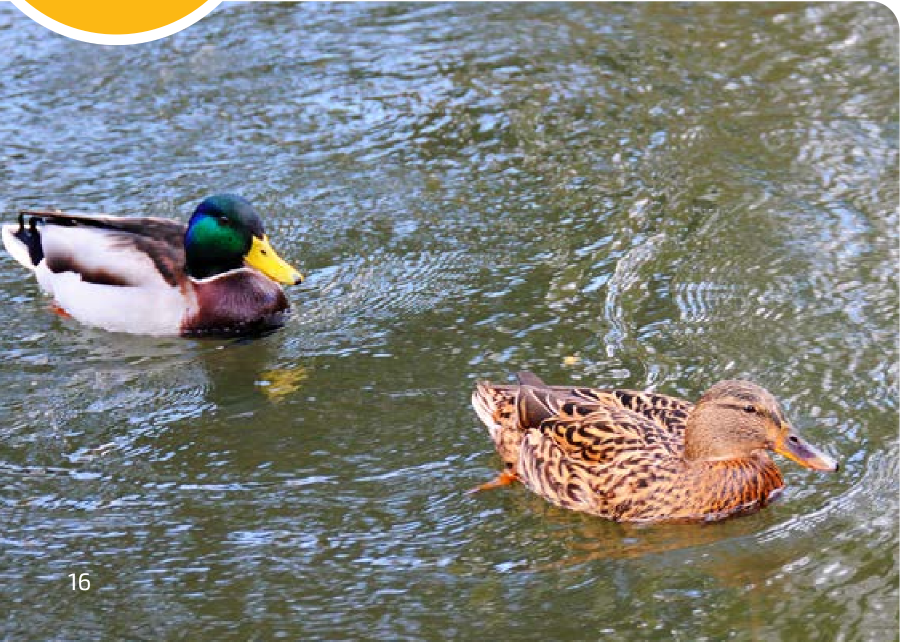
Betrachte nun den Bereich des Mühlengrabens, der auf der Karte mit einem Rechteck gekennzeichnet ist.

A4 An dieser Stelle fließen zwei Bacharme des Mühlengrabens zusammen. Vom Zusammenfluss aus ist die Strecke zu Brücke 1 genauso lang wie zu Brücke 2.

Drei von euch verteilen sich auf folgende drei Standorte: Brücke 1, Brücke 2 und die Stelle, an der die beiden Bacharme zusammenfließen. Einigt euch auf ein Startkommando. Lasst dann gleichzeitig ein Stück Holz von den beiden Brücken fallen und startet die Stoppuhr. Messt für beide Holzstücke die Fließzeit bis zum Treffpunkt der beiden Bacharme. Ermittelt die Fließgeschwindigkeit des Bacharms, der unter Brücke 1 fließt. Dazu könnt ihr die beiden gemessenen Zeiten zueinander ins Verhältnis setzen. Nehmt dabei an, dass der Bacharm unter Brücke 2 die in Teilaufgabe **A3** berechnete durchschnittliche Fließgeschwindigkeit hat.

Wusstest du schon?

Im Jahr 1993 wurde das einzige Gebäude aus der Mühlengeschichte der Stadt Siegburg, die Mahlmühle, saniert. Das Mühlrad aus dem Jahre 1877 wurde in diesem Zuge restauriert und sollte der Stromgewinnung dienen. Wegen seiner starken Laufgeräusche wurde das Wasserrad aber wieder außer Betrieb genommen.



B1 Für die folgenden Aufgaben benötigt ihr die durchschnittliche Schrittlänge jedes Gruppenmitgliedes. Markiert dafür eine Strecke von 6 Metern auf dem Boden. Geht diese Strecke ab und zählt eure Schritte dabei. Berechnet aus diesen Angaben eure Schrittlänge. Geht nun den Weg von Brücke 2 bis Brücke 4 entlang des Grabens ab und zählt eure Schritte. So könnt ihr herausfinden, wie lang der Graben auf dieser Strecke etwa ist. Gebt das Ergebnis in Metern an und ermittelt den Durchschnitt eurer Ergebnisse.

B2 Stelle dir vor, dass auf dem Bach ein ferngesteuertes Boot fährt. Die Höchstgeschwindigkeit des Bootes auf dem Mühlengraben beträgt stromabwärts 12 Kilometer pro Stunde.

Wie lang braucht das Boot, um die Strecke von Brücke 2 bis Brücke 4 zu überwinden, wenn es durchgehend mit Höchstgeschwindigkeit fährt? Gib dein Ergebnis in Minuten an.

B3 Eine Ente lässt sich mit der Strömung auf dem Mühlengraben treiben. Wie viel länger braucht die Ente, um den gleichen Weg wie das Boot zurückzulegen?

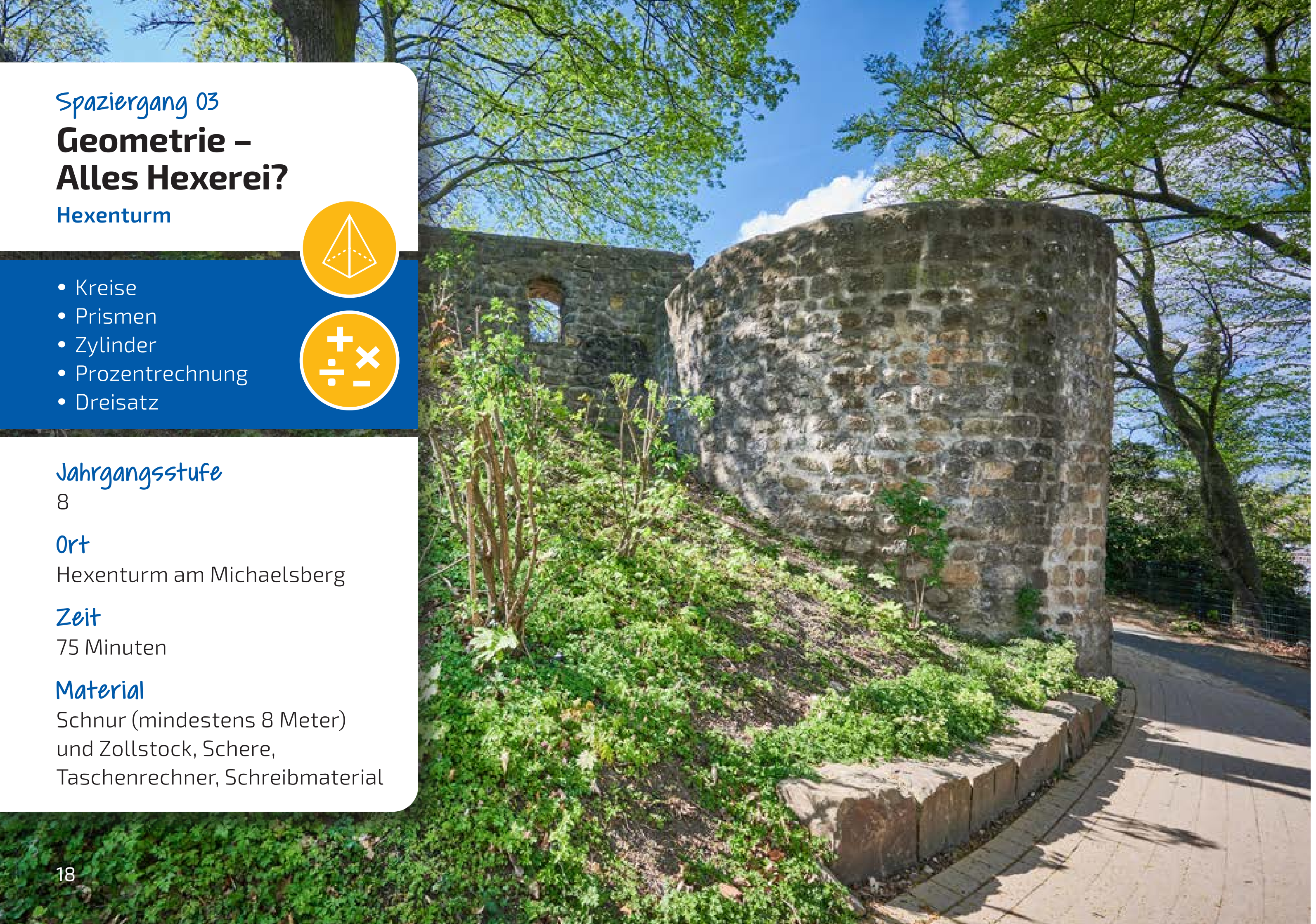
B4 Hinter der Brücke 4 verläuft der Mühlengraben noch 2,2 Kilometer weiter, bis er in die Sieg mündet. Das Boot wird mit einem Akku betrieben. Nach sieben Minuten leert sich der Akku langsam und die Höchstgeschwindigkeit wird um 30 Prozent herabgesetzt, um die maximale Fahrzeit zu verlängern.

Mit gedrosselter Geschwindigkeit reicht der Akku dann nochmals für fünf Minuten Fahrvergnügen.

Das Boot wird direkt hinter Brücke 2 ins Wasser gelassen. Wie viele Meter vor der Mündung ist der Akku leer?

Wusstest du schon?

Seit dem 15. bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts wurde der städtische Mühlengraben auch als Transportweg für Steine der Siegburger Wolsberge und andere Lasten genutzt.



Spaziergang 03

Geometrie – Alles Hexerei?

Hexenturm

- Kreise
- Prismen
- Zylinder
- Prozentrechnung
- Dreisatz

Jahrgangsstufe
8

Ort
Hexenturm am Michaelsberg

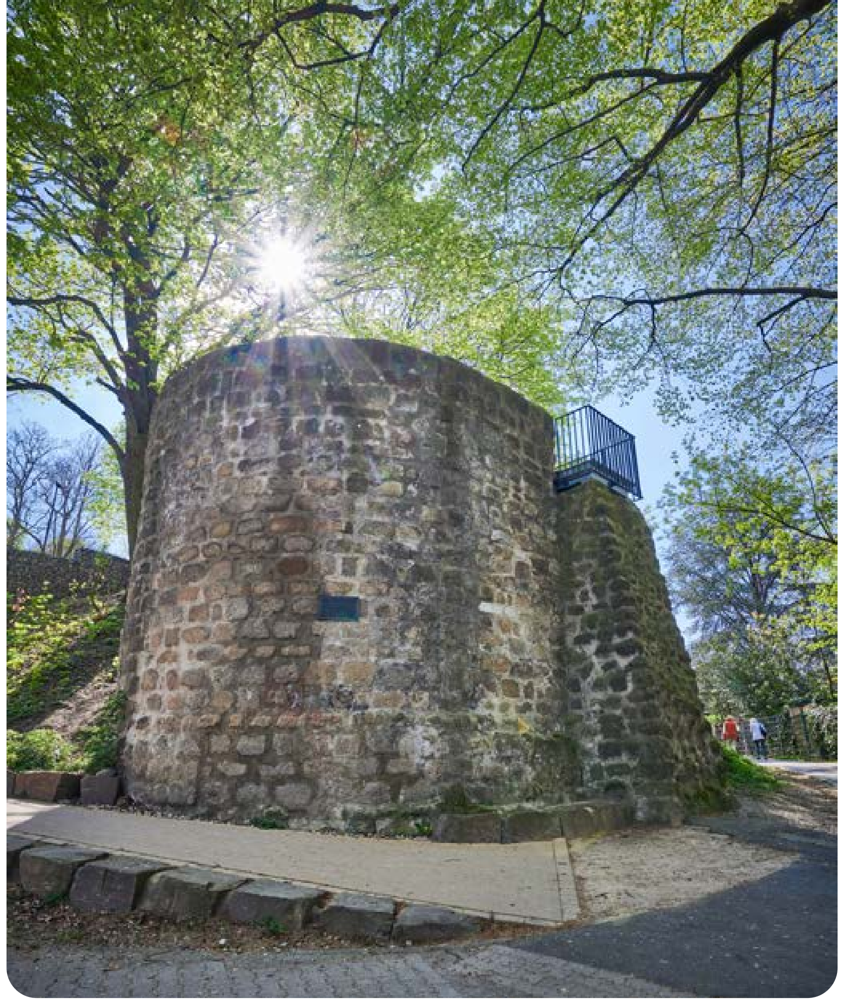
Zeit
75 Minuten

Material
Schnur (mindestens 8 Meter) und Zollstock, Schere, Taschenrechner, Schreibmaterial

Der Hexenturm ist ein wichtiges Baudenkmal der Stadt Siegburg. Er wurde im Jahr 2018 restauriert und der Öffentlichkeit dadurch wieder zugänglich gemacht. Der Name geht auf den Heimatdichter Wilhelm Herchenbach (1818-1889) zurück, dessen Werke von Hexenprozessen berichten, die in diesem Turm stattgefunden haben sollen. In Siegburg gab es zwar Hexenverfolgung, jedoch spielte der Turm dabei keine Rolle. Er war ein Wachturm des mittelalterlichen Siegburgs und damit ein Teil der Stadtmauer.

Mittlerweile ist die Stadt deutlich gewachsen. Ihr könnt aber an der Form des Turmes erkennen, auf welcher Seite die mittelalterliche Stadt lag.

A1 Wenn ihr auf den Michaelsberg steigt, könnt ihr eine Plattform auf dem Turm betreten. Bestimmt mit der Schnur die Höhe des Turmes.



A2 Wie ihr seht, ist die Grundfläche des Turmes ein Halbkreis. Bestimmt den Durchmesser des Turmes innen zwischen den Wänden und den Durchmesser des ganzen Turmes inklusive der Mauern.

A3 Bestimme das Volumen der runden Mauer des Turmes in Kubikmetern.

Der Hexenturm wurde aus Tuffstein gebaut. Tuff ist ein Vulkangestein, das zum Beispiel in der Vulkaneifel vorkommt. Aufgrund seiner geringen Härte wurde Tuff im Mittelalter oft verbaut.

B1 Der im Hexenturm verbaute Tuff hat eine Dichte von etwa 2,3 Gramm je Kubikzentimeter. Wie viel wiegt die Mauer des Turms? Beachte beim Rechnen die Einheiten.

B2 Wie viel würde der Turm wiegen, wenn er nicht hohl wäre? Wie viel mal schwerer wäre das?

Historiker schätzen, dass der Hexenturm zwischen 800 und 1064 gebaut wurde. Im Mittelalter wurden die Steine in der Eifel abgebaut und dann über den Rhein und die Sieg nach Siegburg gebracht. Das letzte Stück zum Michaelsberg wurden sie wahrscheinlich mit Lastenkarren befördert.

C1 Ein Karren kann 1,5 Tonnen Tuff laden und braucht für Hin-und Rückweg 90 Minuten. Insgesamt standen fünf Karren zum Transport zur Verfügung. Wie viele Arbeitstage waren für den Transport aller benötigten Steine von der Sieg bis zum Michaelsberg erforderlich, wenn ein mittelalterlicher Arbeitstag zwölf Stunden umfasste?

Wusstest du schon?

Die Dichte ρ eines Gegenstandes mit Volumen V und Masse m berechnet sich folgendermaßen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Spaziergang 04

Gärtnern mit den Strahlensätzen

Rosengarten

- Strahlensätze
- Flächeninhalt von Dreiecken und Trapezen
- Dreisatz

Jahrgangsstufe
8-9

Ort
Rosengarten auf dem Michaelsberg, Bergstraße

Zeit
90 Minuten

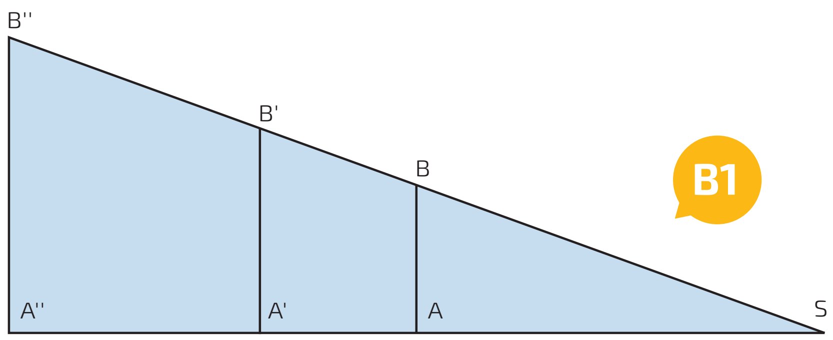
Material
Zollstock, Geodreieck, Taschenrechner, Maßband, Schreibmaterial

Der Rosengarten in Siegburg gehört zur ehemaligen Abtei auf dem Michaelsberg. Im Jahr 1064 machte der Erzbischof von Köln Anno II. aus der ehemaligen Raubritterburg auf dem Michaelsberg, die vermutlich bereits im 8. Jahrhundert erbaut wurde, ein Benediktinerkloster. Im November 2010 wurde das Ende der fast 950-jährigen benediktinischen Tradition verkündet; der Konvent wurde aufgelöst. Die Räumlichkeiten der Abtei stehen nun, nach Um- und Neubau, dem Katholisch-Sozialen Institut zur Verfügung. So sollen auch in Zukunft die Klostergebäude geistliches Leben in der Region verbreiten. Im Sommer können sich die Besucherinnen und Besucher des Michaelsbergs an einem bunt blühenden Garten erfreuen, im Winter hingegen werden die Rosen geschnitten und mit Tannenzweigen bedeckt, damit die Pflanzen nicht erfrieren.

A1 Zeichne die Umrisse der in der Mitte des Rosengartens befindlichen Beete skizzenhaft in dein Heft.

Hinweis: *Den besten Blick auf den Rosengarten hast du, wenn du über die Mauer nach unten schaust.*

A2 Ergänze deine Skizze so, dass ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, indem du die Seiten über die Aussparungen hinweg verlängerst.



B1

A3 Ermittelt die Seitenlängen des in Teilaufgabe **A2** beschriebenen, zum Dreieck ergänzten Rosengartens. Tragt alle gemessenen Streckenlängen in eure Skizze ein. Zeichnet in der Skizze die zwei Wege ein, die quer durch die Rosenbeete führen.

A4 Berechne aus deinen Messwerten den Flächeninhalt des dreieckigen Gartens.

B1 In der Abbildung siehst du eine vereinfachte Darstellung des Rosengartens. Formuliere anhand dieser Abbildung den ersten und den zweiten Strahlensatz.

B2 Die Längen der Wege, die den Rosengarten queren, betragen, je auf der Mittellinie gemessen, 5,00 Meter und 7,62 Meter. Überprüfe mithilfe der Strahlensätze, ob deine Messungen der restlichen Strecken im Rosengarten genau waren.

B3 Stelle dir vor, der mittlere Teil des Rosengartens solle neu bepflanzt werden. Berechne die zu bepflanzende Fläche. Ermittle hierfür zunächst die Fläche des mittleren Beetes zwischen den zwei Wegen. Beachte, dass der Bereich der umgrenzenden Hecke nicht bepflanzt werden soll.

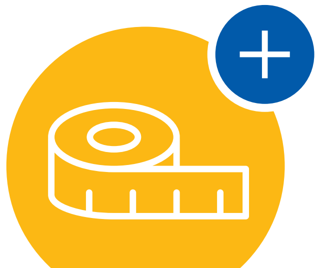
B4 Nimm an, dass neun Rosen auf einen Quadratmeter passen. Wie viele Rosen können in das mittlere Beet gepflanzt werden? Nutze hierzu deine Ergebnisse aus Teilaufgabe **B3**.

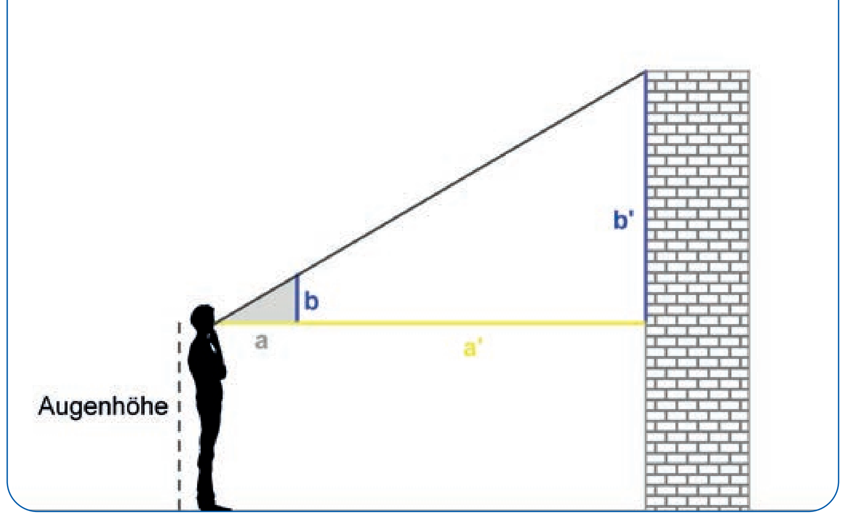
B5 Neben dem großen Beet ist eine große Fläche mit Kies ausgelegt und nicht bepflanzt. Stelle dir vor, der Garten solle entsprechend der Abbildung vergrößert werden. Um wie viele Meter könnte man den Garten verlängern? Beachte, dass Besucher auch nach der Vergrößerung noch um den Garten herumgehen möchten.

B6 Wie lang könnte die neue Kopfseite höchstens sein? Nutze für deine Berechnung den zweiten Strahlensatz.

B5

Verlängerung des Rosengartens





C1 Rechts vom Eingang des Rosengartens siehst du eine Mauer. Schätze, wie hoch die Mauer an ihrer höchsten und an ihrer niedrigsten Stelle ist. Wir betrachten dabei nur die große Stützmauer ohne den im Winkel angesetzten kurzen Teil am Eingang des Gartens.

C2 Nutzt das Geodreieck, um mithilfe der Strahlensätze herauszufinden, wie hoch die Mauer an der niedrigsten Stelle ist. Zieht als Hilfe die Abbildung hinzu.

C3 Betrachte noch einmal deine Schätzung bezüglich des höchsten Punktes der Mauer aus Teilaufgabe **C1**. Kommt sie dir nach wie vor sinnvoll vor? Schätze aufgrund deiner Erkenntnisse über den niedrigsten Punkt der Mauer erneut und vergleiche deine Schätzung mit der deiner Mitschülerinnen und Mitschüler. Diskutiere mit ihnen über die Unterschiede.

C4 Überlegt euch nun eine Möglichkeit, herauszufinden, wie hoch die Mauer an ihrer höchsten Stelle tatsächlich ist.

C5 Wie viele Kubikmeter Steine wurden in der Mauer verbaut? Fertige hierzu eine Skizze an, in der du alle dir bekannten Längen einträgst. Ermittle, falls nötig, die fehlenden Längen.

Wusstest du schon?

Der Michaelsberg, auf dessen Gipfel die ehemalige Abtei Michaelsberg liegt, ist das Wahrzeichen der Kreisstadt Siegburg. Er entstand vor Tausenden von Jahren durch vulkanische Aktivitäten und ist heute mit einer Höhe von knapp 120 Metern über Normalnull aus jeder Richtung von weitem zu sehen. Schon im Mittelalter diente der Berg den ansässigen Grafen als Herrschaftssitz, von dem sie die gesamte Region überwachen konnten. Zahlreiche Adelige nutzen die damals noch als Sygberg bekannte Erhebung als Ausgangspunkt für Raubzüge gegen angrenzende Städte und reisende Händler.

Spaziergang 05

Pythagoras zu Besuch bei der Bank

Moderne Baukunst im Herzen Siegburgs

- Satz des Pythagoras
- Pythagoreische Zahlentripel

Jahrgangsstufe
9

Ort
Kreissparkasse am S-Carré

Zeit
60 Minuten

Material
Schnur (mindestens 10-15 Meter), Zollstock, Schreibmaterial, dicker Stift für Markierungen an der Schnur

Die Filiale der Kreissparkasse Köln in Siegburg wurde Anfang der 2000er Jahre in außergewöhnlicher Architektur errichtet und beschließt den neu gestalteten unteren Teil der Fußgängerzone zwischen Bahnhof und Markt.

A1 Formuliere den Satz des Pythagoras, den du aus dem Unterricht kennst.

A2 Stelle dir vor, die Bankangestellten wünschen sich einen neuen, größeren Empfangstresen. Die Tischplatte für einen solchen neuen Empfangstresen für den Innenraum der Bank wäre 4,50 Meter lang, 3,80 Meter breit und 0,10 Meter dick. Miss Höhe und Breite der Eingangstür und berechne, ob die Platte durch den Haupteingang in die Bank getragen werden könnte.

Wusstest du schon?

Pythagoras wurde um 570 v. Chr. auf der griechischen Insel Samos geboren. Man glaubt, dass er den nach ihm benannten Lehrsatz auf Reisen nach Ägypten und Indien entdeckt hat. Bewiesen hat er ihn selbst allerdings nie. Der älteste überlieferte Beweis findet sich bei Euklid etwa 300 v. Chr. Über die Person Pythagoras ist nahezu nichts bekannt. Dies beeinflusst jedoch den Wert des Lehrsatzes in keinem Fall. So ist der Satz des Pythagoras heute einer der fundamentalen Sätze in der euklidischen Geometrie.

A3 Auf der Überdachung befindet sich das Firmenlogo. Stelle dir vor, man möchte die Sichtbarkeit des Logos bei Nacht optimieren, indem man Lichter daran anbringt. Damit Arbeiter auf das Vordach der Kreissparkasse gelangen können, stellt die freiwillige Feuerwehr Siegburg ein Fahrzeug mit Leiterkorb zur Verfügung, dessen Drehleiter eine Länge von 30 Metern hat. Die Maße des Feuerwehrautos kannst du der Abbildung entnehmen. Das Feuerwehrauto kann direkt bis an das Gebäude heranfahren.

Reicht der Personenkorb bis auf das Dach?

Wenn ja, zu wie viel Prozent ist die Drehleiter des Feuerwehrautos dann ausgefahren?

A4 Das Sicherheitssystem der Sparkasse beinhaltet unter anderem Überwachungskameras. Eine davon siehst du an der Unterseite des Vordaches angebracht (siehe Abbildung). Im Zuge der baulichen Verbesserungsmaßnahmen sei bekannt, dass die Kameras bis zu einer Entfernung von 10 Metern scharfe Bilder aufnehmen, auf denen man Menschen anhand ihres Gesichts identifizieren kann.

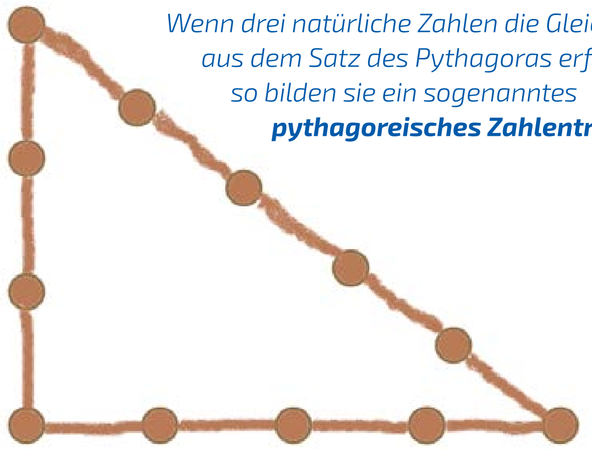
Ab welcher Entfernung von dem Treppenaufgang würde die Kamera Bilder von dir machen können, auf denen dein Gesicht zu identifizieren wäre?

Die Umkehrung des Satzes des Pythagoras lautet: Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Die Umkehrung des Satzes des Pythagoras wurde schon im Altertum benutzt, auch ohne dass sie bereits explizit formuliert worden wäre. Es ist überliefert, dass zum Beispiel die alten Ägypter schon rechte Winkel mithilfe von Knotenseilen zum Vermessen von Feldern konstruierten.

Wusstest du schon?

Kinder und Jugendliche, die sich für die Tätigkeiten der Feuerwehr interessieren, haben die Möglichkeit, Teil der Jugendfeuerwehr Siegburg zu werden. Ziel der Ausbildung in der Jugendfeuerwehr ist es, auf die Arbeit in der „aktiven“ Feuerwehr vorzubereiten. Daneben werden auch viele Freizeitmaßnahmen und andere Aktionen durchgeführt. Eintreten können Kinder ab 10 Jahren.



Wenn drei natürliche Zahlen die Gleichung aus dem Satz des Pythagoras erfüllen, so bilden sie ein sogenanntes ***pythagoreisches Zahlentripel.***

Wusstest du schon?

Harpedonapten (griech. „Seilspanner") hießen im alten Ägypten Menschen, die im Auftrag des Pharao das Land vermaßen. Diese Landvermessungen waren zum einen notwendig, um die Felder nach der jährlichen Überschwemmung auszumessen, und zum anderen für den Bau von Pyramiden, Tempelanlagen, Bewässerungsanlagen oder anderen Bauwerken. Das Hauptinstrument der Harpedonapten war die Zwölfknotenschnur, mit welcher rechte Winkel konstruiert werden können.

B1 Im alten Äqypten hat man an einem an den Enden zusammengebundenen Seil 12 Knoten in gleichen Abständen geknotet. Orientiere dich an der Abbildung und erkläre, wie die Äqypter mit diesem Hilfsmittel vorgegangen sind, um rechte Winkel zu konstruieren.

B2 Weist nach, dass die Überdachung des Haupteingangs einen rechten Winkel hat. Wie seid ihr vorgegangen?

B3 Bringt an der mitgebrachten Schnur 36 Markierungen im gleichen Abstand voneinander an.

B4 Sucht einen rechten Winkel in eurer Umgebung, in welchem ihr die Schnur zu einem Dreieck aufspannen könnt, und findet durch Ausprobieren mit der Schnur weitere pythagoreische Zahlentripel. Hierbei müsst ihr nicht immer die gesamte Länge der Schnur nutzen.

Spaziergang 06

Auf die Rampe! Fertig! Rollt!

Rampe an der Kreissparkasse

- Durchschnittliche und momentane Änderungsrate

Jahrgangsstufe
Einführungsphase

Ort
Kreissparkasse am S-Carré

Zeit
90 Minuten

Material
Ball, Maßband, Schreibmaterial, Stoppuhr, Taschenrechner

An der Kreissparkasse am S-Carré wurde an der Seite des Haupteingangs eine Rampe für Rollstuhlfahrerinnen und Rollstuhlfahrer oder Eltern mit Kinderwagen gebaut. Wir nähern uns hier mathematisch der physikalischen Größe der Geschwindigkeit.

A1 Messt die Länge vom Anfang bis zum Ende der Rampe.

A2 Eine Person lässt mehrfach den Ball vom Anfang bis zum Ende der Rampe rollen und die anderen Schülerinnen und Schüler messen die Zeit, die der Ball für diesen Weg benötigt. Bestimmt den durchschnittlichen Messwert für die Zeit und notiert diesen.

Hinweis: *Messt nur die Versuche, in denen der Ball geradlinig die Rampe herunterläuft.*

A3 Bestimme die durchschnittliche Geschwindigkeit des Balles für die beobachtete Strecke.

B1 Stellt gemeinsam Vermutungen auf, wie man die Geschwindigkeit des Balles am Ende der Rampe bestimmen könnte.

B2

Länge der Strecke in Meter	Durchschnittswert der gemessenen Zeit in Sekunden	Durchschnittliche Geschwindigkeit in Meter je Sekunde

B2 Wiederholt den Versuch aus Teilaufgabe **A2**, indem ihr den Ball vom Anfang der Rampe loslasst, aber nun die durchschnittliche Geschwindigkeit des Balles auf der Strecke bestimmt, die ungefähr in der Mitte der Rampe anfängt und am Ende der Rampe endet. Wiederholt dies noch einmal, indem ihr den Anfang der gemessenen Strecke noch näher an den Endpunkt legt. Tragt eure gemessenen Werte in die Tabelle ein. In die erste Zeile könnt ihr die Ergebnisse aus Aufgabenteil **A** eintragen.

Hinweis: *Ihr könnt als Startpunkte für die Messungen zwei verschiedene graue Stangen des Geländers benutzen.*

B3 Welche durchschnittliche Geschwindigkeit nähert am besten die Geschwindigkeit des Balles am Ende der Rampe an?

B4 Wenn die durchschnittliche Geschwindigkeit im letzten Intervall der Endgeschwindigkeit des Balles entsprechen würde, würde der Ball in einer Fußgängerzone (Höchstgeschwindigkeit 7 Kilometer pro Stunde) geblitzt werden?

C1 Überlegt gemeinsam, wie man den Differenzenquotienten verändern kann, um die Geschwindigkeit am Ende eines Intervalls (momentane Änderungsrate) näherungsweise zu bestimmen.

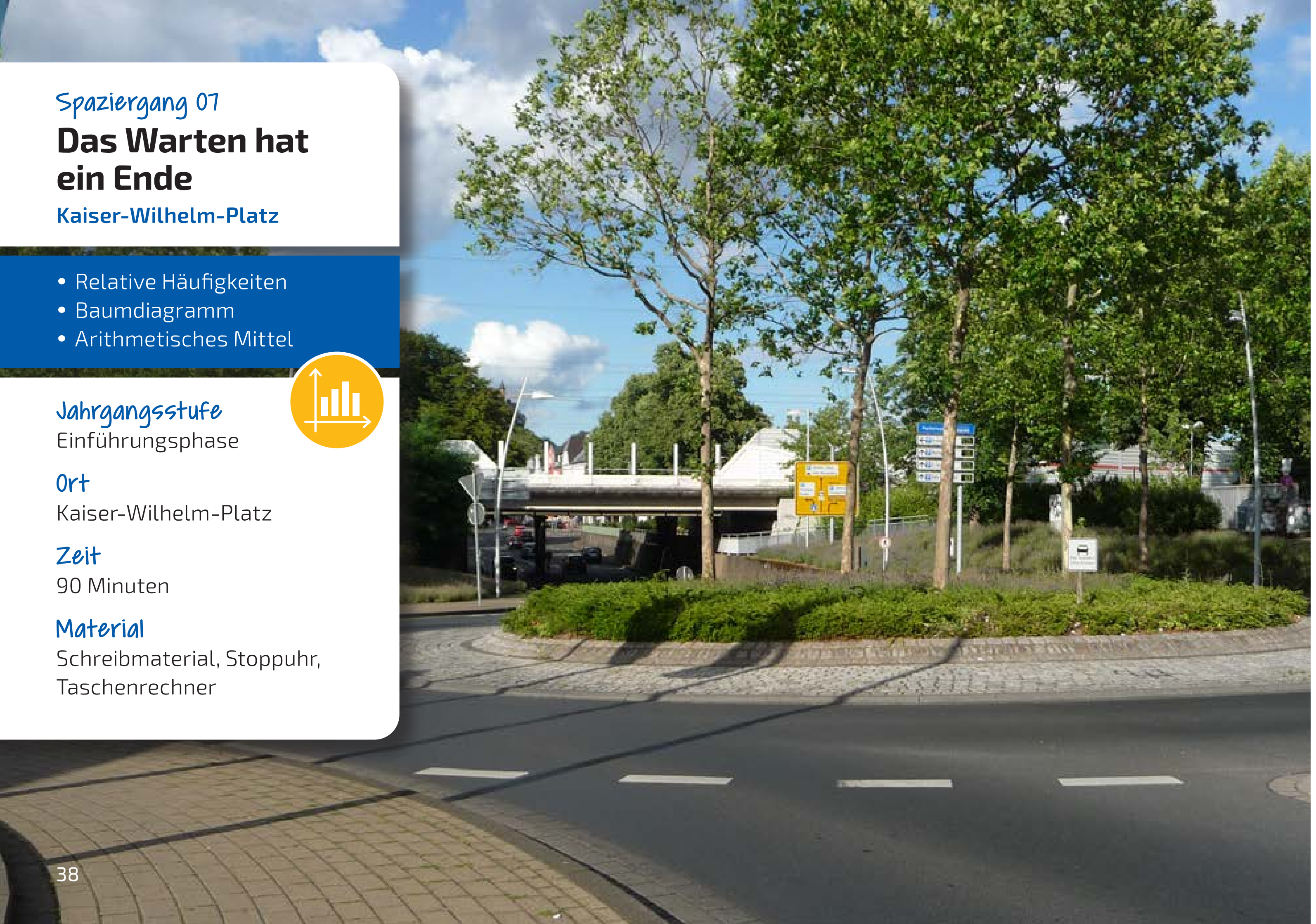
C2 Findet ihr andere Rampen in der Umgebung, an denen ihr wie in Teilaufgabe **B2** die Geschwindigkeit am Ende der Rampe näherungsweise bestimmen könnt? Vergleicht diese Geschwindigkeiten miteinander.

Weißt Du noch?

Die durchschnittliche Änderungsrate einer Funktion f auf einem Intervall $[a,b]$ kann man mit dem Differenzenquotienten bestimmen:

$$m_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Falls der Funktionsgraph von f ein Weg-Zeit-Diagramm ist, dann gibt der Differenzenquotient die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[a,b]$ an.



Spaziergang 07

Das Warten hat ein Ende

Kaiser-Wilhelm-Platz

- Relative Häufigkeiten
- Baumdiagramm
- Arithmetisches Mittel

Jahrgangsstufe
Einführungsphase

Ort
Kaiser-Wilhelm-Platz

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Stoppuhr, Taschenrechner

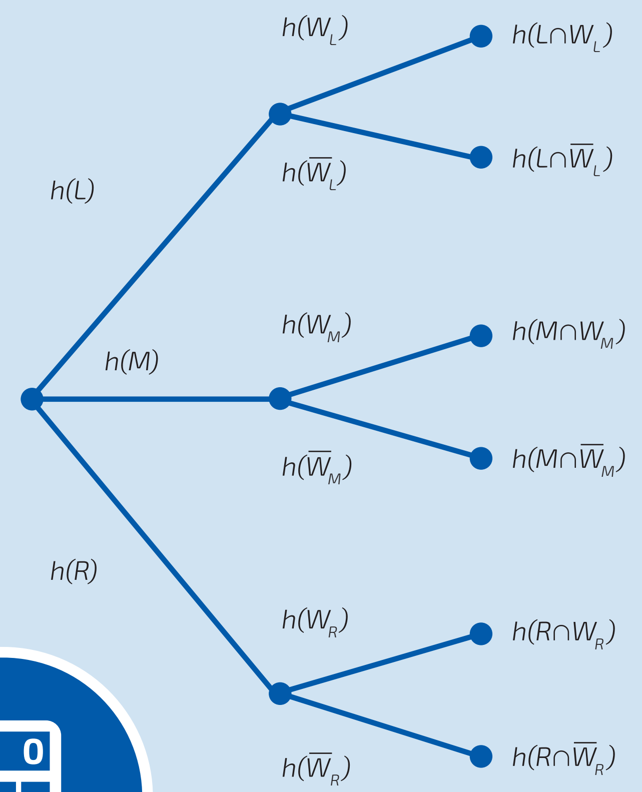
In dieser Aufgabe werden Daten mit dem Ziel erhoben, die Wartezeiten der Autos an der Ampelkreuzung am Kaiser-Wilhelm-Platz mit den Wartezeiten am Kreisverkehr Bonner Str./Konrad-Adenauer-Allee zu vergleichen. Am Kaiser-Wilhelm-Platz gibt es immer wieder lange Staus. Eine Verbesserung der Verkehrssituation könnte eventuell durch einen Kreisverkehr erreicht werden. Ihr werdet im Verlauf der Aufgabe an beiden Standorten Messdaten bezüglich der Wartezeit der Autos erheben und so Vermutungen aufstellen, ob ein Kreisverkehr am Kaiser-Wilhelm-Platz eine gute Alternative wäre.

A1 Teilt die Klasse in zwei Gruppen auf. Die eine Gruppe untersucht den Verkehr aus Richtung Kaiser-Wilhelm-Platz und die andere Gruppe den Verkehr, der aus Richtung Wilhelmstraße kommt. Jede Gruppe wird zusätzlich in drei Untergruppen unterteilt. Jede Untergruppe sucht sich eine der drei Spuren aus, die untersucht wird. Bei eurer Spur sollt ihr für vier Ampelphasen (jeweils rot/grün) jeweils die Anzahl der Autos, die stehen bleiben, sowie deren Wartezeit und die Anzahl der Autos, die ohne zu warten weiterfahren können, notieren.

Hinweis: *Nutzt die Zwischenzeitfunktion einer Stoppuhr, um für mehrere Autos, die nacheinander an der Ampel stehen bleiben, die verschiedenen Wartezeiten zu erfassen.*

A2 Berechnet für eure Spur die relative Häufigkeit der wartenden Autos und die relative Häufigkeit der durchfahrenden Autos. Berechnet zudem die durchschnittliche Wartezeit der wartenden Autos.

Tauscht eure Ergebnisse aus, sodass jeder danach die Informationen für alle Spuren hat.



B1 Vervollständige das Baumdiagramm (siehe Abbildung). Dabei sind $h(L)$, $h(M)$ und $h(R)$ die relativen Häufigkeiten dafür, dass ein Auto über die linke, mittlere oder rechte Spur fährt. $h(W_L)$ ist die relative Häufigkeit der wartenden Autos auf der linken Spur und analog für die anderen Spuren.

B2 Bestimme das arithmetische Mittel der Wartezeit aller Autos (also inklusive der Autos, die nicht anhalten) für

- die einzelnen Spuren.
- alle Spuren zusammen.

C1 Begebt euch zum Kreisverkehr Bonner Str./Konrad-Adenauer-Allee. Erfasst zehn Minuten lang die Daten, die ihr auch in Teilaufgabe **A1** für die Ampelkreuzung erfasst habt, für eine Straße, die zum Kreisverkehr führt. Hier müssen verschiedene Spuren nicht unterschieden werden.

C2 Berechne wieder die relative Häufigkeit der wartenden Autos und das arithmetische Mittel der Wartezeit für alle Autos.

C3 Vergleicht beide Verkehrsknotenpunkte im Hinblick auf den Verkehrsfluss miteinander und reflektiert die Qualität der von euch erhobenen Daten. Beurteilt anschließend den Kreisverkehr als Alternative zu der bisherigen Verkehrssituation am Kaiser-Wilhelm-Platz.

Wusstest Du schon?

1969 wurde durch das „Bonn-Gesetz" der Siegkreis mit dem Landkreis Bonn zum Rhein-Sieg-Kreis erweitert. Im Zuge dessen wurde an der Stelle des alten Landesratamts am Kaiser-Wilhelm-Platz ein neues Kreishaus errichtet, welches vom Bonner Architekten Ernst van Dorp entworfen wurde. Zudem erwarb der Rhein-Sieg-Kreis zahlreiche Gebäude im Mühlenviertel, um diese als Bürogebäude zu nutzen. Anfang der 2000er Jahre zog auch das Gesundheitsamt in das Kreishaus ein. Heute arbeiten in der Kreisverwaltung circa 1500 Menschen in über 600 Büros.

Spaziergang 08

Klettern am Pythagerüst

Spielplatz am Michaelsberg

- Abstände
- Ebenengleichungen
- Lagebeziehungen von Ebenen
- Schnittgeraden

Jahrgangsstufe

Einführungsphase (nur Aufgabenteile **A** und **B**) / Qualifikationsphase

Ort

Spielplatz am Michaelsberg

Zeit

120 Minuten

Material

Maßband (mindestens 5 Meter) oder Schnur mit Zollstock, Taschenrechner, Schreibmaterial

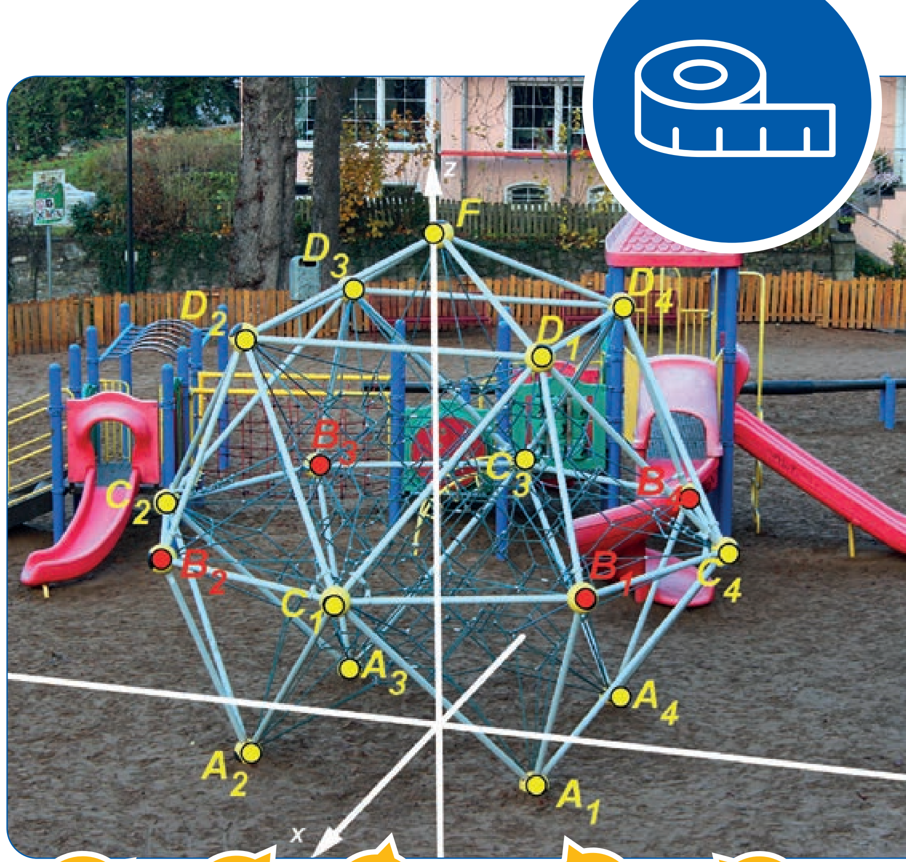
In dieser Aufgabe sollt ihr das Klettergerüst auf dem Spielplatz am Michaelsberg untersuchen. Das Klettergerüst besteht aus Kugeln und Stangen. Zur mathematischen Vereinfachung betrachten wir im Folgenden die Kugeln als Punkte und die Stangen als Geraden im dreidimensionalen Raum.

Wir legen den Koordinatenursprung in die Mitte des Gerüstes am Boden und geben die Koordinaten der vier Kugeln im Sand vor:

A_1 (1,15 | 1,15 | 0), A_2 (1,15 | -1,15 | 0), A_3 (-1,15 | -1,15 | 0), A_4 (-1,15 | 1,15 | 0)

Ihr sollt nun Schritt für Schritt die Koordinaten der übrigen Kugeln bestimmen. Dabei hilft euch der Satz des Pythagoras. Ihr könnt zudem Rechenarbeit sparen, wenn ihr die Symmetrie des Klettergerüstes ausnutzt.

A1 Die Kugeln D_1 bis D_4 liegen genau über den Kugeln A_1 bis A_4. Überlegt euch zunächst, was ihr messen müsst, um die Koordinaten zu bestimmen. Messt die erforderlichen Abstände und bestimmt die Koordinaten der Kugeln D_1 bis D_4.



A1 A2 A3 A4 B1

A2 Berechnet die Koordinaten der Spitze *F* ausgehend von den Koordinaten, die ihr in Teilaufgabe **A1** bestimmt habt. Dazu könnt ihr die Länge der Diagonalen $\overline{D_1D_3}$ ausrechnen und anschließend den Abstand von D_1 und *F* messen.

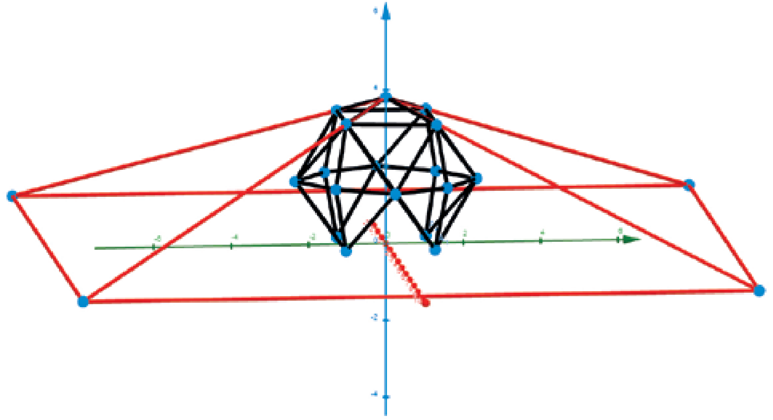
A3 Bestimmt nun die Koordinaten der Punkte B_1 bis B_4. Sie sind in der Abbildung rot eingefärbt.

A4 Bestimmt nun ausgehend von den Koordinaten der Punkte B_1 bis B_4 die Koordinaten der Punkte C_1 bis C_4, die auf derselben Höhe liegen wie die Punkte B_1 bis B_4.

B1 Wenn Kinder auf dem Klettergerüst klettern, sind sie stolz, wenn sie es bis nach ganz oben geschafft haben. Aber was ist eigentlich die größte Entfernung, die sie zwischen je zwei Kugeln zurücklegen müssen? Welche zwei Kugeln sind am weitesten voneinander entfernt?

Überlege und rechne zunächst alleine. Vergleiche dann dein Ergebnis mit dem deiner Mitschülerinnen und Mitschüler.

Das Klettergerüst ist relativ klein. Im nächsten Aufgabenteil stellen wir uns vor, es würde zu einer Pyramide erweitert werden. Die aktuelle Spitze wäre auch die Spitze der Pyramide. Die Ecken D_1 bis D_4 würden auf den Kanten der Pyramide liegen. Seht euch zur Veranschaulichung die Skizze an.



C1 Stelle jeweils die Parametergleichungen der vier von den Dreiecken FD_1D_2, FD_2D_3, FD_3D_4 und FD_4D_1 aufgespannten Ebenen auf.

C2 Im weiteren Verlauf unterstellen wir, dass der Sand eine Ebene bildet. Wir nennen diese Ebene den Boden. Stelle eine Ebenengleichung des Bodens auf.

Die Schnittgeraden der Ebenen aus Teilaufgabe **C1** miteinander und mit dem Boden sind die Kanten der Pyramide. Bestimme die Schnittgeraden der Ebenen mit dem Boden.

C3 Auch die Pyramide soll Kugeln an den Ecken haben. Bestimmt die Koordinaten der neuen Kugeln auf dem Boden. Stellt Euch vor, das Klettergerüst würde so erweitert, dass auch überall in der Pyramide Seile zum Klettern sind. Wie groß ist der maximale Abstand zwischen je zwei Kugeln in der Pyramide? Ist dies auch die längste Strecke, die man klettern kann?

C4 Wäre auf dem Spielplatz genug Platz für diese Pyramide?

Spaziergang 09

Schaukeln mit Sinus und Co

Spielplatz am Michaelsberg

- Winkel
- Weg-Zeit-Diagramm
- Transformation der Sinusfunktion
- Ableitungen
- Extrempunkte

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Spielplatz am Michaelsberg

Zeit
90 Minuten

Material
Geodreieck, Zollstock, Schreibmaterial, Stoppuhr. Taschenrechner, Wasserwaage

Begebt euch auf den Spielplatz am Michaelsberg. Dort befinden sich vier Schaukeln, anhand derer ihr euch im Verlauf der Unterrichtsstunde erarbeiten werdet, welche maximale Geschwindigkeit ihr bei moderatem Hin- und Herschaukeln erreicht und an welcher Stelle der Schaukelschwingung diese Maximalgeschwindigkeit angenommen wird.

A1 Bildet Fünfergruppen und verteilt folgende Aufgaben:

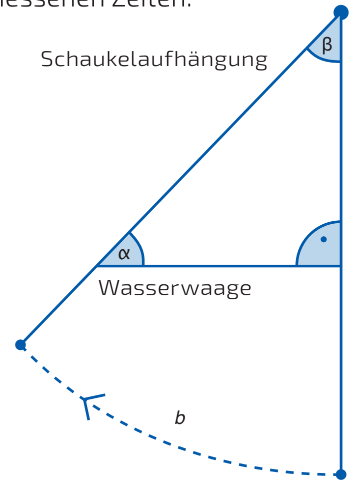
- Person 1 schaukelt möglichst gleichmäßig. Sobald sie sich eingeschaukelt hat, gibt sie das Startsignal zum Messen für die anderen *(fliegender Start)*. Der Zeitpunkt des Starts entspricht der Zeit $t = 0$ und erfolgt beim Durchschwingen der Ruhelage in Richtung vorne.
- Person 2 misst jeweils alle Zeiten, zu denen sich der Schaukelsitz am Ausgangspunkt (in der Ruhelage) befindet.
- Person 3 misst jeweils alle Zeiten, zu denen der Schaukelsitz am weitesten nach vorne geschaukelt wird.

Wusstest du schon?

Ein Überschlag ist mit Schaukeln, die an Seilen aufgehängt sind, nicht möglich. Sobald man über die Horizontale hinausschwingt, schwingt man nicht auf der Kreisbahn zurück, sondern fällt herab. Dabei erschlaffen die Schaukelseile und der Schwung ist weg. Nur bei Schaukeln, die starr an Stangen aufgehängt sind, ist ein Überschlag möglich.

- Person 4 misst jeweils alle Zeiten, zu denen der Schaukelsitz am weitesten nach hinten geschaukelt wird.
- Person 5 stellt sich so neben den Schaukelnden, dass sie die Position des Schaukelbrettes bei der maximalen Auslenkung nach vorne messen kann. Dazu kann man zum Beispiel die Position am Boden mit einem Stein markieren.

Es sollen mindestens vier Durchgänge des Hin- und Herschaukelns gemessen werden. Führt den Versuch durch und notiert euch die gemessenen Zeiten.



A2 Bestimmt den Winkel β der maximalen Schaukelschwingung nach vorne. Haltet dazu die Schaukel straff an der Aufhängung und bewegt das Schaukelbrett auf dem Kreisbogen, bis es oberhalb der von Person 5 markierten Position ist. Betrachtet die Skizze und haltet die Wasserwaage dementsprechend parallel zum Boden an die Aufhängung der Schaukel. Messt nun den Winkel α, der zwischen der Wasserwaage und der Schaukelaufhängung entstanden ist. Mithilfe dieses Winkels könnt ihr nun den Winkel β ermitteln.

A3 Bestimmt den Weg, den das Schaukelbrett beim Schaukeln zwischen Ruhelage und vorderster Position zurückgelegt hat. Berücksichtigt dabei, dass es sich dabei um einen Teil eines Kreisbogens handelt, weswegen dieser Weg als Bogenlänge b bezeichnet wird.

A4 Übertragt eure ermittelten Werte in ein geeignetes Koordinatensystem. Tragt hierzu auf der x-Achse die Zeit und auf der y-Achse die vorzeichenbehaftete Bogenlänge (positive Werte für Auslenkungen nach vorne, negative Werte für Auslenkungen nach hinten) der Schaukelschwingung auf. Die Zeitpunkte, an denen sich der Schaukelsitz in der Ausgangsposition befindet, sollen die Nullstellen eurer Funktion sein. Die Zeitpunkte, an denen am weitesten nach vorne (am weitesten nach hinten) geschaukelt wurde, sollen die Hochpunkte (Tiefpunkte) darstellen. Verbindet eure eingezeichneten Punkte zu einer Funktion f, die einer Sinusfunktion ähnelt.

B1 Nenne charakteristische Eigenschaften der allgemeinen Sinusfunktion.

B2 Bestimme eine Transformation g mit $g(x) = a \cdot \sin(c \cdot x)$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, welche die Funktion f näherungsweise darstellt.

Benutze hierbei die durchschnittliche Periodenlänge deiner gemessenen Schwingungen aus Teilaufgabe **A1**.

C1 Skizziere die Ableitung der Funktion g. Kennst du die entstehende Funktion?

C2 Interpretiere die Bedeutung der Ableitung im Sachzusammenhang.

C3 Bestimme mithilfe der Funktionsgleichung von g die maximale Geschwindigkeit, die beim Schaukeln erreicht wird. Gib zudem alle Stellen der Funktion g an, bei denen die maximale Geschwindigkeit angenommen wird.

Weißt du noch?

Parameter können das Aussehen eines Funktionsgraphen beeinflussen.
Für $g(x) = a \cdot \sin(c \cdot x)$ mit $a, c \in \mathbb{R}$ ist a die Amplitude der Schwingung. Der Faktor c bestimmt die Periodenlänge T der Funktion g:

$$c = \frac{2\pi}{T}$$

Spaziergang 10

PYRAMIDE – Viel Spat mit Vektoren!

Kreishaus

- Geraden- und Ebenengleichungen
- Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
- Abstände
- Spatprodukt

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Pyramide vor dem Kreishaus, Kaiser-Wilhelm-Platz 1

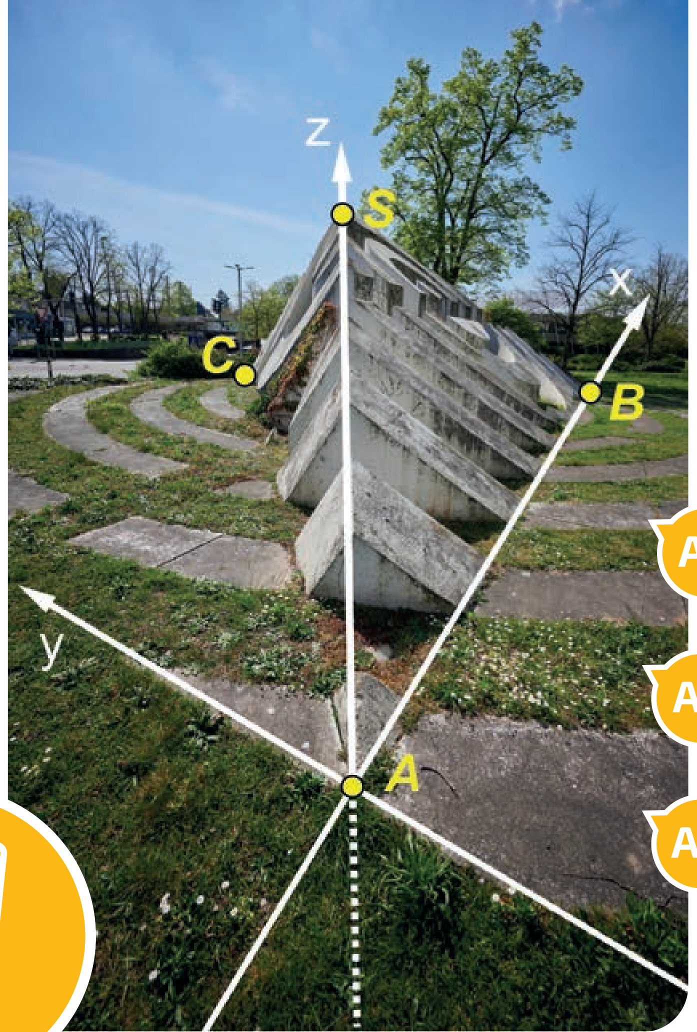
Zeit
90 Minuten

Material
Zollstock/Maßband, Taschenrechner, Schreibmaterial

Vor dem Kreishaus an der Ecke Wilhelmstraße/Kaiser-Wilhelm-Platz ist eine Wiese mit einem pyramidenförmigen Kunstwerk. Es ist zu hoch, um die Höhe direkt abzumessen, aber mit eurem Wissen über Geraden und Ebenen könnt ihr die Höhe bestimmen.

Im Folgenden seien die Punkte A, B, C und S die Eckpunkte der Pyramide (siehe Abbildung). Nehmt den Eckpunkt A (0|0|0) als Ursprung eures Koordinatensystems und die Gerade durch die Punkte A und B als x-Achse. Die y-Achse soll dabei senkrecht zur Kante AB verlaufen und in der Bodenebene liegen. Die z-Achse zeigt senkrecht nach oben.

A1 Messt die Koordinaten der Punkte *A*, *B* und *C* aus. Stellt jeweils die Gleichungen der Geraden durch *A* und *B* sowie der Geraden durch *A* und *C* in Parameterform auf.



A2

A3

A4

Wusstest Du schon?

Die Pyramide wurde 1982 von einem Hennefer Bildhauer aufgestellt. Sie besteht aus 19 Teilen, die zusammen Kreise bilden, welche sinnbildlich für die 19 Gemeinden des Rhein-Sieg-Kreises stehen.

A2 Macht euch Gedanken, wie ihr die Koordinaten eines Punktes auf der von *A*, *B* und *S* aufgespannten Ebene messen könnt, der nicht auf der Geraden durch *A* und *B* liegt. Bestimmt die Koordinaten von diesem Punkt und stellt die Gleichung der Ebene durch *A*, *B* und *S* in Parameterform auf.

Hinweis: *Ein Punkt auf der Geraden durch A und S bietet sich dabei an.*

A3 Messt die Koordinaten irgendeines zweiten Punktes auf der Geraden durch *C* und *S*. Stellt die Gleichung der durch *C* und *S* verlaufenden Geraden in Parameterform auf.

A4 Bestimme die Koordinaten des Punktes *S*, indem du den Schnittpunkt der durch *A*, *B* und *S* verlaufenden Ebene mit der durch *C* und *S* verlaufenden Geraden bestimmst. Wie hoch ist die Pyramide?

B1 Berechne die Längen aller sechs Kanten der Pyramide.

B2 Berechne das Volumen der Pyramide. Ignoriere dabei, dass das Bauwerk keine vollständige Pyramide ist. Schätze, wie viel vom Volumen der Pyramide das Bauwerk tatsächlich ausfüllt.

Weißt du noch?

Das Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$ ist das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und einem dritten Vektor $\vec{c}$. Es ergibt das orientierte Volumen des durch die drei Vektoren aufgespannten Spats (Parallelepipeds). Will man nun das Volumen einer dreiseitigen Pyramide berechnen, muss man den Betrag des Spatproduktes durch sechs teilen.

$$V_{\text{Parallelelepiped}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{6}$$

Spaziergang II

Steigungen überwinden – barrierefrei mit Sinus und Cosinus

Siegburg Bahnhof

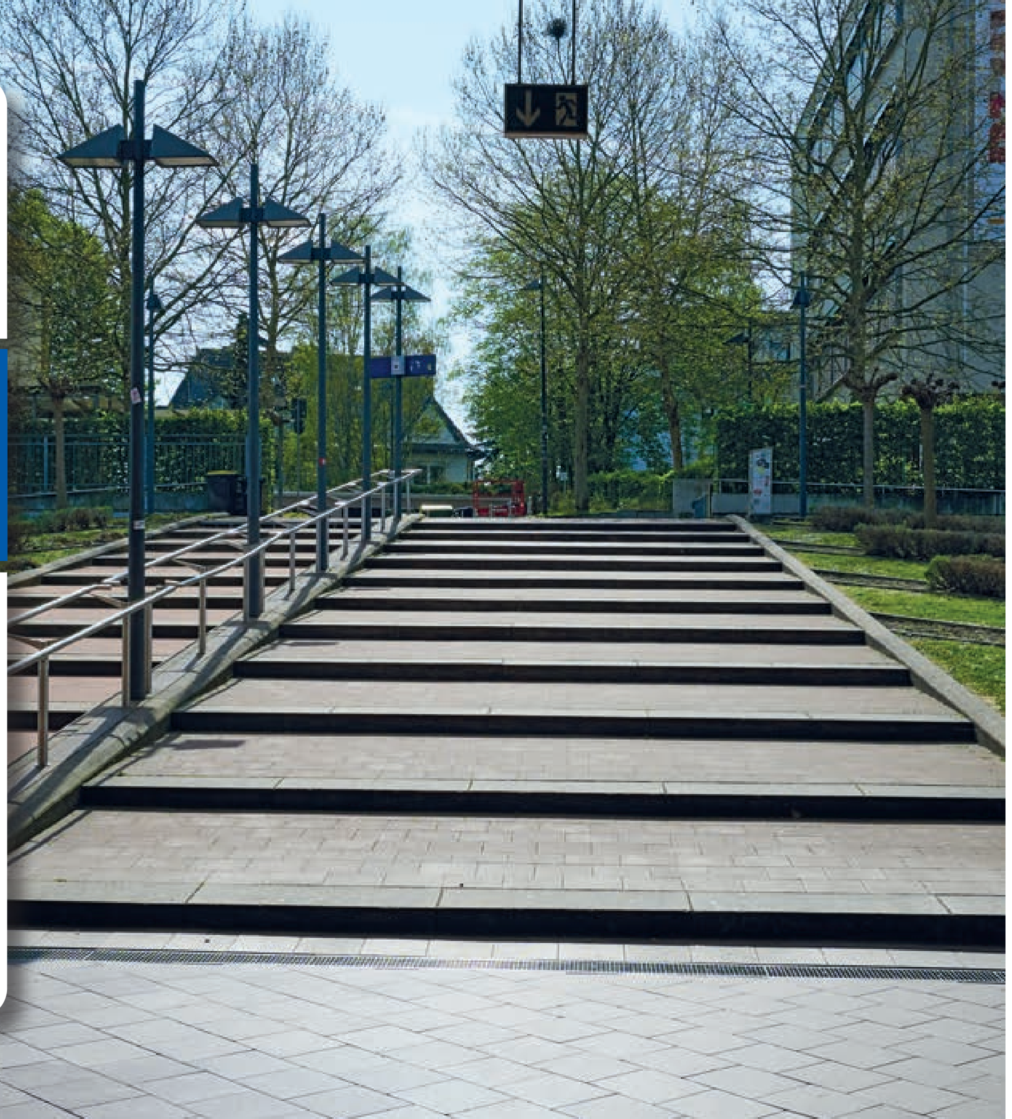
- Steigung
- Trigonometrische Funktionen
- Geraden- und Ebenengleichungen
- Lagebeziehungen von Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Treppe am Bahnhof Siegburg zur Hochstraße

Zeit
90 Minuten

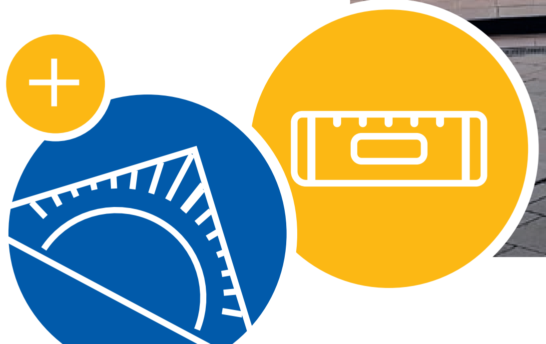
Material
Wasserwaage, Geodreieck, Zollstock, Taschenrechner, Schreibmaterial



Wenn ihr durch den Bahnhof hindurch und an den Gleisen der Stadtbahnlinie 66 vorbeigeht, kommt ihr zu einer breiten Treppe, die zur Hochstraße hinaufführt. Wie ihr seht, gibt es außer der Treppe noch Rampen, die es zum Beispiel Personen mit Rollstuhl und Eltern mit Kinderwagen ermöglichen, den Bahnhof von dieser Seite aus zu betreten. Wenn ein Ort für Menschen mit eingeschränkter Mobilität zugänglich ist, nennt man ihn barrierefrei. Damit Treppen durch Rampen ersetzt werden können, muss dafür genug Platz vorhanden sein. Um die Gleise erreichbar zu machen, nutzt man dagegen oft Aufzüge.

A1 Geht zunächst zur Treppe und messt die Höhe einer Stufe.

Wie ihr sehen könnt, sind die Stufen nicht eben, sondern geneigt. Messt den Steigungswinkel der Stufen mit Wasserwaage und Geodreieck. Berechnet, wie viel Höhe man insgesamt pro Stufe gewinnt. Berechnet dann die Höhe der gesamten Treppe.



A2 Wir wollen nun ein geeignetes Koordinatensystem wählen. Nehmt den Eckpunkt T_o, in dem die Treppe und die obere Rampe aufeinandertreffen, als Ursprung des dreidimensionalen Koordinatensystems. Die *x*-*y*-Ebene soll wasserwaagenben sein. Wählt einen Maßstab und legt die Koordinaten des unteren Eckpunktes T_u der Treppe an dieser Seite fest. Er soll in der *x*-*z*-Ebene liegen.

A3 Stelle dir vor, anstelle der Treppe wäre eine Rampe gebaut worden. Bestimme eine Gleichung der Ebene, in der diese Rampe liegen würde. Welchen Steigungswinkel hätte diese Rampe?

B1 Messt mithilfe der Wasserwaage und des Geodreiecks den Steigungswinkel der oberen Rampe. Messt außerdem die Länge der oberen Rampe bis zu den Abflüssen und berechnet die Höhe, die die Rampe überwindet. Legt auf Grundlage dieser Ergebnisse die Koordinaten des Eckpunktes S_o fest.

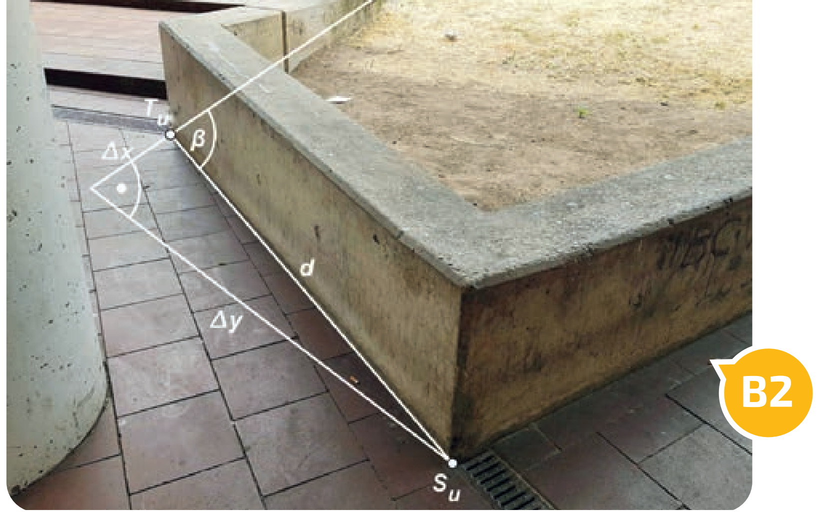
Hinweis: *S_o liegt in der y-z-Ebene.*

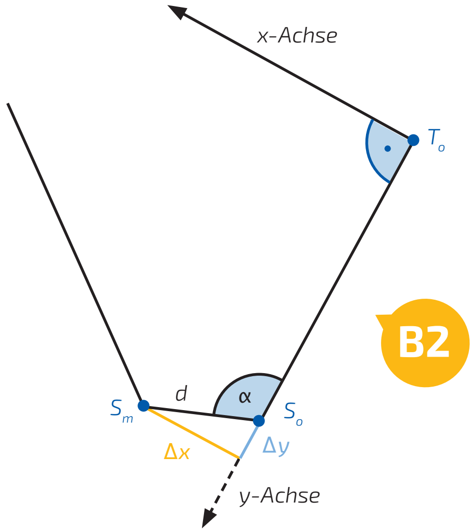
B2 Teilt eure Gruppe in zwei Teams auf. Das erste Team misst den Abstand *d* der beiden Eckpunkte S_o und S_m auf der mittleren Ebene und den zur Bestimmung der Koordinaten von S_m benötigten Winkel α. Berechnet die Koordinaten von S_m. Die Abbildung kann euch helfen.

Das zweite Team bestimmt auf dieselbe Art und Weise ausgehend von T_u die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes S_u auf der unteren Ebene, indem der Winkel β sowie der Abstand *d* zwischen den Punkten T_u und S_u gemessen werden. Die rechte Abbildung hilft euch dabei.

Tauscht anschließend die berechneten Koordinaten der Punkte aus.

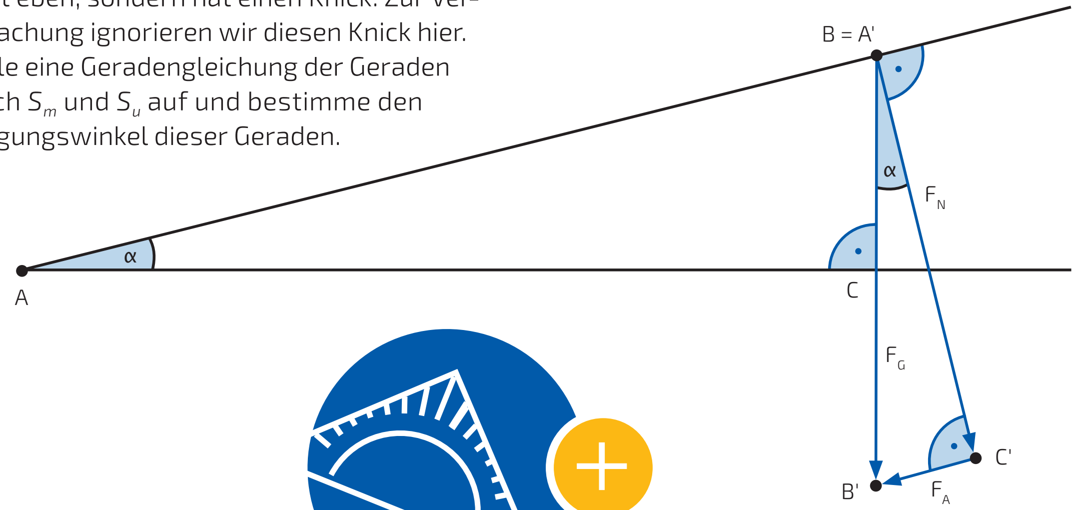
B3 Bestimme eine Gleichung der Geraden durch T_o und S_o. Überprüfe, ob sie in der Ebene aus Teilaufgabe **A3** liegt.





Die Rampen sind gebaut worden, damit der Bahnhof barrierefrei ist. Je nachdem, wie steil eine Rampe ist, ist ihre Nutzung unterschiedlich anstrengend. Das liegt daran, dass die auf einen Gegenstand einwirkende Hangabtriebskraft F_A umso größer ist, je steiler die Rampe ist. Die auf ein Objekt am Hang einwirkenden Kräfte (Gewichtskraft F_G, Hangabtriebskraft F_A und Normalkraft F_N) sind in der Abbildung dargestellt. Die Normalkraft F_N steht im rechten Winkel zur Rampe. Die Hangabtriebskraft F_A ist parallel zur Rampe.

B4 Wie du siehst, ist die untere Rampe nicht eben, sondern hat einen Knick. Zur Vereinfachung ignorieren wir diesen Knick hier. Stelle eine Geradengleichung der Geraden durch S_m und S_u auf und bestimme den Steigungswinkel dieser Geraden.



C1 Die Gewichtskraft F_G eines Rollstuhlfahrers mit einer Gesamtmasse von 90 Kilogramm beträgt 883 Newton. Wie groß ist die Hangabtriebskraft, die auf den Rollstuhlfahrer einwirkt, wenn er sich auf den vorhandenen Rampen befindet? Wie groß wäre sie auf der Rampe aus Teilaufgabe **A3**?

Hinweis: *Überlege dir zunächst, warum die Dreiecke ABC und A'B'C' ähnlich sind und daher die beiden mit α bezeichneten Winkel in der Abbildung tatsächlich gleich groß sind.*

Wusstest Du schon?

Überall in der Welt begegnen uns Kräfte. Man kann sie nicht direkt sehen, man erkennt sie nur an ihrer Wirkung. Sie können einen Körper zum Beispiel verformen oder beschleunigen. An einer schiefen Rampe wirkt auf einen Körper die Gewichtskraft F_G, welche sich in die Hangabtriebskraft F_A und die Normalkraft F_N zerlegen lässt. Die Gewichtskraft berechnet sich aus dem Produkt der Masse und der Erdbeschleunigung (9,81 Meter je Quadratsekunde). Die Einheit der Kraft ist Newton. Ein Newton entspricht einem kg • m/s^2. Die Hangabtriebskraft lässt das Objekt auf der Rampe nach unten rutschen. Die Normalkraft wirkt senkrecht auf die schiefe Rampe.

Spaziergang 12

Crescendo am Marktplatz

Stadtmuseum

- Parameterform der Geraden
- Schnittwinkel und Schnittpunkte von Geraden
- Länge von Vektoren
- Abstand zweier Punkte

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Stadtmuseum

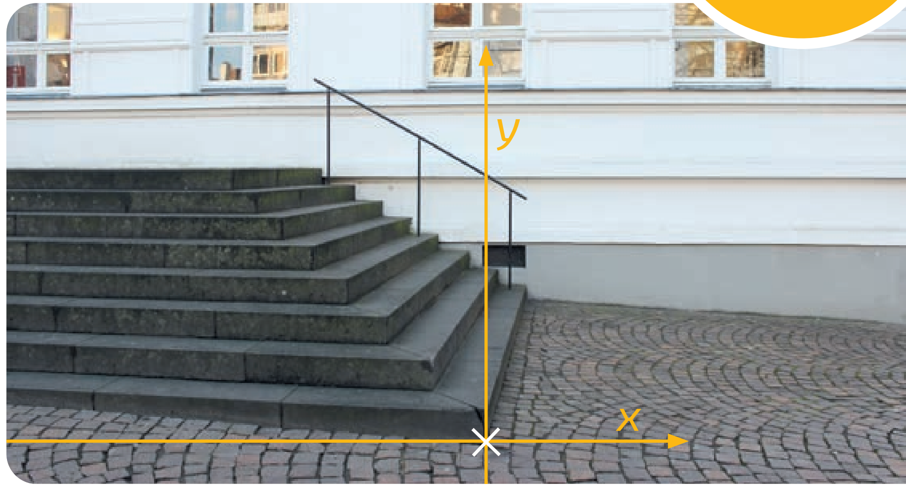
Zeit
90 Minuten

Material
Zollstock, Stoppuhr, Schreibmaterial

Das Siegburger Stadtmuseum, das 1826 im klassizistischen Stil über dem erhaltenen Gewölbe des mittelalterlichen Rathauses erbaut wurde, ist das Geburtshaus des Komponisten Engelbert Humperdinck. Er hat zum Beispiel die bekannte Märchenoper „Hänsel und Gretel" komponiert. Heute ist das Gebäude ein Museum zur Geschichte Siegburgs. Es werden auch immer wieder Ausstellungen zeitgenössischer Künstler dort gezeigt. Seit 2014 ist es mit der Siegburger Stadtbibliothek verbunden.

Nimm für die Bearbeitung der Aufgaben an, dass die Steigung des Marktplatzes im Bereich vor dem Stadtmuseum an allen Stellen gleichmäßig verläuft.

A1 Zeichne die Schnittgerade von Treppe und Marktplatz (siehe blaue Linie in der ersten Abbildung) in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Miss dazu einen Punkt, der auf der gesuchten Geraden liegt. Nimm als zweiten Punkt den Koordinatenursprung an der weißen Markierung (siehe zweite Abbildung). Die x-Achse soll dabei parallel zur Kante der obersten Treppenstufe verlaufen.

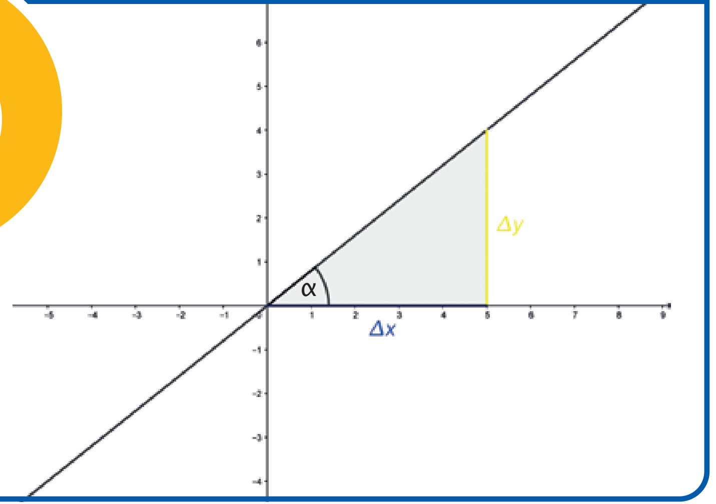


Somit hat die oberste Treppenstufe die Steigung Null. Die y-Achse zeigt senkrecht nach oben.

Weißt du noch?

Die Steigung m einer Geraden ist der Tangens des Steigungswinkels α. Es gilt:

$$m = \tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



A2 Ermittle mithilfe deiner Messungen eine Parameterform der Geraden.

A3 Bestimme die Steigung der Geraden. Gib auch die prozentuale Steigung an. Bestimme den Steigungswinkel des Marktplatzes.

*Nutze für die Bearbeitung des Aufgabenteils **B** dasselbe Koordinatensystem wie bisher.*

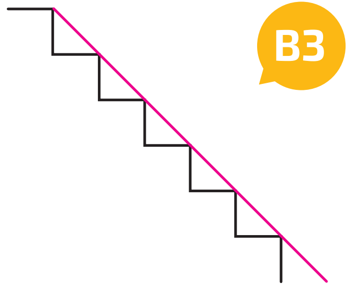
B1 Stelle dir vor, auf den rechten Treppenaufgang solle eine Kinderwagenrampe gelegt werden. Bestimme die Geradengleichung des Querschnitts der Rampe, wie sie in der Abbildung skizziert ist, in Parameterform. Markiere die gemessenen Punkte im Koordinatensystem.

B2 In welchem Winkel schneidet die Rampe den Marktplatz?

B3 Unter dem Aspekt der Barrierefreiheit sollen auch Rollstuhlfahrerinnen und Rollstuhlfahrer eine Rampe nutzen können. Diskutiert, ob die Rampe, so wie ihr sie gerade betrachtet habt, auch für Personen mit Rollstuhl realistisch und sinnvoll ist.

B4 Rollstuhlrampen im öffentlichen Bereich sind mit maximal sechs Prozent Steigung anzubringen. Entscheidet, ob eine Rampe unter den Umständen baulich verwirklicht werden könnte. Begründet eure Entscheidung rechnerisch.

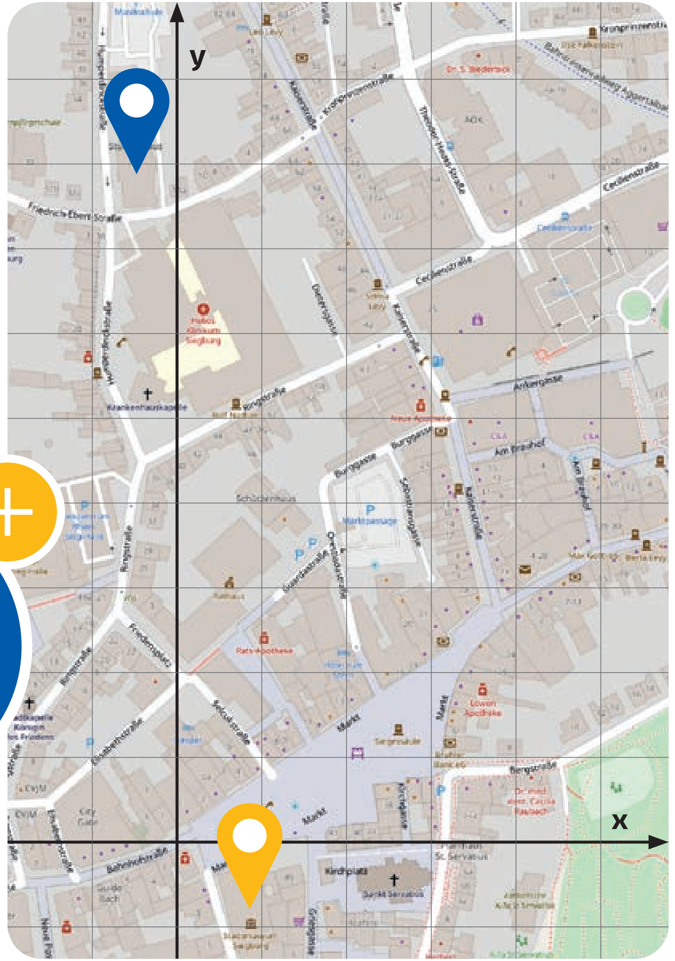
B5 Was für andere Möglichkeiten gäbe es, Barrierefreiheit für das Stadtmuseum zu verwirklichen? Diskutiert eure Ideen.



B3

Wusstest du schon?

Engelbert Humperdinck war ein großer Freund von Richard Wagners Musik. 1880 konnte Humperdinck Wagner in Italien besuchen und begann eine enge Zusammenarbeit mit ihm. Wagner hatte großen Einfluss auf Humperdinck und seine Musik. Erst später fand er wieder zu seinem eigenen, stark von Volksliedern inspirierten Stil zurück. Nach Wagners plötzlichem Tod 1883 unterrrichtete Humperdinck dessen Sohn Siegfried, der später die Bayreuther Festspiele leitete.



Die Musikschule der Stadt Siegburg ist nach dem hier geborenen Komponisten Engelbert Humperdinck benannt. Schon sehr früh wurde die musikalische Begabung des jungen Humperdinck deutlich. Wenn ein Kind heute Musikunterricht bekommt, findet dieser häufig in der Musikschule der Stadt in der Humperdinckstraße 27 statt.

*Für den Aufgabenteil **C** benötigst du ein neues Koordinatensystem. Orientiere dich dazu an der Karte. Wir vernachlässigen hier die in Aufgabenteil **A** berechnete (geringe) Steigung des Marktplatzes.*

C1 Ermittelt eure durchschnittliche Schrittgeschwindigkeit.

C2 Findet auf der Karte zwei verschiedene Wege, die von eurem Standort am Stadtmuseum zur Humperdinckmusikschule führen. Tragt die beiden Wege in den Stadtplan ein.

C3 Lauft beide Wege ab und schätzt eure Position an markanten Punkten des Weges, wo ihr die Richtung ändert. Euer Standpunkt vor dem Museum dient dabei als Koordinatenursprung und das Koordinatensystem wird wie auf der Karte gewählt. Beschreibt beide Wege jeweils durch einen Vektorzug.

***Hinweis:** Ihr könnt einmal die Runde laufen, auf dem einen Weg hin und auf dem anderen zurück. Nutzt die Karte und den Satz des Pythagoras, um anhand eurer gelaufenen Strecke von Punkt zu Punkt eure Position im Koordinatensystem abzuschätzen.*

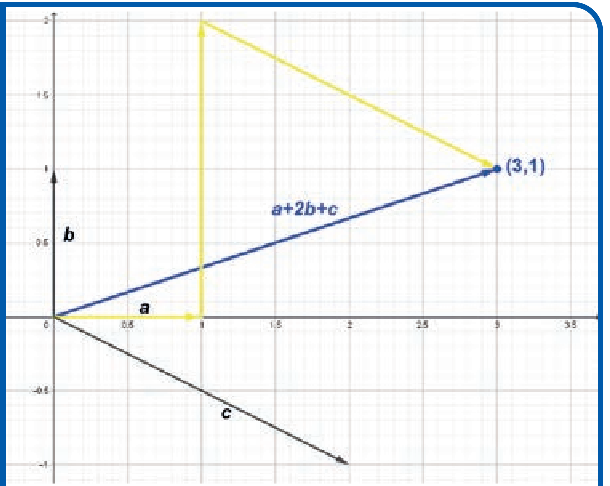
C4 Welcher der beiden Wege ist kürzer? Belegt eure Entscheidung rechnerisch. Nutzt hierzu die Formel zur Berechnung der Länge von Vektoren.

Wusstest du schon?

Ein Vektorzug ist ein Vektor $\vec{u}$, der sich als Summe von Vielfachen von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ darstellen lässt: $\vec{u} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel: Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ wie auf dem Bild.

Dann erhalten wir einen Vektorzug: $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



Impressum

Projektleitung
Dr. Antje Kiesel
Dr. Thoralf Räsch
Universität Bonn
Mathematik-Zentrum
Endenicher Allee 60, 53115 Bonn
spaziergaenge@math.uni-bonn.de

Projektteam
Sivar Abdelrahman, Gabriela Brüll, Gerrit Keller,
Maximilian König, Yuliya Krivitskaya,
Alexandra Mauel, Annika Mester, Yannick Müller,
Julia Schuster, Leonard Strotmann

Autorenteam
Marek Müller, Katharina Thome, Nina Vorreyer

Gestaltung
Ines Wegge-Schatz
www.designlevel2.de

Weitere Informationen finden Sie auf unserer Homepage
https://www.mathematics.uni-bonn.de/mathematik-in-bonn/schulportal/spaziergaenge

Bildnachweis
Volker Lannert
Seite: 2, 3, 8, 18, 19, 20, 23, 24 (Foto unten), 27, 28, 33, 34, 37, 50, 51, 52, 53, 54, 58 (Foto oben), 60, 61 (Foto oben), 63 (Foto oben), 66, 67

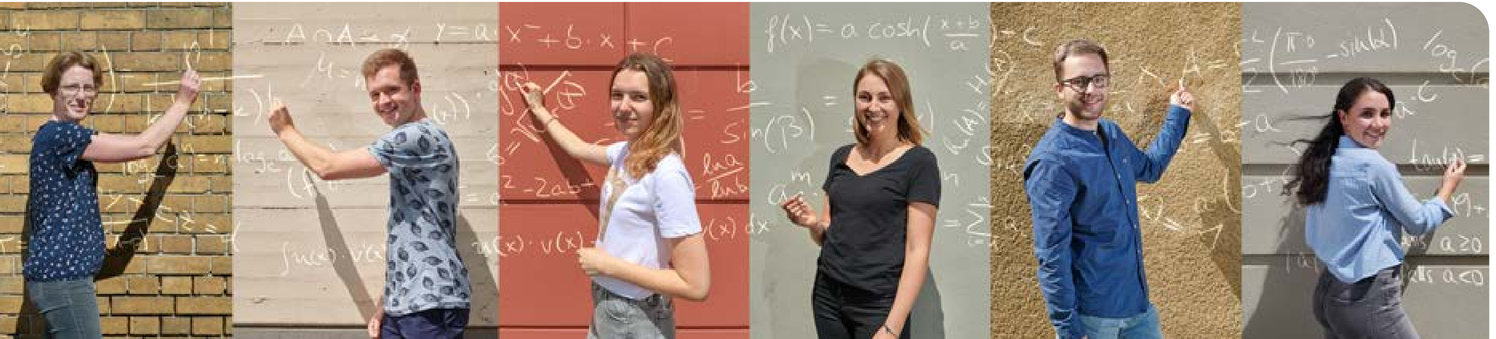
Projektteam/Autorenteam
Seite: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 24 (Abbildung oben) 25, 26, 29, 30, 31, 32, 36, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 55, 56, 57, 58 (Abbildung unten), 59, 61 (Foto unten), 62, 63 (Abbildung unten), 65

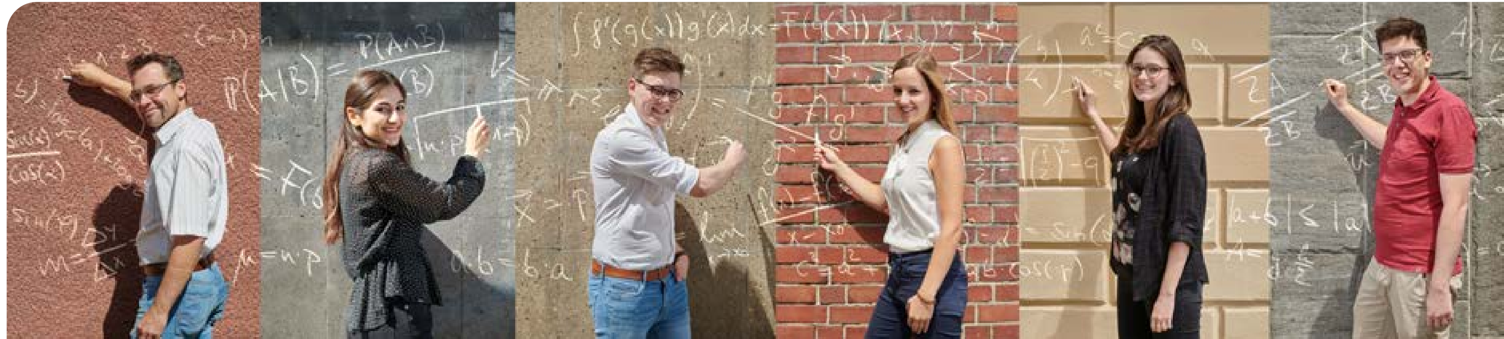
www.openstreetmap.org
Seite: 14, 64

Lizenzfreie Abbildungen
Seite: 26

Klimaneutral
Druckprodukt
ClimatePartner.com/10704-2007-1074

Projektteam
v.l.n.r.: Dr. Antje Kiesel, Leonard Strotmann, Yuliya Kryvitskaya, Annika Mester, Maximilian König, Julia Schuster, Dr. Thoralf Räsch, Sivar Abdelrahman, Yannick Müller, Alexandra Mauel, Gabriela Brüll, Gerrit Keller





MATHEMATISCHE
SPAZIERGÄNGE IN

SIEGBURG

50°47'47,3'' N 7°12'40,1"O

Universität Bonn
Mathematik-Zentrum
Endenicher Allee 60
53115 Bonn
spaziergaenge@math.uni-bonn.de

JOACHIM HERZ STIFTUNG

hausdorff center for mathematics

UNIVERSITÄT BONN