MATHEMATISCHE SPAZIERGÄNGE IN

BONN

50°43'42,5"N 7°5'2,3"O

Lernheft für die Sekundarstufe II

hausdorff center for mathematics

UNIVERSITÄT BONN

Grußwort

Liebe Schülerinnen und Schüler, liebe Lehrerinnen und Lehrer,

vor euch liegt ein kleines Heft, das mit sehr viel Liebe zum Detail von Lehramtsstudierenden der Mathematik an der Universität Bonn entworfen und gestaltet wurde. Sie möchten euch dazu einladen, Mathematik im Alltag zu entdecken und dabei die Freude an neuen Erkenntnissen und tieferem Verständnis zu erleben, die auch die Forscher*innen der Universität Bonn immer wieder beflügelt. Die Spaziergänge sollen das an euch gerichtete und vielfältige Wissenschaftsangebot im Rahmen der jungen Uni, wie beispielsweise die Kinderuni, die Wissenschaftsrallyes oder auch das Frühstudium (FFF), weiter ergänzen. Wer sich mit dieser Broschüre auf den Weg macht, der wird, davon bin ich überzeugt, in Zukunft seine Umwelt mit anderen Augen betrachten und vielleicht auch eine ganz neue Einstellung zur Mathematik entwickeln.

Wozu kann man sie nicht alles brauchen! Was hatten Menschen vor Jahrtausenden nicht schon für Ideen, um die ihnen gestellten Aufgaben mithilfe mathematischer Zusammenhänge zu lösen! Und was sind das doch für spannende Regeln, die sich als mathematische Formeln beschreiben lassen, denen die Natur in so vielen Fällen folgt! Und warum sie dies tut, das erfahrt ihr nebenbei auch noch.

So lädt dieses kleine Heft euch zur Beschäftigung mit der Mathematik ein. Ihr werdet unter anderem architektonische Fragestellungen beantworten, den Verkehr in unserer Stadt untersuchen und auch Ludwig van Beethoven begegnen. Dass ihr zusätzlich in unserer schönen Stadt Bonn so manche Details entdecken werdet, an denen ihr wahrscheinlich, wie auch ich bisher, achtlos vorbeigegangen seid, ist nur ein weiterer schöner Nebeneffekt.

Ich wünsche euch viel Spaß dabei.

Prof. Dr. Karin Holm-Müller
Prorektorin für Studium und Lehre

Bonn, 2020

Liebe Schülerinnen und Schüler,
liebe Lehrerinnen und Lehrer,

Mathematik lässt sich erleben und entdecken – überall in unserer Stadt! Mit dem Projekt „Mathematische Spaziergänge in Bonn“ möchten wir Sie dazu ermuntern, Mathematik auch außerhalb des Klassenzimmers zu betreiben. Sie erhalten die Chance, das in der Schule gelernte Wissen an mathematischen Fragestellungen anzuwenden und zu festigen, die eng mit der Architektur und der Natur der Stadt Bonn verbunden sind. Uns liegt es am Herzen zu zeigen, dass Mathematik überall zu finden ist und diese uns draußen in unserer Stadt mit spannenden Fragestellungen fesseln kann.

An der Universität Bonn sind im Rahmen von Bachelorarbeiten im Lehramtsfach Mathematik die Aufgaben für die Mathematischen Spaziergänge entstanden. Die Lehrerinnen und Lehrer von morgen machen sich also schon heute Gedanken, wie man den Schulunterricht bereichern kann. Wir schicken euch an viele Orte. Überall werdet ihr messen, zählen und rechnen. Die Aufgaben sind so konzipiert, dass man sie nur vor Ort lösen kann, also abseits des Klassenzimmers. Und das ist auch unser Ziel: Mathematik soll draußen in unserer schönen Stadt erfahren werden.

Ein paar Dinge sind uns wichtig:

- Da ihr viele Messungen durchführt, ist bei allen Rechnungen das Runden explizit erlaubt. Anders als sonst geht es hier nicht darum, Ergebnisse ganz exakt (z. B. in Abhängigkeit eines Wurzelausdrucks oder von π) anzugeben. Ihr dürft eure Zwischenergebnisse runden und mit den gerundeten Werten weiterrechnen. Natürlich sollt ihr alle nötigen Formeln exakt anwenden.
- Die meisten Aufgaben sind so gestaltet, dass man sie mit Stift, Papier und Taschenrechner lösen kann. Nur ganz selten werden eure Handys verwendet, z. B. für das Erstellen von Fotos. Wir wollen hier ganz bewusst nicht in Konkurrenz zu existierenden Mathematik-Apps o.ä. treten, sondern euch vielmehr dazu anregen, die Aufgaben in Ruhe und mit genügend Zeit selbständig zu lösen.
- Die Aufgaben haben verschiedene Aufgabenteile (A, B, C, D und E), die wiederum Teilaufgaben haben. Der Schwierigkeitsgrad ist ansteigend. Helft euch im Team und versucht so, möglichst viele Aufgaben zu lösen.

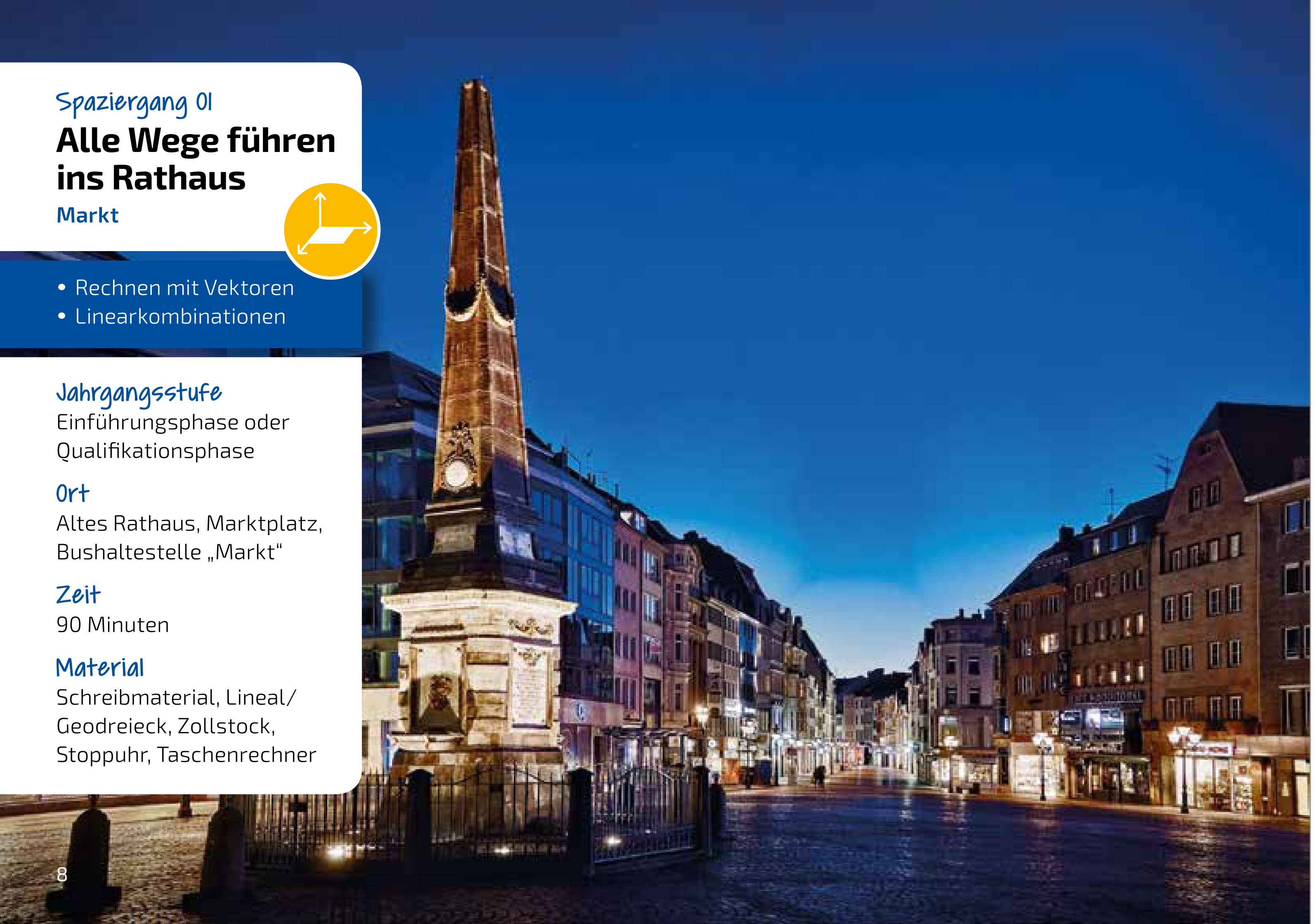
Bei Fragen und Anregungen stehen wir unter spaziergaenge@math.uni-bonn.de jederzeit gerne zur Verfügung.

Wir danken der Joachim Herz Stiftung sowie dem Hausdorff Center for Mathematics herzlich für die finanzielle Unterstützung unseres Projektes!

Wir wünschen euch und Ihnen viel Spaß, gutes Gelingen und schönes Wetter bei den Mathematischen Spaziergängen in Bonn.

Das Projektteam, Bonn, Dezember 2024

Spaziergänge im Überblick



Spaziergang 01

Alle Wege führen ins Rathaus

Markt

- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen

Jahrgangsstufe
Einführungsphase oder Qualifikationsphase

Ort
Altes Rathaus, Marktplatz, Bushaltestelle „Markt“

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Lineal/Geodreieck, Zollstock, Stoppuhr, Taschenrechner

Der Bonner Marktplatz ist einer der ältesten Plätze der Stadt. Vor Hunderten von Jahren kreuzten sich hier die Wege der wandernden Völker, der Kaufleute und der Heere. Auch heute herrscht hier ein reges Treiben, sodass der Marktplatz noch immer ein Herzstück Bonns ist.

A1 Gehe zum Rathaus und betrachte das Bodenmuster des Marktplatzes. Finde möglichst viele geometrische Figuren in diesem Muster und notiere sie.

A2 Stelle dir vor, du möchtest das gesamte Muster mit möglichst wenigen Schrittrichtungen ablaufen, ohne dabei das Muster zu verlassen. Wie viele verschiedene Richtungen benötigst du dafür? Skizziere, wie diese aussehen können.

A2

Wusstest du schon?

Eine Linearkombination ist eine Summe von Vielfachen von Vektoren. Das Ergebnis davon ist wieder ein Vektor.

$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Hier ist der Vektor (3, 4, 5) eine Linearkombination der Vektoren (1, 0, 0), (0, 1, 0) und (0, 0, 1) und wird von diesen drei Vektoren erzeugt.

Allgemein gilt:

$\vec{u} = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2 + c \cdot \vec{v}_3$ *mit* $a, b, c \in \mathbb{R}$

Hier ist der Vektor $\vec{u}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ und wird von diesen erzeugt.

A3 Betrachte die linke Abbildung. Sei dort $A = (0|0)$ und $B = (0|a)$.

Bestimme die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sowie anschließend a. Miss dafür die Länge l, die der Länge der beiden Vektoren entspricht, mit dem Zollstock ab.

A4 Begründe, wie du von $(0|0)$ aus mit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ alle Punkte auf dem Muster erreichen kannst, wenn du beliebige Linearkombinationen der beiden Vektoren bilden darfst.

A5 Bildet Zweiergruppen. Jeder von euch wählt nun einen Punkt auf dem Muster und schreibt Instruktionen auf, wie man ihn mithilfe einer Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ vom Koordinatenursprung aus erreichen kann. Tauscht anschließend eure Anweisungen aus und beobachtet, ob der andere am gewünschten Punkt ankommt.

A6 Findest du auch Anweisungen, die nur Linearkombinationen von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ benutzen und aus dem Muster herausführen? Gib ein Beispiel an!

B1 Bestimme die Koordinaten der Punkte C und D. Wähle einen der beiden Punkte für die Teilaufgaben **B2** bis **B5**. Punkt D ist herausfordernder.

B2 Wie lang ist der kürzeste Weg von A nach C bzw. D? Nimm dazu an, dass du dich nur auf den Musterlinien fortbewegen darfst. Wie oft musst du den Vektor $\vec{v}_1$ und wie oft den Vektor $\vec{v}_2$ ablaufen? Kommt es dabei auf die Reihenfolge an?

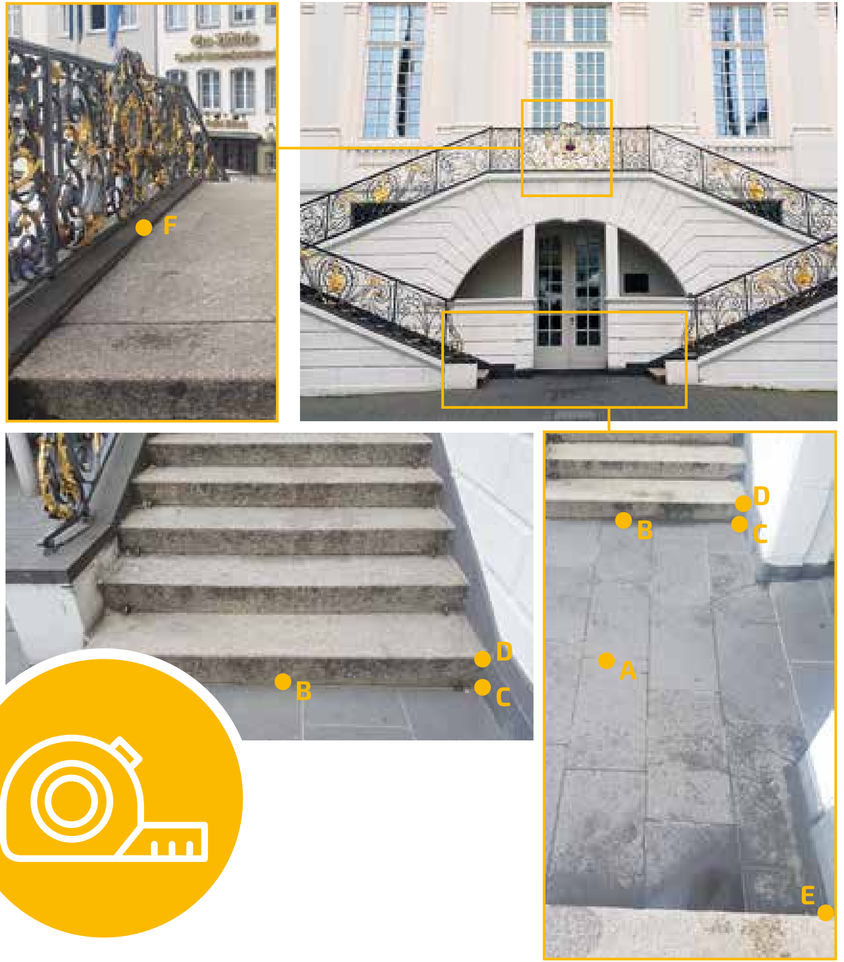
B3 Wie viele unterschiedliche Wege mit der in Teilaufgabe **B2** berechneten Länge existieren?

B4 Wie lang ist der kürzeste Weg, wenn du dich überall entlang bewegen kannst (auch außerhalb der Musterlinien)?

B5 Person 1 läuft den direkten Weg von A nach C bzw. D in 15 Sekunden. Person 2 läuft über die Muster. Beide starten zum selben Zeitpunkt und kommen gleichzeitig an. Wie schnell laufen sie jeweils (in Meter pro Sekunde)?

Wusstest du schon?

Der Bau des Rathauses, wie wir es heute kennen, begann im Jahre 1737 und dauerte knapp ein halbes Jahrhundert. Die Freitreppe wurde Mitte des 18. Jahrhunderts fertiggestellt und seit jeher haben sich auf ihren Stufen und ihrem Plateau zahlreiche bedeutende Ereignisse abgespielt. So hielt zum Beispiel Theodor Heuss 1949 von hier aus nach seiner Wahl zum ersten Bundespräsidenten der Bundesrepublik Deutschland eine Rede.



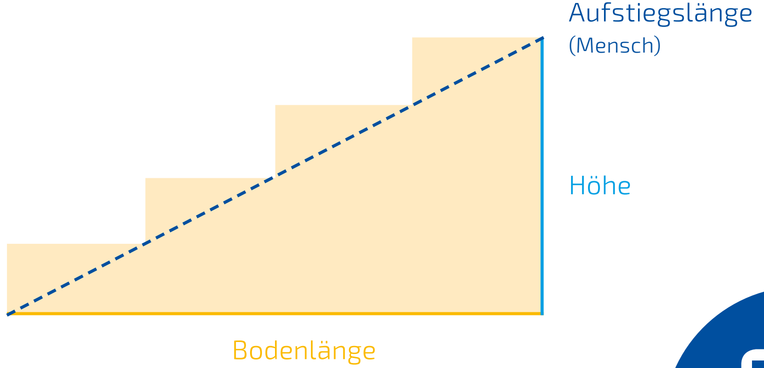
C1 Betrachte die Treppe am Rathaus. Bestimme die Koordinaten der angegebenen Punkte möglichst genau. Wähle dafür ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem und miss die benötigten Strecken.

Hinweis: *Eine gute Wahl des Koordinatensystems ist z. B. folgende: Wähle A (0|0|0), die x-Achse verlaufe durch die Punkte A und B (mit negativer x-Koordinate von B), die y-Achse verlaufe gerade nach oben und die z-Achse orthogonal zu den anderen beiden.*

C2 Stelle dir vor, dass ein Passant beide Treppenabschnitte genau in der Mitte der linken Treppe hochgeht. Welche beiden Vektoren beschreiben jeweils den Weg auf dem ersten und dem zweiten Treppenabschnitt?

C3 Bestimme die Länge des gesamten Aufstiegs. Gehe dabei wieder davon aus, dass die Person in der Mitte der Treppen heraufsteigt und auf der Zwischenetage einen halben Kreisbogen läuft, um den zweiten Treppenabschnitt zu erreichen.

C4 Wie lang ist der Aufstieg für einen Käfer, der, im Gegensatz zum Menschen, die gesamte Tiefe und Höhe jeder Treppenstufe entlanggeht?

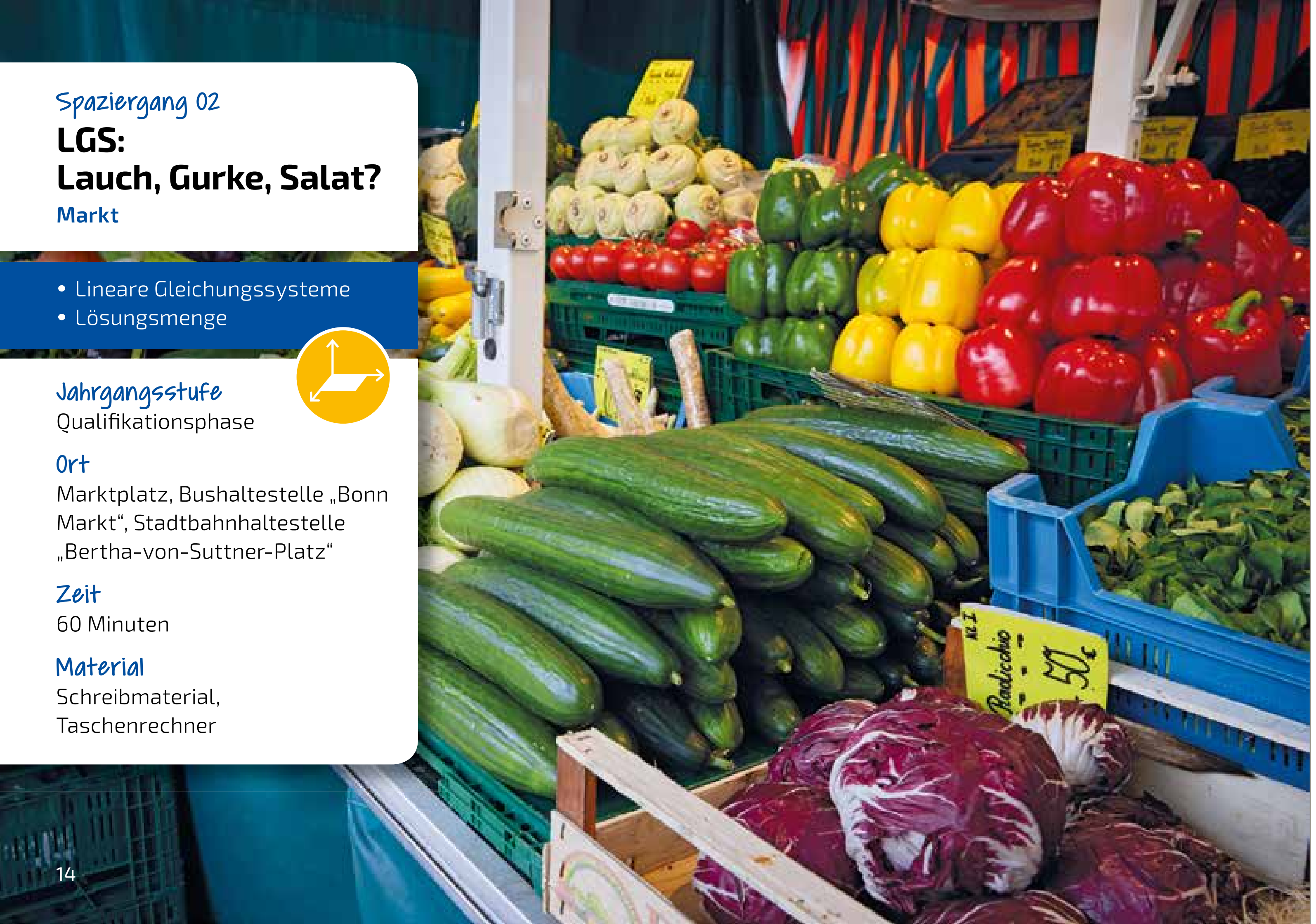


Zwei Passanten (Person 1 und Person 2) unterhalten sich über die Treppe am Rathaus. Person 1: „Das Rathaus ist ein wunderschönes Gebäude, besonders der Treppenaufgang gefällt mir gut!“ Person 2: „Zwei Treppen ergeben überhaupt keinen Sinn! Eine breitere Treppe wäre viel besser, dann könnten große Gruppen gemeinsam hochgehen.“ Person 1: „Die Treppe würde bis auf den Marktplatz reichen. Man müsste einige der Bodensteine zum Gedenken der Bücherverbrennung anderswo platzieren.“ Person 2: „Wäre davon auch 'Kafka: In der Strafkolonie' betroffen?“

D1 Bestimme die Höhe sowie die Aufstiegs- und Bodenlänge einer solchen Treppe. Gehe dabei davon aus, dass die gleiche Anzahl von Treppenstufen und die gleichen Maße der Treppenstufen verwendet werden.

D2 Finde mindestens eine weitere Berechnungsmöglichkeit für die Aufstiegslänge.

D3 Beantworte die Frage von Person 2.



Spaziergang 02

LGS: Lauch, Gurke, Salat?

Markt

- Lineare Gleichungssysteme
- Lösungsmenge

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Marktplatz, Bushaltestelle „Bonn Markt“, Stadtbahnhaltestelle „Bertha-von-Suttner-Platz“

Zeit
60 Minuten

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner

Seit vielen Jahren prägt der Bonner Markt mit seinen Obst- und Gemüseständen die Innenstadt. Viele Bewohner gehen über den Marktplatz und decken sich mit frischen Lebensmitteln ein. Auf dem Markt werden neben einer Vielfalt an Obst und Gemüse auch andere Lebensmittel wie Brot, Käse und Fleisch angeboten. Am Beispiel einer vorgegebenen Einkaufsliste sollst du heute lernen, lineare Gleichungssysteme aufzustellen und zu lösen.

***Hinweis:** Je nach Saison ist zu beachten, dass die in der Aufgabenstellung genannten Erdbeeren nicht immer angeboten werden. Wenn es bei eurem Spaziergang keine Erdbeeren gibt, dann arbeitet stattdessen einfach mit den Preisen von Birnen.*

A1 Eure Schule möchte für eine gesunde Ernährung der Schülerinnen und Schüler kleine Schalen mit Obst bereitstellen und stellt einer Klasse pro Schüler 80 Cent für den Einkauf zur Verfügung. Dabei rundet die Schule das Budget in Euro auf eine ganze Zahl. Es werden Erdbeeren und Bananen auf dem Bonner Markt erworben, wobei jeder Schüler und jede Schülerin 400 Gramm bekommen soll. Ermittle die entsprechenden Preise an einem Marktstand und berechne mithilfe eines linearen Gleichungssystems, wie viel Kilogramm Bananen und Erdbeeren gekauft werden müssen, wenn das gesamte Geld verbraucht werden soll.

A2 Zeichne die beiden Geraden aus dem linearen Gleichungssystem aus Teilaufgabe **A1** in ein Koordinatensystem und bestimme auch graphisch den in Teilaufgabe **A1** berechneten Schnittpunkt.

A3 Zusätzlich zu den Erdbeeren und Bananen können nun auch Äpfel eingekauft werden. Die Bedingungen aus Teilaufgabe **A1** bleiben erhalten. Gib die unterschiedlichen Möglichkeiten an, das Obst zusammenzustellen. Gibt es wieder eine eindeutige Lösung?

A4 Macht nun zu dritt folgendes Experiment: Denkt euch drei Obst- oder Gemüsesorten aus, die man an mindestens drei verschiedenen Marktständen kaufen kann und die nach Gewicht verkauft werden. Zwei von euch gehen nun an je einen der Stände und ermitteln den Preis eines fiktiven Einkaufs. Der dritte von euch ermittelt am dritten Stand den Preis des Einkaufs, der aus der Summe der beiden anderen Einkäufe besteht. Dabei darf keiner die Einzelpreise seines Standes verraten. Erstellt eine Tabelle der folgenden Form:

	Menge des 1. Produktes (z.B. Tomaten) in kg	Menge des 2. Produktes (z.B. Weintrauben) in kg	Menge des 3. Produktes (z.B. Zucchini) in kg	Ermittelter Preis
Einkauf von Emma	A	B	C	p
Einkauf von Ben	D	E	F	q
Einkauf von Isabell	$A+D$	$B+E$	$C+F$	r

Stellt ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{lllllll} Ax & + & By & + & Cz & = & p \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & q \\ (A+D)x & + & (B+E)y & + & (C+F)z & = & r \end{array}$$

auf und löst es für eure Werte aus der Tabelle. Was stellt ihr fest? Interpretiert euer Ergebnis im Anwendungskontext!

A5 Du hast festgestellt, dass ein lineares Gleichungssysteme genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder gar keine Lösung haben kann. Denke dir eine eigene Fragestellung im Kontext der Marktstände auf dem Bonner Marktplatz aus, die man in Form eines linearen Gleichungssystems modellieren kann. Löse dein lineares Gleichungssystem. Welcher der drei Fälle tritt bei dir auf?

Wusstest du schon?

Der Bonner Marktplatz gilt schon seit dem 11. Jahrhundert als ein Ort, an dem sich das bürgerliche Leben abspielt. Während er heute hauptsächlich als Ort für den Verkauf von Obst und Gemüse genutzt wird, diente er bis 1600 oftmals als Schauplatz für öffentliche Hinrichtungen und Verurteilungen.

Der damalige Marktbetrieb wurde von einem sogenannten Marktmeister streng kontrolliert. Seine Aufgabe war es, Betrug und Unordnung zu verhindern und die Standgebühr zu erheben.

Heutzutage sind die Marktstände von Montag bis Samstag vor Ort und die Standgebühr geht nicht mehr an den Kurfürsten, sondern an die Stadt Bonn.

Spaziergang 03

Strahlend schöne Kunst am Rhein

Rheinpromenade

- Geraden- und Ebenengleichungen
- Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
- Abstände
- Winkel

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
L'Allumé an der Rheinpromenade, Stresemannufer, Stadtbahnhaltestelle „Heussallee/Museumsmeile"

Zeit
90 Minuten

Material
Taschenrechner, Zollstock, Geodreieck/Winkelmesser, Schreibmaterial

L'Allumé („Der Erleuchtete") ist eine 1990 vom Künstler Mark di Suvero gebaute Skulptur und gehört zu den Kunstwerken in der Nähe des World Conference Centers in Bonn. Sie besteht aus sechs massiven Doppel-T-Stahlträgern und ist circa zehn Meter hoch. Die Träger sind teilweise im Boden verankert und pfeilförmig auf den Parlamentssaal gerichtet. Sie treffen sich in einem Knotenpunkt. Die Plastik ist zudem nach Nordosten ausgerichtet, also in Richtung unserer heutigen Bundeshauptstadt. Der Name rührt von der nächtlichen Beleuchtung und dem kräftigen Rotton, den die Skulptur seit einer Sanierung 2010 wieder trägt.

Wir legen ein Koordinatensystem wie in der Abbildung dargestellt fest. Wir stellen uns dafür die Kanten der Stahlträger, wie in der Skizze blau eingezeichnet, als Geraden im dreidimensionalen Raum vor.

A1 Miss die Koordinaten der Punkte *A* und *B* aus und gib sie in Dezimetern an (1 dm = 10 cm ≙ 1 Längeneinheit).

A2 Bestimme die Geradengleichung von *g* und berechne anschließend den Schnittwinkel der Gerade mit der *x*-*y*-Ebene. Überprüfe deine Rechnung durch Nachmessen des Winkels.

Hinweis: *Verwende einen Normalenvektor der x-y-Ebene.*

A3 Der Schnittpunkt S von *g* und *h* liegt bei einer Höhe von 5,60 Metern. Bestimme S und ermittle damit die Geradengleichung von *h*.

Wusstest du schon?

L'Allumé ist eine von zahlreichen Skulpturen rund um das World Conference Center, einem wichtigen Kongresszentrum in Bonn. Als Bonn 1948/49 Bundeshauptstadt wurde, fehlten Gebäude, die genug Platz für Regierungsversammlungen boten. Man musste auf das Museum König und die ehemalige Turnhalle der Pädagogischen Akademie ausweichen. Diese wurde dann 1950 zum Plenarsaal umgebaut, der auch heute noch Teil des World Conference Centers ist. Am 1. Juli 1999 tagte das Parlament ein letztes Mal im Plenarsaal.

B1 Die Gerade *j* hat den Richtungsvektor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ -44 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme ihre Geradengleichung.

B2 Bestimme den Schnittwinkel der Geraden *j* mit der Ebene *E*, die von den Geraden *g* und *h* aufgespannt wird. Beurteile hiermit, ob die drei Geraden näherungsweise in einer Ebene liegen.

B3 Stelle dir vor, dass am Ende des Stahlträgers, durch den Gerade *j* verläuft, ein neuer Scheinwerfer montiert werden soll, der näherungsweise einen gebündelten Lichtstrahl aussendet. Der Rhein ist in Bonn durchschnittlich 380 Meter breit. Du kannst außerdem annehmen, dass das Beueler Ufer auf derselben Höhe liegt. Überprüfe bei diesen Annahmen, ob Personen am Beueler Rheinufer durch den Scheinwerfer geblendet werden könnten.

B4 In welchem Winkel schneidet der Lichtstrahl das Ufer beziehungsweise das Wasser?

L'Allumé wird bei Nacht durch mehrere Lampen angestrahlt.

C1 Bestimme die Koordinaten des Mittelpunkts der Lampe L_1. Bestimme den minimalen Abstand des Stahlträgers *j* von der Lampe.

Hinweis: *Du weißt, welche Form alle Punkte F der Geraden j haben. Nutze dies, um den benötigten Richtungsvektor zu bilden!*

C2 Es soll überprüft werden, ob die eingesetzten Lampen hell genug sind: Die Beleuchtungsstärke *E* in Lux (lx) gibt an, wie viel Licht, das von einer Lampe ausgesendet wird, ein angestrahltes Objekt erreicht. Sie ist abhängig von der ausgesendeten Lichtstärke *I* in Candela (cd) und fällt quadratisch mit dem Abstand *r* ab. Bestimme die notwendige Lichtstärke *I* der Lampe, um eine Beleuchtungsstärke *E* am Stahlträger von 3500 Lux zu erreichen.

Hinweis: *Es gilt die Beziehung*

$$E = \frac{I}{r^2} \text{ und } 1\,\text{lx} = 1\,\frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

D1 Diskutiert, welche Schwächen unsere Modellierung in dieser gesamten Aufgabe hat und was wir deshalb bei der Interpretation unserer Lösungen beachten müssen.

Spaziergang 04

Wie ist die Lage? Lass' mal eben gerade treffen!

Das Bürogebäude brandtelf

- Geraden- und Ebenengleichungen
- Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme
- Abstand zweier Punkte

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Skulptur „What if" am Bürogebäude brandtelf, Willy-Brandt-Allee 13, Stadtbahnhaltestelle „Heussallee/ Museumsmeile"

Zeit
90 Minuten

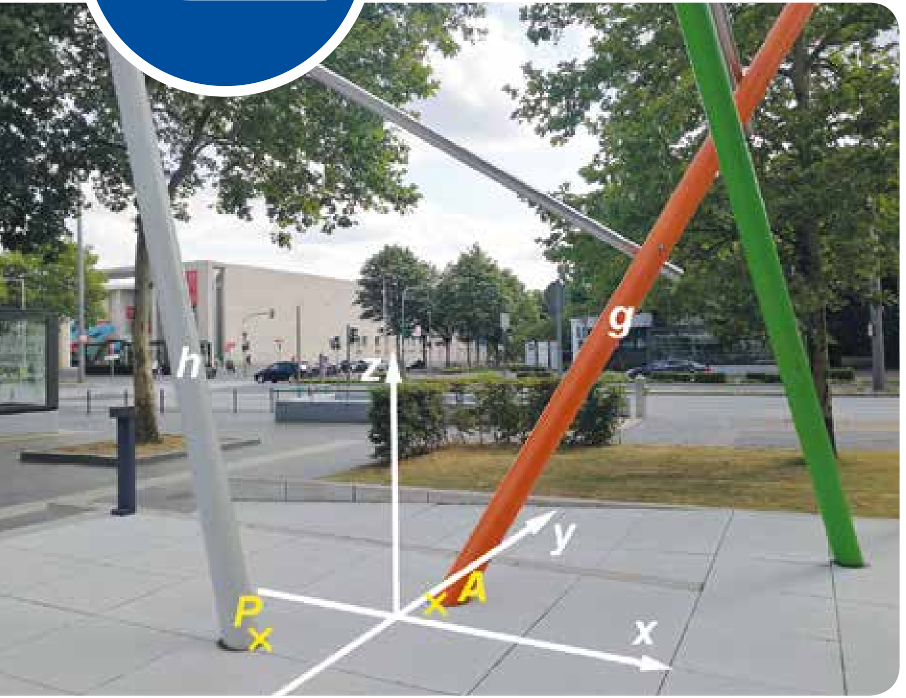
Material
Grafikfähiger Taschenrechner, Maßband, Schreibmaterial

Vor euch seht ihr die Skulptur „What if". Diese wurde 2012 vom Bonner Künstler Christoph Dahlhausen erbaut, nachdem er als Sieger aus einem Kunstwettbewerb für diesen Platz hervorgegangen ist. Wir wollen uns in dieser Aufgabe auf den linken Teil der Skulptur konzentrieren und uns überlegen, wie man diesen erweitern könnte. Stellt euch vor, es handele sich hierbei um eine Menge von Geraden im dreidimensionalen Raum. Der Koordinatenursprung liege an dem Eckpunkt der Bodenplatten zwischen der grauen und der orangefarbenen Gerade. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass es sich bei den Röhren um Geraden handelt, die sich an den Berührungspunkten schneiden.

A1 Die Fugen der Bodenplatten geben eine gute Orientierung innerhalb unseres Koordinatensystems. Miss die Breite der Platten aus und überlege dir, was in dem Koordinatensystem einer Längeneinheit entsprechen soll.

Wusstest du schon?

„What if" ist eines von vielen Kunstwerken auf der Museumsmeile und steht nur wenige Meter vom Haus der Geschichte entfernt. Seit 1994 können Besucher aus der ganzen Welt hier auf rund 22 000 Quadratmetern die Geschichte Deutschlands von 1945 bis heute erleben. Das Museum wurde auf Forderung des damaligen Bundeskanzlers Helmut Kohl gebaut, der eine Sammlung deutscher Geschichte in der Bundeshauptstadt verlangte. Zusammen mit der Bundeskunsthalle, dem Kunstmuseum, dem Museum König und dem Deutschen Museum Bonn bildet es den Museumsverbund der Museumsmeile, zu dem auch zahlreiche Kunstwerke gehören.



A2 Bestimme durch Ausmessen die Koordinaten der Punkte *A* und *P*, an denen die orangefarbene und die graue Gerade den Boden treffen.

A3 Vergleicht eure Ergebnisse. Wie erklärt ihr euch mögliche Unterschiede? Wie kann man dieses Problem lösen?

Da es verschiedene Möglichkeiten gibt, die Längeneinheiten im Koordinatensystem festzulegen, einigen wir uns ab jetzt darauf, dass eine Längeneinheit 10 Zentimetern entspricht.

B1 Der Punkt $B\,(4\,|\,8\,|\,6)$ liegt auf der orangefarbenen Geraden, der Punkt $Q\,(-16\,|\,-4\,|\,22)$ liegt auf der grauen Gerade. Bestimme die zugehörigen Geradengleichungen.

B2 Die silberne Gerade schneidet die graue Gerade bei einer Höhe von 42 Längeneinheiten und die orangefarbene Gerade bei einer Höhe von 22,5 Längeneinheiten. Berechne die jeweiligen Schnittpunkte.

B3 Bestimme die Gleichung der silbernen Gerade.

Die silberfarbene und die orangefarbene Gerade spannen eine Ebene auf.

C1 Gib die Gleichung dieser Ebene in Parameter- und in Koordinatenform an.

C2 Wo schneidet diese Ebene den Boden?

C3 Stelle dich auf den Punkt $R\,(0\,|\,10\,|\,0)$. Überlege dir, ob du dir an dieser Ebene den Kopf stoßen könntest und überprüfe deine Vermutung rechnerisch.

In Richtung der y-Achse beginnt ein Grünstreifen, der parallel zur x-Achse verläuft.

D1 Miss den Abstand des Grünstreifens vom Ursprung in *y*-Richtung. Um wie viele Längeneinheiten handelt es sich?

D2 Stelle dir vor, die silberfarbene Röhre würde in Richtung des Grünstreifens fortgesetzt werden. Würde sie auf der Wiese aufkommen?

E1 Wir waren in der Wahl des Koordinatenursprungs sehr frei. Diskutiert zu zweit, welche Vor- und Nachteile es haben könnte, den Ursprung anders zu wählen.

Spaziergang 05

Künstler sucht Mathe-Ass für Pyramidenberechnung

Dachgarten der Bundeskunsthalle

- Geraden- und Ebenengleichungen
- Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
- Abstände

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Dachgarten der Bundeskunsthalle, Friedrich-Ebert-Allee 4, Stadtbahnhaltestelle „Heussallee/ Museumsmeile“

Zeit
60 Minuten

Material
Taschenrechner, Maßband, Schreibmaterial

Seit 1992 ist die Bundeskunsthalle ein Ort der Kultur und der Politik, an dem verschiedene Ausstellungen und internationale Veranstaltungen stattfinden. Auch wenn der Dachgarten ähnlich dem Inneren des Museums im ständigen Wandel ist, so erkennt man stets von weitem die kegelförmigen Lichtschächte als Wahrzeichen des Museums. Wir wollen uns in dieser Aufgabe auf die Pyramide zwischen den Kegeln konzentrieren.

Wir stellen uns die Pyramide als geometrisches Objekt im dreidimensionalen Raum vor. Den Koordinatenursprung legen wir an eine der Ecken der Grundfläche.

A1 Miss die Grundfläche der Pyramide aus. Welche Eigenschaften hat die Pyramide?

A2 Diskutiert zu zweit, warum wir uns aussuchen können, an welche Ecke der Grundfläche wir den Koordinatenursprung setzen. Überlegt euch eine sinnvolle Längeneinheit für das Koordinatensystem.

A3 Das Volumen einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche $G = a^2$ und Höhe h ist gegeben durch

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Zeigt die Gültigkeit dieser Formel für den Spezialfall

$$h = \frac{a}{2}$$

Hinweis: *Überlegt, wie viele Pyramiden dieser Form ihr benötigt, um einen Würfel zu bilden.*

Wusstest du schon?

Die Bundeskunsthalle in Bonn wurde schon ab 1949 von 120 Künstlern geplant und diskutiert. Es dauerte aber 40 Jahre, bis Gestalt und Standort festgelegt werden konnten. 1989 legte dann Helmut Kohl den Grundstein für die Bundeskunsthalle – vier Jahre nach Beginn des Baus des benachbarten Kunstmuseums. Die Museen wurden zeitgleich 1992 fertig und bilden einen zentralen Bestandteil der Bonner Museumsmeile.

Stelle dir vor, der Dachgarten solle Teil der nächsten Ausstellung der Bundeskunsthalle werden. Dazu möchte ein Künstler die Pyramide mit buntem Sand füllen.

B1 Bestimme die Eckpunkte und den Mittelpunkt der Grundfläche.

B2 Messt Punkte einer Seitenfläche aus und bildet daraus deren Ebenengleichung in Parameter- und in Koordinatenform.

Hinweis: *Nutzt die vertikalen Linien auf den Seitenflächen zur Orientierung.*

B3 Bestimme die Koordinaten der Spitze. Wie hoch ist die Pyramide?

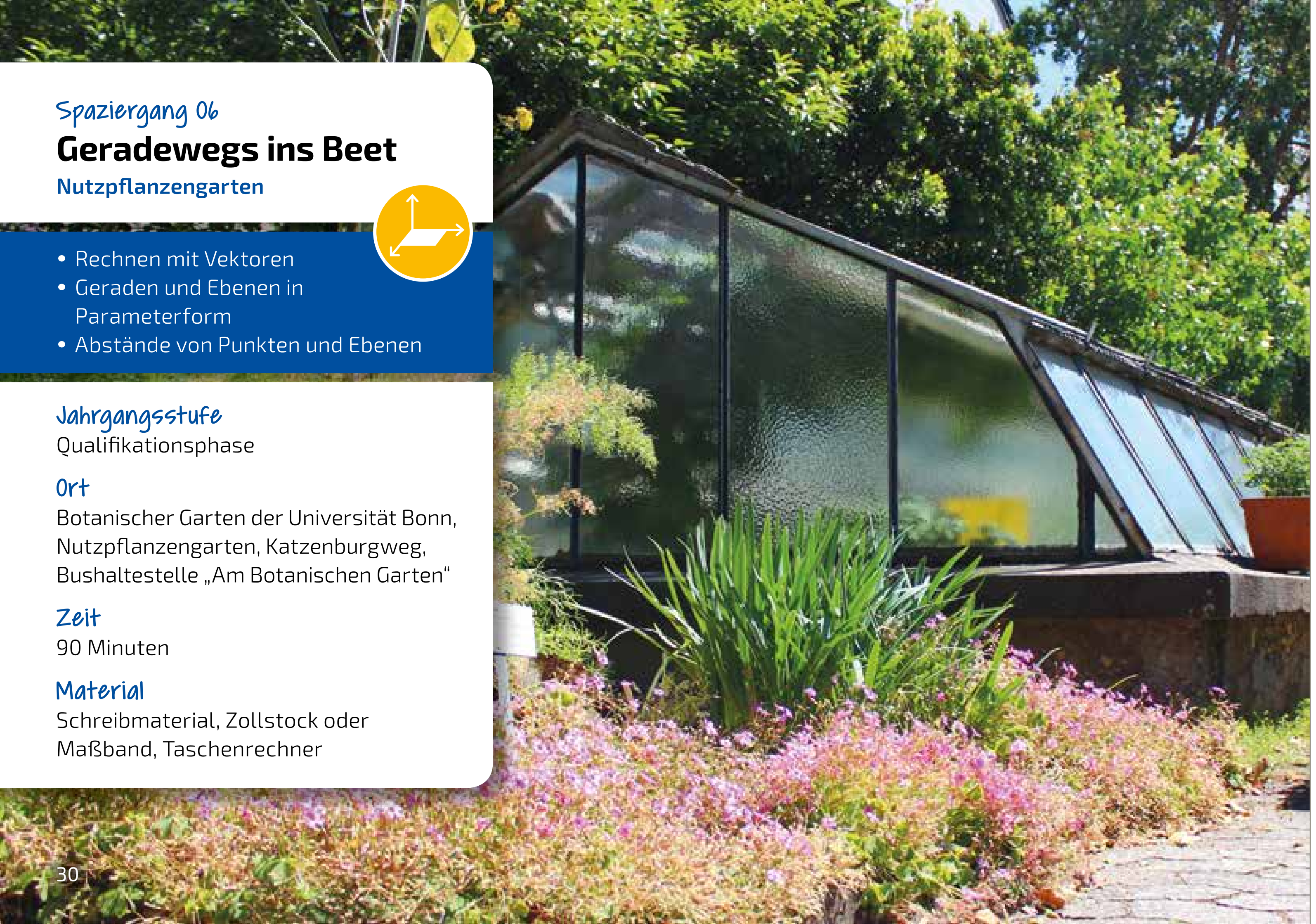
Hinweis: *Nutze dazu eine Gerade, die vom Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide senkrecht nach oben verläuft.*

B4 Berechne das Volumen der Pyramide. Wie viel Liter Sand benötigt der Künstler?

Stelle dir nun vor, das Kunstwerk solle bei Eröffnung der Ausstellung verhüllt werden.

C1 Berechne die Höhe der dreieckigen Seitenflächen der Pyramide.

C2 Bestimmt die Mantelfläche der Pyramide. Wie viel Quadratmeter Stoff werden für die Hülle mindestens benötigt? Diskutiert anschließend, welche alternativen Wege es gibt, um die Mantelfläche zu berechnen.



Spaziergang 06

Geradewegs ins Beet

Nutzpflanzengarten

- Rechnen mit Vektoren
- Geraden und Ebenen in Parameterform
- Abstände von Punkten und Ebenen

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

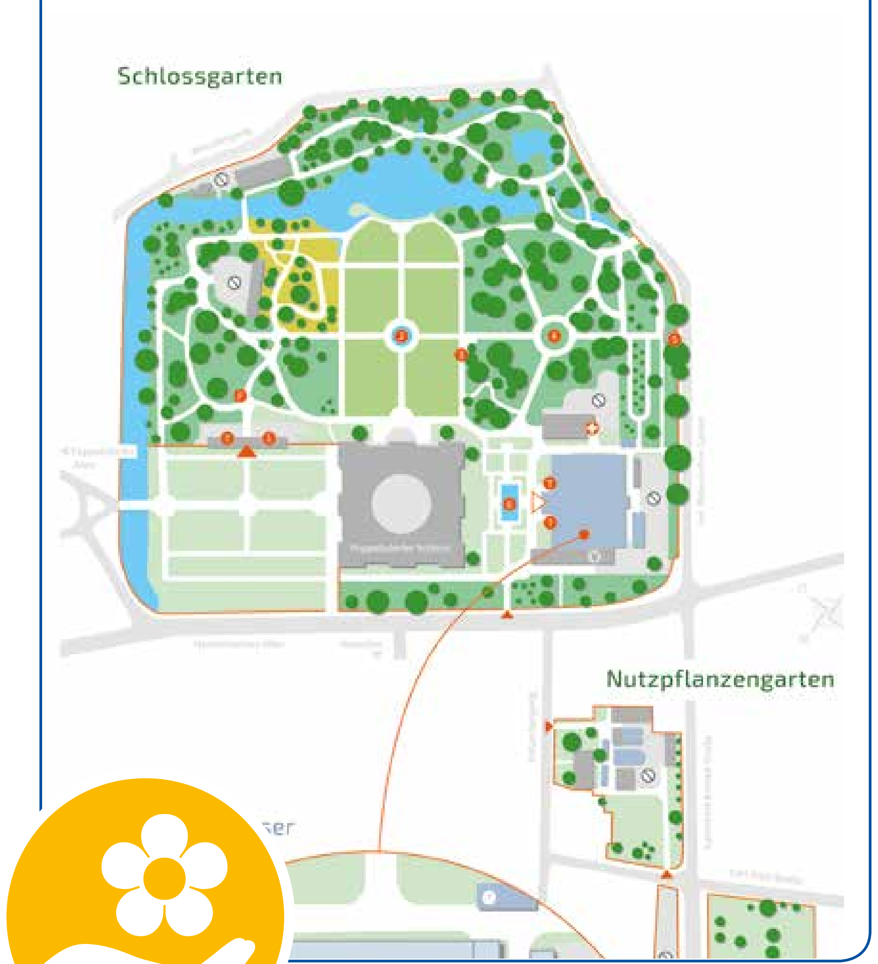
Ort
Botanischer Garten der Universität Bonn, Nutzpflanzengarten, Katzenburgweg, Bushaltestelle „Am Botanischen Garten“

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Zollstock oder Maßband, Taschenrechner

Auf der Fläche des Botanischen Gartens befand sich im 17. Jahrhundert eine Burg. An diese erinnert heute nur noch der Melbweiher, der damals ihr Burggraben war. Im Laufe der Jahre wurde ein sogenannter Lustgarten angelegt, der als schön gestalteter Entspannungsort dienen sollte. Im Jahre 1818 wurde der Garten schließlich zum Botanischen Garten. Er hatte nun nicht mehr nur eine ästhetische Funktion, sondern wurde zunehmend auch wissenschaftlich genutzt. Botanische Gärten sind wichtige Institutionen zur Erforschung, Erhaltung und Nutzung biologischer Vielfalt. Dadurch, dass sie der Öffentlichkeit zugänglich sind, tragen sie dazu bei, Wissen zu vermitteln und Bewusstsein für die Wichtigkeit der pflanzlichen Vielfalt zu schaffen. Der botanische Garten in Bonn zählt mittlerweile zu einem der artenreichsten in Deutschland.

Achte im Botanischen Garten besonders darauf, keine Flächen zu betreten, die dafür nicht vorgesehen sind.



Weißt du noch?

Eine Ebenengleichung ist eine Gleichung, die eine Ebene im dreidimensionalen Raum beschreibt. Diese Gleichung kann in Koordinaten- oder in Parameterform vorliegen.

Bei der Koordinatenform wird eine Ebene durch eine Gleichung der Form $ax + by + cz = d$ beschrieben, wobei a, b, c und d reelle Zahlen sind. Die Ebene besteht dann aus denjenigen Punkten $(x \mid y \mid z)$ im Raum, die diese Gleichung erfüllen.

Bei der Parameterform wird eine Ebene durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beschrieben. Zur Ebene gehören dann alle Punkte mit Ortsvektoren $\vec{x}$ der Form $\vec{x} = \vec{p} + \vec{s} \cdot \vec{u} + \vec{t} \cdot \vec{v}$, wobei die Parameter $\vec{s}$ und $\vec{t}$ alle reellen Zahlen durchlaufen.

A1 Gehe in den Nutzpflanzengarten des Botanischen Gartens im Katzenburgweg 3 und begib dich zu dem abgebildeten Gewächshaus. Modelliere die beiden Dachschrägen der linken Seite durch Ebenen E_1 und E_2 in Parameterform. Wähle das Koordinatensystem dabei so wie in der Abbildung dargestellt und rechne in Metern.

A2 Bestimme rechnerisch die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2, indem du zunächst die Gleichung der Ebene E_1 von der Parameterform in die Koordinatenform umwandelst.

A3 Erkläre, was die Schnittgerade aus Teilaufgabe **A2** anschaulich ist. Überprüfe durch Nachmessen, ob deine Berechnung mit den realen Gegebenheiten übereinstimmt. Begründe gegebenenfalls, wie es zu Abweichungen kommen konnte.

B1 Stelle dir vor, die Spitze eines Pflanzenstängels befindet sich am Punkt $P(0{,}3 \mid 1 \mid 0{,}3)$. Berechne, wie weit sie von der unteren Dachschräge entfernt ist. Gib das Ergebnis in Metern an.

Hinweis: *Eine Hilfsgerade, die den Punkt P enthält, kann dir bei deiner Rechnung helfen.*

Damit die Pflanzen, die besonders viel Licht für das Wachstum brauchen, im Winter keine Schäden davontragen, soll eine künstliche Beleuchtung in Form eines Pflanzenlichts an der Decke des Gewächshauses angebracht werden. Die Pflanzen, die beleuchtet werden sollen, befinden sich im vorderen Drittel des linken Pflanzenbeetes.

B2 Ein Pflanzenlicht soll an der Decke des Gewächshauses (oben in der Schnittgeraden der beiden oberen Dachschrägen) angebracht werden. Dieses Licht soll den Pflanzenstängel aus Teilaufgabe **B1** möglichst gut beleuchten. Wähle geeignete Koordinaten für die Position des Lichtes aus und berechne den Abstand von Lichtquelle und Pflanzenstängel. Findest du einen Punkt, an dem dieser Abstand minimal ist?

Wusstest du schon?

Pflanzen produzieren die Nahrung selbst, die sie für ihr Wachstum benötigen. Dazu verwenden sie hauptsächlich Kohlenstoffdioxid , das sie über ihre Blätter aus der Luft aufnehmen. Aus diesem Kohlenstoffdioxid stellen sie den für sie lebensnotwendigen Zucker her. Für diesen aufwendigen Prozess benötigt eine Pflanze Energie, die sie sich von der Sonne holt.

Spaziergang 07

Brandschutzübung am Post Tower

Post Tower

- Satzgruppe des Pythagoras
- Trigonometrische Funktionen
- Flächenberechnung von Kreissektor und Kreissegment

Jahrgangsstufe
Einführungsphase

Ort
Post Tower, Bushaltestelle „Gronau Post Tower“

Zeit
90 Minuten

Material
Maßband, Schreibmaterial, Taschenrechner

Jeder Einwohner Bonns kennt den Post Tower, welcher mit über 160 Metern in den Himmel ragt. Doch nur wenige wissen, dass sich der Post Tower nicht allein durch seine Größe, sondern auch durch seine einzigartige Form auszeichnet. Von unten kaum zu erkennen ist, dass sich die Grundfläche des 41 Meter breiten und 81,10 Meter langen Hochhauses aus zwei versetzten Kreissegmenten zusammensetzt, die durch einen 7,20 Meter breiten Zwischenraum getrennt sind. Wodurch sich diese geometrische Form auszeichnet und wie du ihre Fläche ausrechnest, erfährst du in dieser Aufgabe.

Begib dich auf den Platz vor dem Post Tower. Links des Post Towers befindet sich eine Treppe, die zu einem unterhalb liegenden Park führt. Gehe die Treppe hinunter und folge dem Weg durch die Baumallee bis zu einer kleinen Wegkreuzung, an der ein Schild steht, auf dem ein Feuerwehrauto im Maßstab 1:87 dargestellt ist. Auf dieser Abbildung ist die Drehleiter des Löschwagens vollständig ausgefahren.

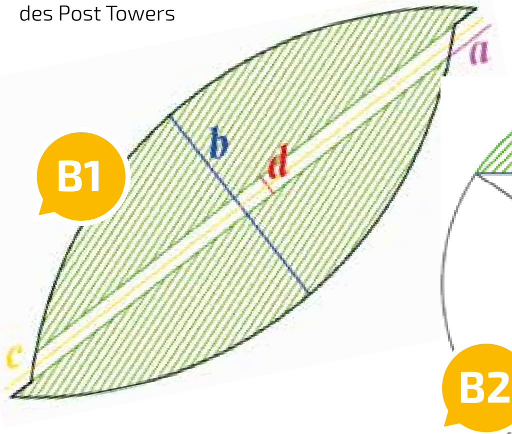
A1 Miss die Längen der in der Abbildung blau markierten Strecken und berechne anschließend die Maße eines echten Feuerwehrautos.

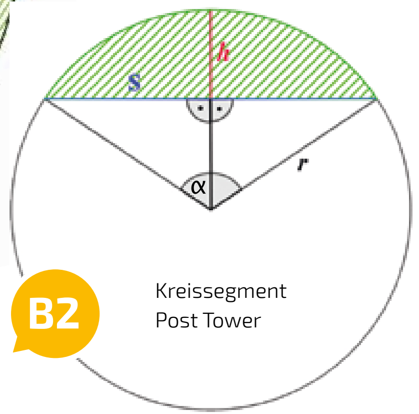
A2 Stelle dir folgendes Szenario vor: Bei einer Brandschutzübung sollen die Feuerwehrleute von außen in das vierte Geschoss des Post Towers (auf 26,15 Meter) gelangen. Bestimme mithilfe des Satzes des Pythagoras, ob die Feuerwehrleiter bis zum vierten Stock reicht. Du darfst davon ausgehen, dass das Feuerwehrauto beim Löscheinsatz direkt an den Post Tower heranfahren kann. Fertige zunächst eine Skizze an, in der du die Maße aus Teilaufgabe **A1** einträgst.

A3 Wie viel Prozent der gesamten Drehleiter sind ausgefahren, wenn sie bis zum vierten Stockwerk reicht? In welchem Winkel steht sie in diesem Fall vom Dach des Feuerwehrautos nach oben?

Stelle dir nun Folgendes vor: Bei der Brandschutzübung sind die Feuerwehrleute im gesamten vierten Geschoss unterwegs gewesen. Aufgrund des schlechten Wetters hatten alle stark verschmutzte Schuhe an und leider ist nun der gesamte Teppich in der vierten Etage verschmutzt. Mit den folgenden Aufgaben sollst du herausfinden, wie viel es kosten würde, den Teppich zu erneuern, wenn ein Quadratmeter 12,95 Euro kostet.

Grundriss eines Regelgeschosses des Post Towers





Kreissegment Post Tower

Hinweis: *Bei allen folgenden Rechnungen vernachlässigen wir zur Vereinfachung ausnahmsweise die Dicke der Wände und tun so, als ob der gesamte Grundriss eines Geschosses mit Teppich ausgelegt ist.*

B1 Betrachte den in der ersten Abbildung dargestellten Grundriss eines Regelgeschosses des Post Towers. Die grün schraffierte Fläche soll mit neuem Teppich ausgelegt werden. Begib dich zum Post Tower und miss die Länge der Strecke *a* und gib sie in Metern an. Informationen über die Längen der Strecken *b*, *c* und *d* kannst du dem Informationstext zu Beginn dieser Aufgabe entnehmen. Notiere deine Ergebnisse.

B2 In der zweiten Abbildung ist eines der Kreissegmente mit seinem zugehörigen Kreis dargestellt. Berechne mit den Werten aus Teilaufgabe **B1** die Länge der Kreissehne s und die Segmenthöhe *h*.

B3 Zeige, dass für den Radius *r* folgender Zusammenhang zwischen Segmenthöhe *h* und Kreissehne s gilt:

$$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$$

Nutze den Satz des Pythagoras, um den Radius *r* zu berechnen.

B4 Verwende die trigonometrischen Funktionen, um eine Formel für den Mittelpunktswinkel α herzuleiten. Nutze das gleiche rechtwinklige Dreieck wie in Teilaufgabe **B3**, um zunächst den halben Winkel zu berechnen. Dokumentiere dein Vorgehen und berechne den Winkel α.

B5 Die in der zweiten Abbildung eingezeichneten Radien schließen mit dem Kreisbogen einen Kreisausschnitt ein. Das grün schraffierte Kreissegment ist die Teilfläche des Kreises, die von dem Kreisbogen und einer Kreissehne begrenzt wird.

Wie lässt sich der Flächeninhalt eines Kreissegments in Abhängigkeit vom Radius *r* des Kreises und vom Winkel α berechnen? Finde eine Formel.

Hinweis: *Zerlegungen können oftmals ein wirksames Instrument für die Bestimmung von Flächeninhalten sein. Zerlege den Kreisausschnitt in das Kreissegment und in ein gleichschenkliges Dreieck.*

B6 Was kostet es, den Teppich in der vierten Etage zu erneuern? Da die Teppichstücke nur in den Maßen 3 m x 3 m erhältlich sind, muss bei der Berechnung des Materialbedarfs ein Verschnitt von 20 Prozent hinzuaddiert werden.

Kontrollergebnis: *Der Flächeninhalt eines Kreissegmentes beträgt 864,29 Quadratmeter.*

Weißt du noch?

Der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks lässt sich mit der Formel

$$A_{\text{gleichschenkliges Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha)$$

berechnen, wobei α der von den beiden Schenkeln der Länge *r* eingeschlossene Winkel ist.

Weißt du noch?

Man kann Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß angeben. Dabei entsprechen 360 Grad genau 2π.

Prüfe vor dem Lösen dieser Aufgabe, ob dein Taschenrechner auf das Gradmaß eingestellt ist.

Spaziergang 08

Kurvige Bäume

Der Parabelast im Redoutenpark

- Monotoniewechselkriterium für lokale Minima und Maxima
- Zusammengesetzte Funktionen
- Scheitelpunkt- und Normalform
- Differentialquotient

Jahrgangsstufe

Einführungsphase

Ort

Redoutenpark, Stadtbahnhaltestelle „Bad Godesberg Stadthalle“

Zeit

90 Minuten

Material

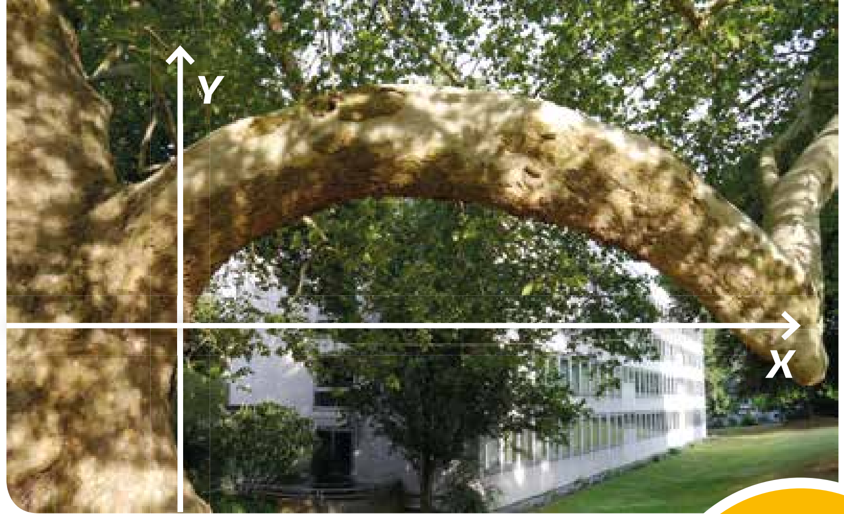
Schreibmaterial, Taschenrechner, Zollstock, Paketschnur, Klebezettel, Reißzwecken

Der Redoutenpark in Bad Godesberg wurde ab 1820 angelegt. Der Park erstreckt sich über knapp sechseinhalb Hektar. Heute geht er in den Bad Godesberger Stadtpark über. Wenn man über den Redoutenweg den Park betritt, fällt auf der Wiese ein besonderer Baum auf, dessen Form an eine Parabel erinnert. Doch wie kann man diesen Baum mathematisch beschreiben? Diese Frage werdet ihr mit den folgenden Aufgaben beantworten.

A1 Diskutiert in der Gruppe, wie ihr den gebogenen Teil des Astes (siehe Abbildung) am besten ausmessen und die Daten in ein Koordinatensystem übertragen könnt.

Hinweis: *Die Schnur könnt ihr horizontal spannen und als x-Achse verwenden.*

A2 Interpretiert den unteren Rand des gebogenen Teils des Astes als Funktion mit einem lokalen Maximum. Messt die Koordinaten des lokalen Maximums und außerdem die Koordinaten des unteren Randes jeweils 20, 40 und 60 Zentimeter links und rechts vom lokalen Maximum. Gebt alle Werte in Metern an.



Hinweis: *Für genaue Ergebnisse ist es notwendig, die Messung im Team durchzuführen! Achtet darauf, den Zollstock gerade zu halten.*

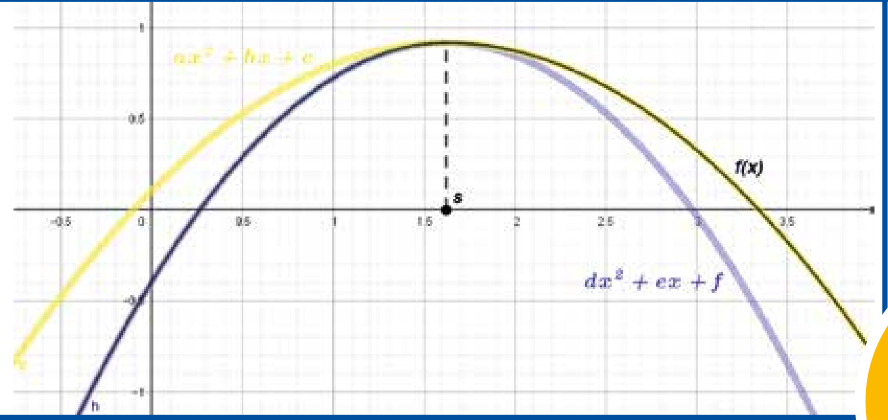
B1 Teilt euch in zwei Gruppen auf. Eine Gruppe berechnet die drei durchschnittlichen Steigungen der Funktion in den Intervallen, die jeweils vom lokalen Maximum zu einem der drei Punkte rechts vom Maximum reichen. Die andere Gruppe berechnet die Steigungen für die drei Punkte links vom Maximum. Vergleicht eure Ergebnisse. Kann der Ast gut durch eine Parabel modelliert werden?

B2 Sei s eure gemessene *x*-Koordinate des lokalen Maximums aus Teilaufgabe **A2**. Stellt Vermutungen auf, welchen Wert die durchschnittliche Steigung im Intervall [s, s + *h*] annimmt, wenn *h* sich der 0 annähert. Was sagt dieser Wert aus?

Wusstest du schon?

Eine mögliche Form für eine aus zwei quadratischen Funktionen zusammengesetzte Funktion *f* sieht wie folgt aus:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{falls } x \leq s \\ dx^2 + ex + f, & \text{falls } x > s \end{cases}$$



*Ihr habt in Teilaufgabe **B1** und **B2** festgestellt, dass sich die Steigung von beiden Seiten einem gemeinsamen Wert im lokalen Maximum annähert. Daher ist es sinnvoll, nach einer aus zwei Parabelhälften zusammengesetzten Funktion zu suchen. Dabei haben beide Parabeln denselben Scheitelpunkt, der das lokale Maximum bildet.*

C1 Stellt in euren Gruppen für das von euch betrachtete Intervall jeweils eine Funktionsgleichung auf, die eine Parabel mit dem Scheitelpunkt und der linken beziehungsweise rechten Seite des Astes beschreibt. Setzt diese stückweise definierten Funktionen zu einer gemeinsamen Funktion zusammen. Gebt die beiden Funktionsgleichungen jeweils in Scheitelpunkt- und in Normalform an.

Weißt du noch?

Wir sprechen von einem lokalen Maximum (Minimum) der Funktion *f* an der Stelle s, falls es eine Umgebung um s gibt, in der *f*(s) der größte (kleinste) Funktionswert ist.

C2 Überprüft mithilfe des Differentialquotienten (*h*-Methode) eure Vermutungen aus Teilaufgabe **B2** zur Steigung im Scheitelpunkt.

D1 Stelle mithilfe deiner Erkenntnisse zur Steigung im gemeinsamen Scheitelpunkt und zur Steigung in dem Intervall links und rechts vom gemeinsamen Scheitelpunkt zwei notwendige Kriterien zur Bestimmung eines lokalen Maximums auf.

D2 Lassen sich ähnliche Kriterien für lokale Minima erstellen?

Spaziergang 09

Kettenlinien im Alltag

Stadthaus

- Parabelfunktion
- Absoluter und relativer Fehler
- Cosinus Hyperbolicus

Jahrgangsstufe
Einführungsphase

Ort
Breite Straße, Bus- und Stadtbahnhaltestelle „Stadthaus“

Zeit
120 Minuten

Material
Zollstock/Maßband, Bindfaden, Schreibmaterial, Taschenrechner

Achtung:
Du kannst die Aufgabe vom Bürgersteig aus bearbeiten. Achte auf andere Verkehrsteilnehmende! Arbeitet mindestens zu zweit, sodass einer von euch immer den Straßenverkehr im Blick hat.

Absperrpoller mit dazwischen hängenden Ketten aus Metallsegmenten helfen, an gefährlichen Stellen die die Verkehrsteilnehmenden zu trennen, um so für mehr Sicherheit zu sorgen. Sie können auch Bäume umzäunen, um diese zu schützen. An unübersichtlichen Stellen sollen sie Fußgängerinnen und Fußgänger davon abhalten, die Straße zu überqueren. Mathematikerinnen und Mathematiker haben sich lange mit der Form der Kette befasst und sie als Kettenlinie beschrieben. Was sich hinter dieser Kettenlinie verbirgt, wirst du im Laufe der Aufgabe kennenlernen.

A1 Begib dich zu den Absperrpollern in der Breite Straße, welche sich gegenüber vom Stadthaus befinden. Betrachte die hinterste Kette, die am weitesten vom Stadthaus entfernt ist. Beschreibe, an welche dir bekannte Form dich der Kurvenverlauf erinnert.

A2 Stelle dir vor, die Verkehrsbehörde möchte die Straßenpoller für mehr Sicherheit im Straßenverkehr näher untersuchen. Erstelle ein geeignetes Koordinatensystem, in das du fünf Messpunkte der Kette eintragen kannst. Wähle dabei die y-Achse so, dass der Rand des ersten Kettengliedes eine Koordinate der Form $(0,a)$ hat.

A3 Erstelle auf Grundlage deiner Messergebnisse eine quadratische Funktion, die den Verlauf der Kurve beschreibt. Verwende dazu den ganz linken, den ganz rechten und den in der Mitte liegenden Messpunkt. Beurteile die Genauigkeit der Funktion durch Einsetzen der übrigen Messpunkte.

Wusstest du schon?

Für die Länge einer Parabel f mit $f(x) = ax^2+c$ gilt:
Die Länge $L(k)$ des Parabelbogens im Intervall $[0,k]$ ist gegeben durch

$$L(k) = \frac{1}{4a} \cdot \ln\left(2ak + \sqrt{(2ak)^2+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \sqrt{(2ak)^2+1}$$

Zwischenergebnis: Um verschiedene Ergebnisse aufgrund unterschiedlicher Messungen zu vermeiden, kannst du ab jetzt mit der Polynomfunktion $f(x) = 0{,}25\,x^2 - 0{,}44\,x + 0{,}8$ weiterrechnen.

Im Folgenden wollen wir verschiedene Ketten miteinander vergleichen. Dazu nummerieren wir die Ketten, wie es der Abbildung zu entnehmen ist. Wir betrachten die Ketten mit den Nummern 1 bis 4.

B1 Messt zunächst die Länge der vier Ketten unter Verwendung von Zollstock und Bindfaden. Berechnet anschließend die Länge der ersten Kette unter Verwendung der quadratischen Funktion. Verschiebt hierzu die Parabel so, dass der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt. Nutzt dann die Symmetrie der Parabel aus! Vergleicht eure beiden Ergebnisse für die Kettenlänge der ersten Kette miteinander.

B2 Die Ketten dürfen im Verhältnis nicht zu lang sein. Die Länge der Kette darf maximal 20 Prozent größer sein als der Abstand der Poller, da sonst Fußgänger über die Kette stolpern könnten. Berechne den absoluten und relativen Überschuss der Länge der durchhängenden Kette gegenüber dem Abstand der Poller bei der ersten Kette. Wähle noch zwei andere Ketten und miss auch deren Überschuss. Vergleiche die relativen Überschüsse. Beurteile deine Ergebnisse dahingehend, ob von den Ketten eine Gefahr für die Fußgänger ausgeht.

Bereits im 17. Jahrhundert war bekannt, dass die Kettenlinie nicht durch eine Parabel beschrieben wird. Tatsächlich handelt es sich um den Cosinus hyperbolicus (cosh). Dieser kann allgemein formuliert werden durch

$$f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x+b}{a}\right) + c$$
$$= \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x+b}{a}} + e^{-\frac{x+b}{a}}\right) + c \text{ für } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

B3 Wähle die Parameter $a = 2{,}03$, $b = -0{,}9$ und $c = -1{,}43$. Beurteile mithilfe deiner Messwerte, wie gut diese Funktion den Graphen der ersten Kette beschreibt. Wie erklärst du dir also, dass die Kettenlinie lange Zeit als Parabel angenommen wurde und dass sie sogar als Zeichenvorlage für Parabeln galt?

Wusstest du schon?

Die beiden in dieser Aufgabe vorkommenden Funktionsterme $f(x) = e^x$ und $f(x) = \ln(x)$ stehen für die Exponential- und die natürliche Logarithmusfunktion.
Du findest beide auf dem Taschenrechner auf den Tasten, die mit „e^x" und „ln" beschriftet sind. Wenn du wissen willst, was es damit genau auf sich hat, dann frage deinen Lehrer danach! Du kannst dabei spannende Mathematik entdecken!

Spaziergang 10

Polynome in einem Rutsch

Grünzug Nord

- Mittlere und momentane Steigung
- Steckbriefaufgaben

Jahrgangsstufe

Qualifikationsphase

Ort

Spielplatz im „Grünzug Nord“ in Tannenbusch, Bushaltestelle „Hirschberger Straße“

Zeit

75 Minuten

Material

Schreibmaterial, grafikfähiger Taschenrechner, mehrere Zollstöcke, Maßband

Der „Grünzug Nord“ in Tannenbusch ist ein großes Freizeitgelände. Es gibt neben dem Spielplatz noch weitere Freizeitmöglichkeiten wie Fahrradwege oder Grillstätten. Den 1997 offiziell eingeweihten Park erreicht ihr über den Waldenburger Ring. Die dortigen Rutschen haben unterschiedliche Formen und stehen im Zentrum dieser Aufgabe.

Begebt euch zur abgebildeten Rutsche. Wir stellen uns nun folgendes zweidimensionale Koordinatensystem in der Rutschenebene vor: Der Startpunkt der Rutsche habe die Koordinaten (0,h), wobei h die Höhe der Rutsche ist. Die x-Achse verlaufe am Fußboden unterhalb der Rutsche. Der Endpunkt der Rutsche habe die Koordinaten (s,k), wobei s der in x-Richtung zurückgelegte Weg ist und k die Höhe am Endpunkt der Rutsche. Als Einheit wählen wir Meter.

A1 Bestimmt durch Messungen die mittlere Steigung vom Anfang bis zum Ende der Rutsche. Berechnet außerdem die mittlere Steigung im Intervall

$$\left[\frac{s}{2}-\frac{1}{4}, \frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right]$$

um den Mittelpunkt der Rutsche.

A2 Gib mithilfe der Ergebnisse aus Teilaufgabe **A1** die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung um den Mittelpunkt von der mittleren Steigung der gesamten Rutsche an.

Das seitliche Profil der Rutsche soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades modelliert werden. Der Anfangs- und der Endpunkt der Rutsche sollen dabei die Extrempunkte von f sein.

B1 Bestimme die notwendigen Bedingungen für die Polynomfunktion f, indem du charakteristische Punkte der Rutsche ausmisst. Stelle anschließend das zugehörige lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionsgleichung auf.

B2 Löse das zugehörige lineare Gleichungssystem mit deinem grafikfähigen Taschenrechner und gib die Funktionsgleichung für f an.

B3 Spielplatzrutschen sollen an keiner Stelle steiler als 60° gegen die Horizontale geneigt sein. Überprüfe, ob die Rutsche dieser Anforderung entspricht, indem du die Steigung an der steilsten Stelle bestimmst und anschließend den Steigungswinkel berechnest.

Geht in Richtung der Schaukel und dann am Klettergerüst vorbei. Wenn ihr dem kleinen Pfad folgt, gelangt ihr zu einer weiteren Rutsche.

C1 Bestimmt auch hier mithilfe von Messungen die mittlere Steigung der gesamten Rutsche.

***Hinweis:** Der Satz des Pythagoras kann euch hierbei helfen.*

C2 Erläutere ohne weitere Rechnung, welchen Wert die momentane Steigung im Mittelpunkt dieser Rutsche annimmt. Wann sind momentane Steigung und mittlere Steigung ähnlich groß und wann weichen beide Werte stark voneinander ab?

Wusstest du schon?

Die technischen Anforderungen an Geräte auf dem Spielplatz sind europaweit streng geregelt und dienen der Sicherheit der Kinder. So wird unter anderem bestimmt, wie weit die Geräte auseinanderstehen müssen, wie groß die Gummimatten unter den Schaukeln sein müssen oder wie hoch eine Wippe sein darf. Spielplätze werden auf Einhaltung dieser Normen geprüft und müssen regelmäßig gewartet werden.

Spaziergang II

Funktionales Sitzen

Die Rheinnixe

- Polynomfunktionen
- Lineare Gleichungssysteme
- Arcustangens
- Verschiebung von Funktionsgraphen

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Rheinufer, Stadtbahnhaltestelle „Juridicum"

Zeit
120 Minuten

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner, Zollstock, Schnur

Du kannst die Aufgabe vom Bürgersteig aus bearbeiten. Beachte aber, dass daneben auch ein Fahrradweg verläuft. Arbeitet mindestens zu zweit, sodass einer von euch immer den Straßenverkehr im Blick hat.

Die Rheinnixe ist die Fähre in Bonn, die Fahrgäste den Rhein zwischen der Innenstadt und Beuel überqueren lässt. Wer kurz warten muss, kann auf einer der drei Sitzbänke Platz nehmen. Die Steinmauer, die du bei dieser Aufgabe betrachtest, ist Teil dieser Sitzbänke und erhebt sich aus dem gepflasterten Boden bis zum Holzbrett. Sie hat eine mathematisch interessante Form, die du beschreiben kannst. Finde heraus, welche Eigenschaften sie hat.

Begib dich zu der vordersten Sitzbank und betrachte die Pflastersteine um diese herum.

A1 Beschreibe die Form der Steinmauer, die sich aus dem Boden zu der Sitzbank erhebt (in der Abbildung die gelbe Linie). Benutze dabei die Begriffe erste Ableitung und Wendepunkt.

A2 Miss an sieben Stellen (vom Boden bis zum Beginn des Holzbrettes) die Höhe der Steinmauer und übertrage deine Messdaten in ein geeignetes Koordinatensystem. Dabei soll der Koordinatenursprung am Fuß der Mauer liegen. Skizziere anschließend die Mauer.

Sitzbänke am Rhein

Wusstest du schon?

1930 wurde das Familienunternehmen gegründet, welches heute noch die Rheinnixe zwischen Bonn-Mitte und Beuel verkehren lässt. Schon mehrfach musste dafür aufgrund starken Niedrigwassers an der Anlegestelle in Beuel das Ufergelände vertieft werden. Das Boot selbst ist das vierte mit diesem Namen und wurde 1980 vom damaligen Oberbürgermeister getauft. Es kann bis zu 150 Personen über den Rhein transportieren und fährt mit einer Höchstgeschwindigkeit von 20 Kilometern pro Stunde.

B1 Modelliere nacheinander Polynomfunktionen f_1, f_2, f_3 mit

$f_1(x) = a_1x + b_1$

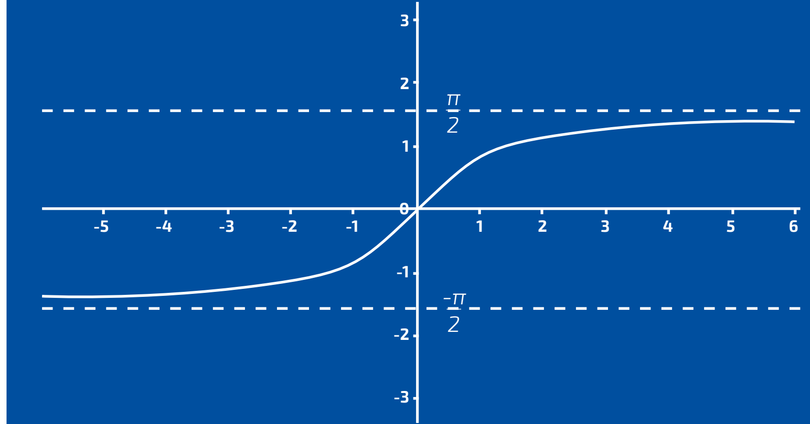
$f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$

$f_3(x) = a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3$,

die jeweils die Form der Steinmauer beschreiben. Wähle hierzu sinnvolle Punkte aus deinen Messdaten aus. Skizziere die Graphen und beurteile die Qualität deiner Modelle.

Wusstest du schon?

Die Arcustangensfunktion ist die Umkehrfunktion der geeignet eingeschränkten Tangensfunktion. Ihr Graph sieht folgendermaßen aus:



B2 Miss die Länge der Mauerkante (gelbe Linie) und vergleiche sie mit der Länge der Mauer, die sich mithilfe der linearen Funktion aus Teilaufgabe **B1** ergibt.

B3 Die Form der Mauer lässt sich sehr gut durch den Graphen der Arcustangensfunktion beschreiben. Betrachte die allgemeine Funktion

$h(x) = a \cdot \arctan(b \cdot x + c) + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

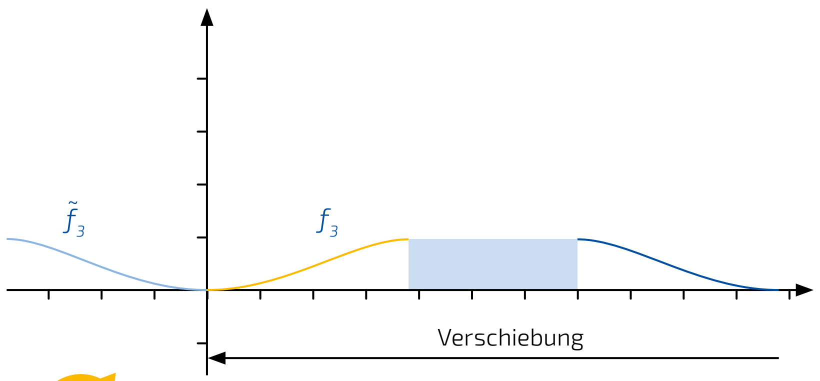
Verwende die Werte
$a = 0{,}24$
$b = 1{,}69$
$c = -1{,}84$
$d = 0{,}25$.

*Vergleiche für drei beliebige Punkte aus Teilaufgabe **A2** die Abweichung in Metern sowie die prozentuale Abweichung von f_3 beziehungsweise h gegenüber der gemessenen Höhe.*

B4 Damit niemand auf der Mauer ausrutschen kann, will die Stadt folgende Richtlinie erlassen: Die Mauer gilt als sicher, wenn die durchschnittliche Steigung nicht 30 Prozent und die maximale Steigung nicht 45 Prozent übersteigt. Begründe unter Verwendung von f_3, ob von der Mauer eine Gefahr ausgeht.

B5 Nimm an, dass sich bei derselben Bank die gegenüberliegende Seite (in der Abbildung die blaue Linie) mit einer gespiegelten Funktion beschreiben lässt. Verschiebe die blaue Kurve so, dass der Koordinatenursprung nun auch am Fuß der blauen Mauer liegt (siehe Abbildung). Überlege dir, welche Konsequenzen das für das Vorzeichen deiner x-Werte hat.

B6 Bestimme mithilfe von f_3 die Abbildungsvorschrift für die verschobene blaue Kurve $\tilde{f}_3$. Überprüfe anhand von drei Messpunkten, ob der Maurer korrekt symmetrisch gearbeitet hat.



B6

Spaziergang 12

Mathematik für jede Stufe

Treppenanlage an der Kaiser-Friedrich-Straße

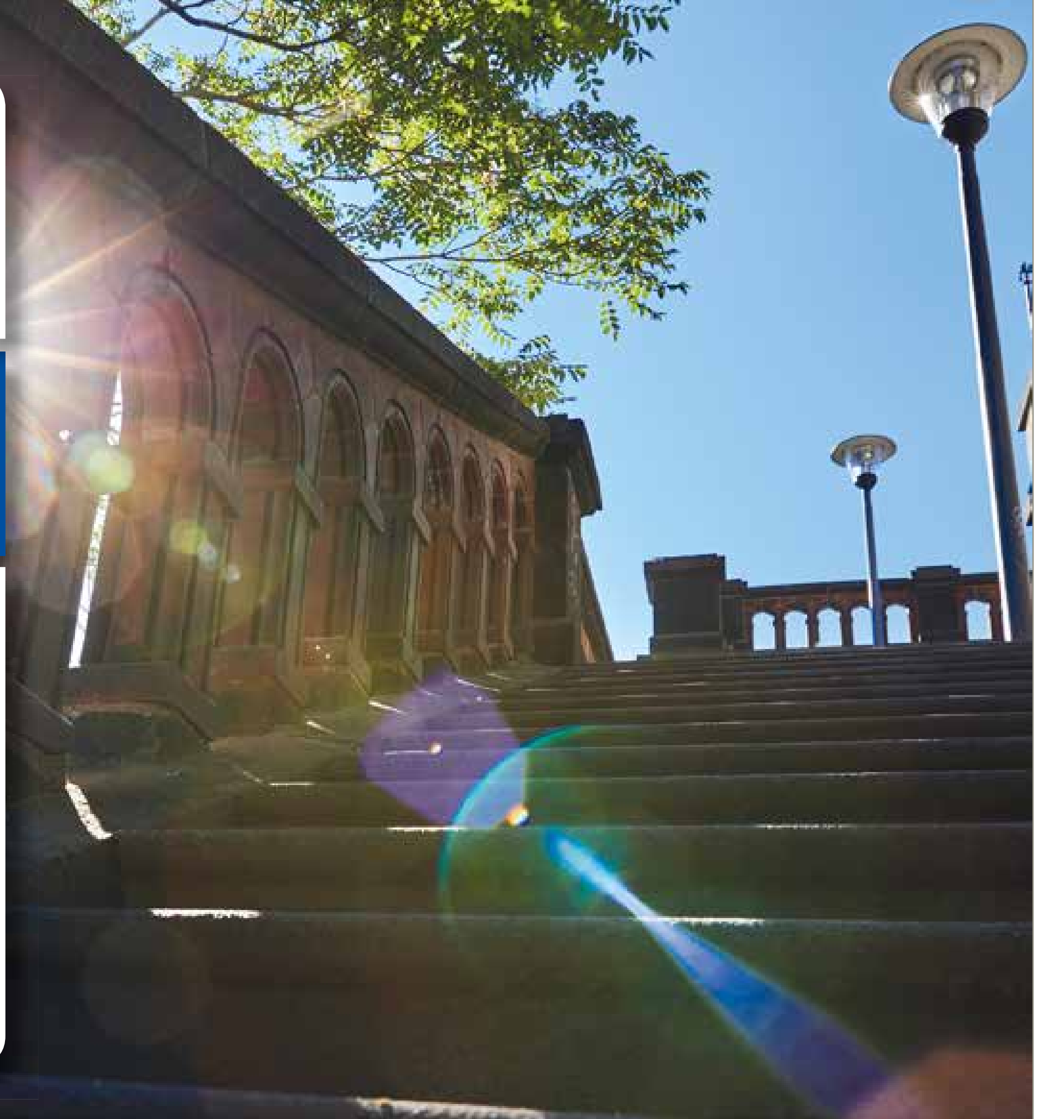
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- abschnittsweise definierte Funktionen
- Stammfunktionen

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Treppe vom Wilhelm-Spiritus-Ufer zur Kaiser-Friedrich-Straße, Stadtbahnhaltestelle „Museum König"

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Zollstock oder Maßband



Zwischen dem Park der Villa Hammerschmidt und der Villa Spiritus führt eine Treppenanlage von der Kaiser-Friedrich-Straße zum Wilhelm-Spiritus-Ufer. Die Treppenanlage wurde Ende des 19. Jahrhunderts erbaut. Die Villa Spiritus ist das ehemalige Wohnhaus von Wilhelm Spiritus, der von 1891 bis 1919 Bonner Oberbürgermeister war. In seine Amtszeit fiel die Einweihung der ersten Rheinbrücke zwischen Bonn und Beuel am 17. Dezember 1898.

A1 Fertige eine zweidimensionale Skizze der Fassade der Anlage an. Sie soll die Treppen, die Mauer in der Mitte und den dort befindlichen Rundbogen enthalten.

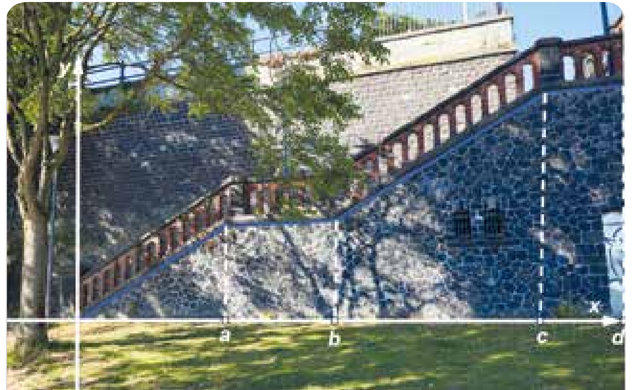
A2 Berechnet zunächst nur den Flächeninhalt der Fassade im Bereich der beiden Treppen. Dies soll hier durch die Berechnung von Flächeninhalten von Dreiecken, Vierecken und Trapezen, also erst einmal ohne Verwendung der Integralrechnung, erfolgen. Messt dazu die benötigten Längen und tragt sie in eure Skizze ein.

Wir interessieren uns nun für den Flächeninhalt der gesamten Fassade der Anlage. Den Umriss des Rundbogens kann man als Parabel modellieren und dadurch den Flächeninhalt unterhalb des Bogens mithilfe der Integralrechnung bestimmen.

Wusstest du schon?

Die Kaiser-Friedrich-Straße ist nach Friedrich III. benannt, welcher deutscher Kaiser und König von Preußen war. Er studierte ab 1849 an der Universität in Bonn Rechtswissenschaften.

Neben der Villa Spiritus steht noch eine weitere denkmalgeschützte Villa an der Kaiser-Friedrich-Straße. Dieses Gebäude gehört seit 1999 zusammen mit zwei weiteren Häusern auf der Kaiser-Friedrich-Straße zum Bundeskartellamt. Bis 1999 hatte auch die belgische Botschaft ihren Sitz in dieser Straße.



A3 Wählt ein Koordinatensystem, das für die anschließende Berechnung geeignet ist. Messt geeignete Punkte aus und bestimmt die Funktionsgleichung der Parabelfunktion.

A4 Berechne den Inhalt der Fläche innerhalb des Rundbogens.

A5 Berechne den Inhalt der gesamten Fläche der Fassade (ohne den Rundbogen).

Man kann den Flächeninhalt unter einer der Treppen auch mithilfe der Integralrechnung bestimmen, wenn man den Verlauf der Treppe als Funktion interpretiert. Es handelt sich hierbei um eine abschnittsweise lineare Funktion.

B1 Stelle die Funktionsgleichung für die abschnittsweise lineare Funktion auf. Nutze dazu die Maße aus Teilaufgabe **A2**.

B2 Nutze deine Kenntnisse der Integralrechnung, um den Flächeninhalt unterhalb der Treppe zu berechnen. Verwende das Ergebnis aus Teilaufgabe **A2** zur Kontrolle.

B3 Zeige mithilfe der Integralrechnung, dass der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks allgemein mit der Formel

$$A = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

berechnet werden kann.

Weißt du noch?

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $f{:}[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert eine differenzierbare Stammfunktion F mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Die Fläche, die der Graph von f im Intervall $[a,b]$ mit der x-Achse einschließt, hat dann die Größe $F(b)-F(a)$.

Spaziergang 13

Sonne für einen guten Zweck

Rheinufer

- Berechnung von Integralen durch Approximation

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Rheinufer unterhalb der Kennedybrücke, Brassertufer, Bushaltestelle „Opernhaus“

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner, Stoppuhr, Zollstock, Kreide

Die Kennedybrücke ist die mittlere der drei Bonner Rheinbrücken. Sie verbindet das Bonner Zentrum mit dem Stadtbezirk Beuel. Sie wurde 1949 erbaut und ersetzte damit die alte Rheinbrücke, die zum Ende des Zweiten Weltkrieges von der deutschen Wehrmacht gesprengt wurde. 2011 wurde im Rahmen von umfassenden Renovierungsarbeiten eine Solaranlage auf der Südseite errichtet, deren erwirtschaftete Einspeisevergütung alljährlich einer anderen Bonner Organisation gestiftet wird. Am südlichen Fuß der Brücke auf der Bonner Seite befindet sich eine Anzeigetafel, die Informationen zur Solaranlage und deren aktuellen Leistungsdaten liefert.

A1 Macht euch zunächst mit den einzelnen Angaben auf der Anzeigetafel vertraut. Betrachtet die Kilowatt-Anzeige drei Minuten lang und stellt eure Beobachtungen graphisch dar, indem ihr die Zeit (in Sekunden) auf der x-Achse und die aktuelle Leistung auf der y-Achse abtragt.

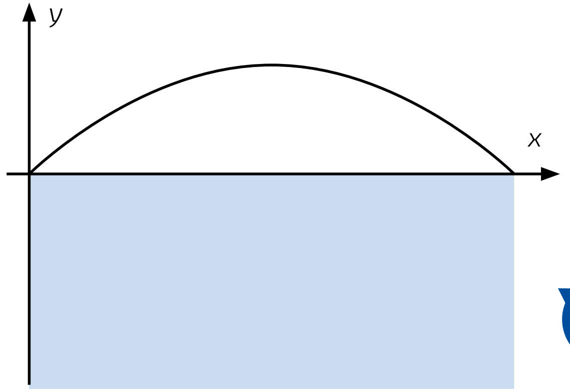
A2 Berechnet anhand eurer Werte aus Teilaufgabe **A1** die Energie in kWh, die in den drei Minuten gewonnen wird.

Die Anzeigetafel an der Kennedybrücke

Wusstest du schon?

Stromerzeugung mittels eigener Solaranlage ist umweltfreundlich und nachhaltig, da hierbei kein Kohlenstoffdioxid (CO_2) ausgestoßen wird. Immer mehr Hausbesitzer errichten auf ihren Dächern eine Photovoltaikanlage. Ohne Speichermodule kann der an sonnigen Tagen überflüssig erzeugte Strom jedoch nicht gespeichert werden und wird ins Netz eingespeist. An Tagen mit schlechten Wetterverhältnissen bezieht der Haushalt den Strom von Energiekonzernen. So können circa 25 Prozent des erzeugten Stroms selbst genutzt werden. Bei einer Solaranlage stößt man oftmals auf die Angaben Kilowatt und Kilowattstunde:

- Kilowatt (kW) ist eine Maßeinheit für die Leistung. Leistung ist Arbeit pro Zeit (kJ/s).
- Eine Kilowattstunde (kWh) entspricht der Energie, die eine Photovoltaikanlage mit einer Leistung von einem kW in einer Stunde erzeugen kann. Somit ist die Einheit Kilowattstunde ein Maß für den Stromertrag einer Photovoltaikanlage. Dabei gilt 1 kWh = 3600 kJ.



B1

Ihr habt soeben die Fläche berechnet, die der Graph eurer Funktion im Intervall [0,180] mit der x-Achse einschließt.

Nur in den seltensten Fällen ist die zu integrierende Funktion durch eine Treppenfunktion wie hier bei der Solaranlage gegeben. Im weiteren Verlauf wollen wir eine parabelähnliche Funktion betrachten. Geht hierzu auf der anderen Straßenseite neben der Tiefgarage die Treppen hoch. Am oberen Ende der Treppe befinden sich Steinplatten im Boden, die sich vom restlichen Pflaster abheben. Wir wählen das Koordinatensystem so wie in der Abbildung. Die Fläche der Steinplatten lässt sich in eine Rechteckfläche und in eine Fläche zwischen dem zu betrachtenden Funktionsgraphen und der x-Achse einteilen.

B1 Überlegt euch Möglichkeiten, wie ihr den Flächeninhalt unterhalb des Funktionsgraphen abschätzen könnt. Berechnet anhand eurer Überlegungen die Fläche.

B2 Wir wollen nun die Fläche genauer berechnen. Eine Möglichkeit ist es, den relevanten Bereich der x-Achse in Intervalle einzuteilen und über diesen Intervallen Rechteckflächen für die Abschätzung der Flächeninhalte zu verwenden. Überlegt euch, welche verschiedenen Möglichkeiten ihr habt. Wie wirken sich die Intervallgröße beziehungsweise die Intervallanzahl auf den Flächeninhalt aus?

Welchen Funktionswert nehmt ihr für die Höhe eines Rechtecks im jeweiligen Intervall?

Zeichnet die Rechtecke mit Kreide auf. Berechnet anhand eurer verschiedenen Einteilungen die abgeschätzten Flächeninhalte.

B3 Diskutiert abschließend, mit welcher Methode ihr euch dem tatsächlichen Flächeninhalt am besten nähert.

B4 Messt die Seitenlängen des großen Rechtecks und berechnet anschließend den gesamten Flächeninhalt der Steinplatten, indem ihr die Rechteckfläche addiert.

Weißt du noch?

Wenn eine Funktion die momentane Änderungsrate einer Größe darstellt, kann man die Gesamtänderung der Größe als Flächeninhalt zwischen Funktion und x-Achse deuten. Dafür benötigen wir die Integralrechnung.

Spaziergang 14

Mit Treppenstufen rechnen

Rheinaue

- Ober- und Untersumme
- Treppenfunktionen
- Steigungswinkel
- Flächenberechnung

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Rheinaustraße, Bushaltestelle „Ernst-Moritz-Arndt-Straße“

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner, Zollstock

Treppen in verschiedenen Größen bieten am Rhein gemütliche Sitzgelegenheiten, einen schönen Ausblick und den Zugang zur Promenade. Die stufenförmige Anordnung ist mathematisch sehr interessant und kann dir dabei helfen, Abschätzungen möglichst genau zu treffen. Begib dich an die abgebildeten Treppenstufen am Rheinufer.

A1 Miss jeweils die Tiefe und Höhe der großen aus Beton gegossenen Treppenstufe, der mittelgroßen steinernen Treppenstufen und der kleinen steinernen Treppenstufen.

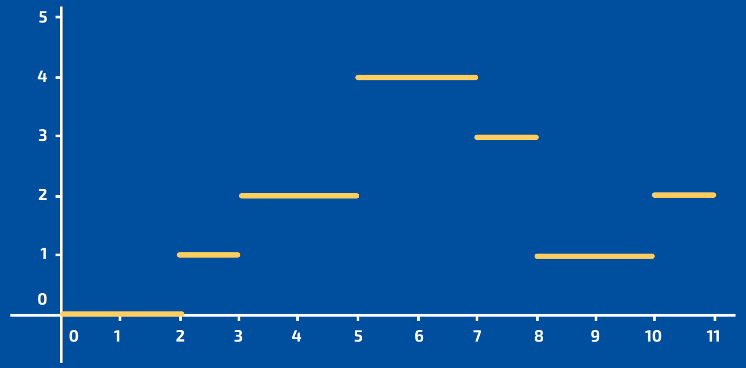
A2 Erstelle ein geeignetes zweidimensionales Koordinatensystem für die drei Treppenstufen mit dem Fuß der Treppe im Ursprung. Hierbei soll die Tiefe der Treppenstufen auf der *x*-Achse und die Höhe der Treppenstufen auf der *y*-Achse liegen. Definiere für die steinernen Treppenstufen jeweils gültige Treppenfunktionen, die die Trittfläche (die waagerechte Seite) der Stufen beschreiben.

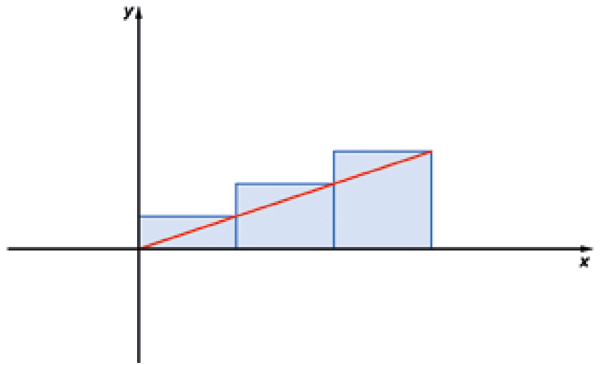
Wusstest du schon?

Eine Treppenfunktion ist eine besondere Funktion, die abschnittsweise konstant ist. Die einzelnen Abschnitte sehen dabei aus wie Treppenstufen.

Hier siehst du ein Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x < 2 \\ 1, & \text{falls } 2 \le x < 3 \\ 2, & \text{falls } 3 \le x < 5 \\ 4, & \text{falls } 5 \le x < 7 \\ 3, & \text{falls } 7 \le x < 8 \\ 1, & \text{falls } 8 \le x < 10 \\ 2, & \text{falls } 10 \le x < 11 \end{cases}$$





A3 Eine Ameise kriecht die Treppenstufen vom Fuß bis zum kreisförmigen gepflasterten Plateau hoch. Berechne für beide steinernen Treppenarten jeweils die Länge ihres Weges. Vergleiche die Werte. Erkläre, was passieren würde, wenn man immer kleinere Treppenstufentiefen und -höhen wählt.

Damit Eltern mit Kinderwagen die Treppe ebenfalls nutzen können, soll ein Teil der kleinen Treppenstufen abgetragen und durch eine schiefe Ebene (Rampe) ersetzt werden. Sie soll ebenfalls am Fuß der Treppe beginnen und auf Höhe des Plateaus enden.

B1 Hierzu muss der Betonbedarf für das Fundament geschätzt werden. Bestimme die Querschnittsfläche unterhalb der Treppenstufen für alle Treppenarten. Erkläre, wie sich die Werte zueinander verhalten und was du hieraus schließen kannst. In der Abbildung siehst du ein Beispiel für die Querschnittsfläche (blau) und die Rampe (rot).

B2 Berechne den exakten Flächeninhalt, welcher der dreieckigen Querschnittsfläche der Rampe entspricht. Welche der Näherungen aus Teilaufgabe **B1** ist besser?

B3 Der Steigungswinkel des Fundaments, d.h. der Winkel zwischen dem Boden und der geplanten Kinderwagenrampe soll zwischen 15 und 30 Grad liegen. So kann eine angenehme und sichere Nutzung gewährleistet werden. Bestimme den Steigungswinkel und vergleiche diesen mit den angegebenen Werten.

B4 Die Stadt möchte auch Rollstuhlfahrerinnen und Rollstuhlfahrern eine barrierefreie Nutzung des Plateaus ermöglichen. Für sie gilt allerdings, dass die Steigung maximal 6 Prozent betragen darf. Wie groß ist die prozentuale Steigung der modellierten Rampe? Macht euch Gedanken dazu, wie man Barrierefreiheit hier baulich umsetzen kann.

B5 Die Rampe soll halb so breit wie der aktuelle Durchgang sein. Bestimme das Volumen des neu zu bauenden Betonfundaments auf Grundlage des in Teilaufgabe **B2** bestimmten exakten Flächeninhalts. Du darfst dabei vernachlässigen, dass die Treppen kreisförmig angeordnet sind. Berechne die Materialkosten für das Betonfundament bei einem Preis von 95 Euro pro Kubikmeter.

Wusstest du schon?

Die Maße einer Treppe unterliegen strengen Vorschriften, die dafür sorgen, dass eine Treppe möglichst bequem und ohne großen Aufwand begangen werden kann. Häufig wird die Schrittmaßregel verwendet, um die Bequemlichkeit einer Treppe zu prüfen. Laut dieser Regel gilt eine Treppe als optimal, wenn zwei mal die Höhe einer Treppenstufe plus die Tiefe einer Treppenstufe dem Schrittmaß eines Menschen entspricht. Als Schrittmaß bezeichnet man die Schrittlänge eines Menschen (Abstand von Fußhinterkante zu Fußhinterkante).

Spaziergang 15

Extremer Fahrspaß

An der Gierponte

- Lokale Extrempunkte
- Bestimmte Integrale
- Parabelfunktion

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Brückenbogen der Kennedybrücke (Beueler Seite), An der Gierponte, Bus- und Stadtbahnhaltestelle „Konrad-Adenauer-Platz"

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Zollstock oder Maßband, Geodreieck oder Winkelmesser

Die Kennedybrücke (bis 1963 Rheinbrücke) wurde am 17. Dezember 1898 eröffnet. Am Ende des Zweiten Weltkrieges sprengte das deutsche Militär die Brücke. Schon 1949 konnte sie wiedereröffnet werden. In der Zwischenzeit musste man den Rhein mit einer Fähre überqueren, um nach Beuel zu kommen. Während der Bonner Republik wurden viele Staatsgäste, die am Flughafen Köln-Bonn landeten, über die Rheinbrücke in die provisorische Hauptstadt gebracht. Einer der Berühmtesten von ihnen war am 23. Juni 1963 der amerikanische Präsident John F. Kennedy, der nach seiner Ermordung am 22. November 1963 Namensgeber der Brücke wurde.

Heute finden rund um den Brückenbogen an der Gierponte Jahrmärkte oder ähnliche Attraktionen statt. In dieser Aufgabe wollen wir den Brückenbogen als Parabelfunktion modellieren.

Wusstest du schon?

Seit mehr als 40 Jahren begeistert die Beueler Osterkirmes Kinder, Jugendliche und Erwachsene mit ihren zahlreichen Attraktionen. Rund 25 Fahrgeschäfte, darunter der beliebte Autoscooter oder die Geisterbahn, werden extra für die 10-tägige Kirmes entlang des Beueler Rheinufers aufgebaut. Die Kirmes findet traditionell um die Osterzeit herum statt. Am Familientag erhalten Besucherinnen und Besucher ermäßigte Fahrpreise.

A1 Messt die Höhe des Brückenbogens
- mithilfe eines Winkelmessers und der Verwendung trigonometrischer Funktionen oder
- indem ihr sie durch Ausmessen und Abzählen der Brückensteine abschätzt.

A2 Modelliert nun den Brückenbogen als Parabelfunktion. Berechnet eine Funktionsgleichung für den Bogen, indem ihr das linke Ende des parabelförmigen Bogens als Punkt $P(0|y)$ anseht. Messt die Breite des Bogens und schätzt den Wert von y durch Ausmessen und Abzählen der Brückensteine.

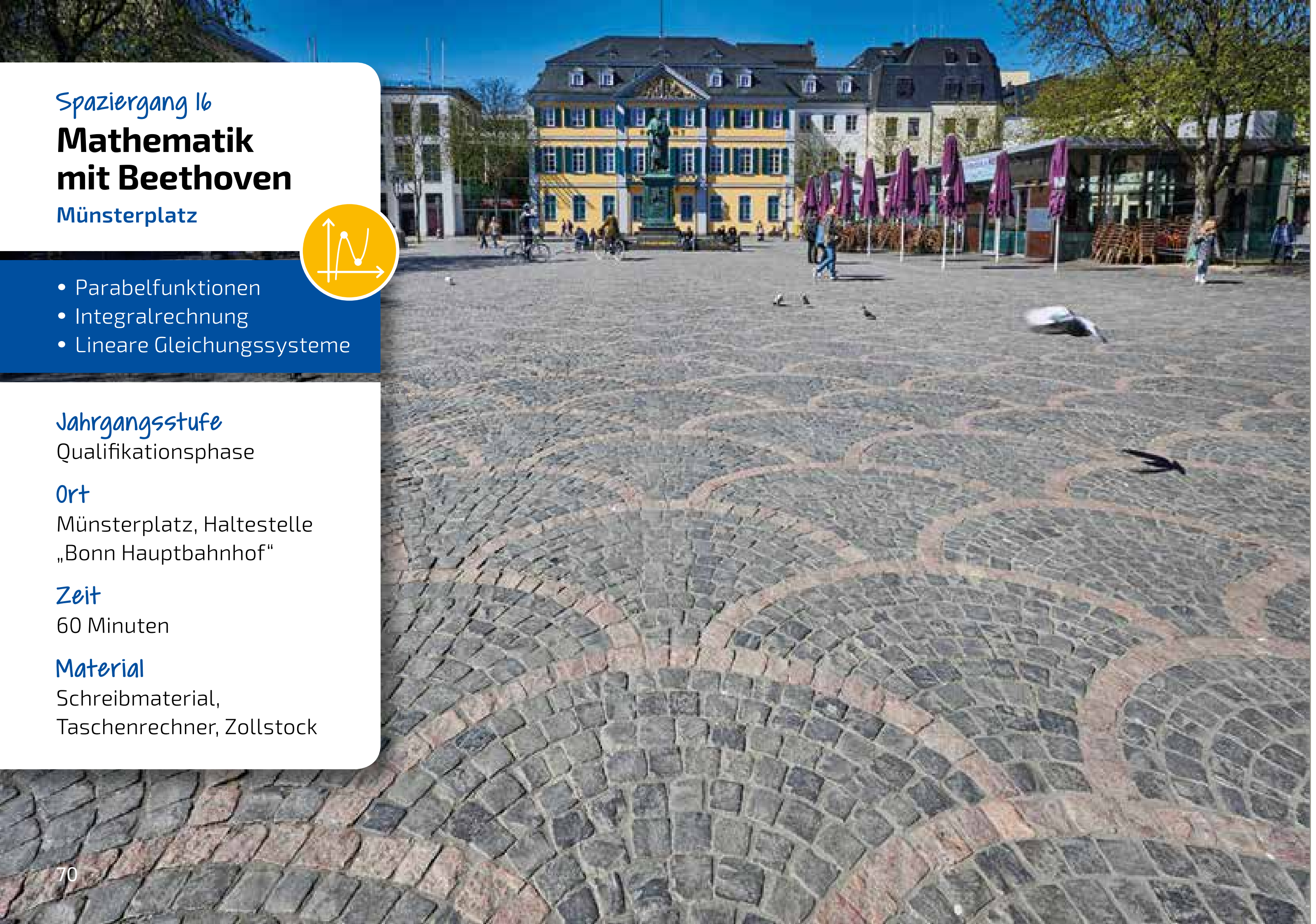
A3 Skizziere den Funktionsgraphen des parabelförmigen Brückenbogens.

B1 Rund um den Brückenbogen finden häufig Jahrmärkte oder ähnliche Attraktionen statt. Stelle dir vor, ein Fahrgeschäft ist auf die falsche Seite des Brückenbogens geliefert worden. Der Schausteller möchte nun die Teile seines Fahrgeschäftes mit einem Gabelstapler durch den Bogen fahren. Bestimme die maximale rechteckige Querschnittsfläche, die durch die Brücke passt.

Hinweis: *Verschiebe hierfür deine Parabel aus Teilaufgabe* ***A3*** *so, dass der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse wird.*

B2 Der Schausteller möchte gerne wissen, ob sein Fahrgeschäft mit einer rechteckigen Querschnittsfläche von 15 Metern Breite und 4 Metern Höhe durch den Bogen passt. Begründe, ob er das Objekt mit dem Gabelstapler durch die Brücke transportieren kann.

B3 Angenommen die Parabelfunktion aus Teilaufgabe **B1** modelliert den Bogen perfekt. Wie groß ist die gesamte Querschnittsfläche unterhalb des Brückenbogens? Wie groß ist der Anteil der optimalen Rechtecksfläche aus Teilaufgabe **B1** am gesamten Flächeninhalt?



Spaziergang 16

Mathematik mit Beethoven

Münsterplatz

- Parabelfunktionen
- Integralrechnung
- Lineare Gleichungssysteme

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Münsterplatz, Haltestelle „Bonn Hauptbahnhof“

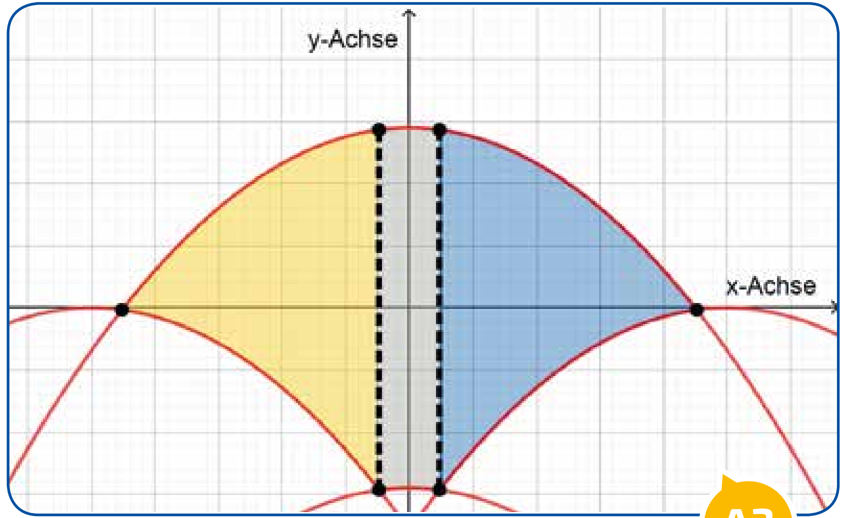
Zeit
60 Minuten

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner, Zollstock

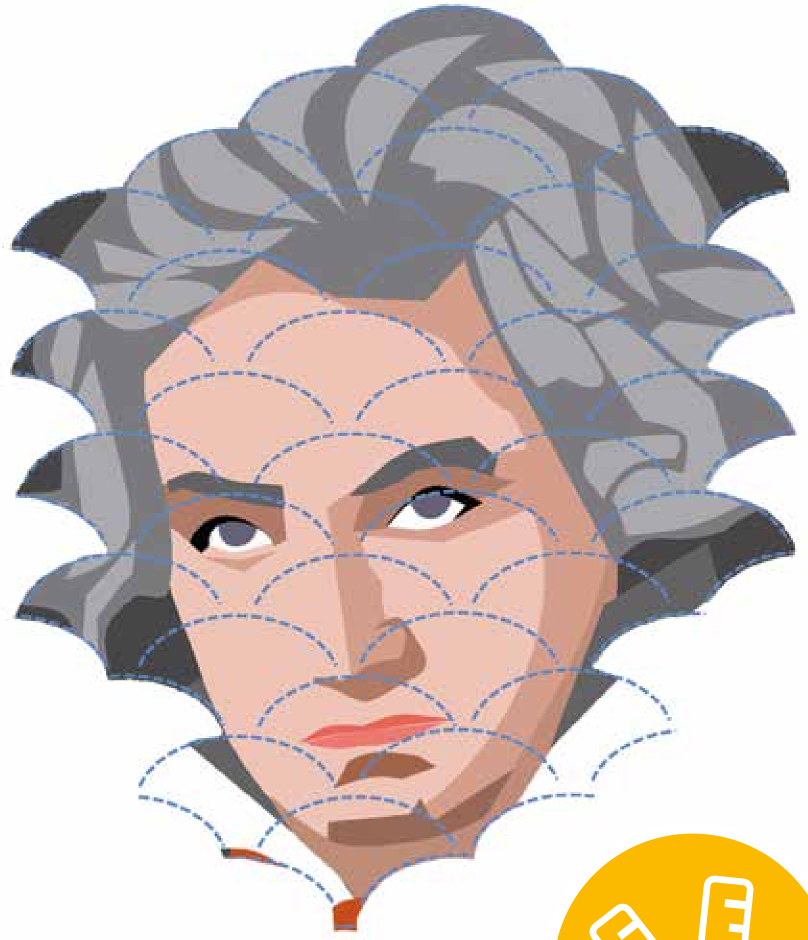
Der Münsterplatz ist in der Bonner Innenstadt der größte Platz. Historische Bauten, die an ihn grenzen, sind das Bonner Münster und die heutige Hauptpost. Auf dem Platz steht eine Statue zur Erinnerung an Ludwig van Beethoven. Beethoven wurde 1770 in Bonn geboren und lebte dort bis 1792. Sein Geburts- und Wohnhaus kann auch heute noch besichtigt werden und befindet sich in der Bonngasse. Er gilt als einer der bedeutendsten klassischen Komponisten.

A1 Der Münsterplatz ist mit grauen und roten Steinen fächerförmig gepflastert. Die roten Steine umranden die grauen parabelförmig. Vier Parabeln begrenzen jeweils einen „Fächer“. Zeichne eine der vier Parabeln in ein geeignetes Koordinatensystem. Stelle die Funktionsgleichung der Parabel auf. Miss benötigte Längen mit dem Zollstock ab.

A2 Bestimme die Funktionsgleichungen der anderen drei Parabeln, indem du den Graphen deiner in Teilaufgabe **A1** aufgestellten Funktion verschiebst.



A3



A3 Begründe, warum man zur Berechnung des Flächeninhalts eines der „Fächer“ die Fläche in drei Abschnitte einteilen sollte (siehe Abbildung). Berechne den Flächeninhalt eines „Fächers“ mithilfe der Integralrechnung. Nutze hierbei dein Wissen zur Berechnung einer Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen.

A4 Stelle dir vor, ein Künstler möchte mithilfe der „Fächer“ zum 250. Geburtstag Beethovens dessen Gesicht auf den Münsterplatz zeichnen (siehe Abbildung). Für einen Quadratmeter benötigt er 170 Milliliter Farbe. Berechne wie viel Liter Farbe der Künstler benötigt.

Weißt du noch?

Wenn man den Graphen einer Funktion *f* mit der Funktionsvorschrift $f(x)$ um $c>0$ Einheiten nach rechts verschieben möchte, so muss man den Graphen von $f(x-c)$ betrachten. Für eine Verschiebung nach links benötigt man entsprechend $f(x+c)$. Für eine Verschiebung in *y*-Richtung nach oben benötigt man $f(x)+c$ und entsprechend $f(x)-c$ für eine Verschiebung nach unten.

Spaziergang 17

Integration an der Halfpipe

Rheinaue

- Polynomfunktionen
- Stammfunktionen
- bestimmte Integrale
- Integration durch Substitution
- Extrempunkte

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase, Leistungskurs

Ort
Halfpipe in den Bonner Rheinauen, Nähe Martin-Luther-King-Straße, Stadtbahnhaltestelle „Rheinaue"

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Zollstock, grafikfähiger Taschenrechner

Der Freizeitpark Rheinaue wurde 1979 zur Bundesgartenschau eröffnet und erstreckt sich über beide Seiten des Rheins. Das Gelände umfasst 160 Hektar und wird von vielen Bonnerinnen und Bonnern als Naherholungsgebiet genutzt. Seit 2017 steht der Park unter Denkmalschutz. Die Halfpipe wurde 2012 eingeweiht und lockt mitlerweile viele Jugendliche mit ihren Skateboards an.

Stelle dir vor, die gesamte Verkleidung der Halfpipe solle erneuert werden. Für die Modellierung der Halfpipe bietet ein symmetrisches Polynom vierten Grades eine gute Annäherung. Die Fläche der Seitenverkleidung unterhalb der Fahrbahn kann dann mithilfe der Integralrechnung bestimmt werden.

A1 Wir wollen die Form der Fahrbahn mithilfe eines symmetrischen Polynoms 4. Grades modellieren, welches genau eine lokale Minimalstelle am Scheitelpunkt hat. Der rechte Ast der Funktion sei dabei um den konstanten Abschnitt der Fahrbahn nach rechts verschoben (siehe Abbildung). Wähle das Koordinatensystem wie in der Abbildung angegeben und miss die Punkte $P\,(0\,|\,p_2)$ und $Q\,(-4\,|\,q_2)$ wie in der Abbildung angegeben aus. Bestimme ein symmetrisches Polynom vierten Grades von der Form $f(x) = a\,x^4 + c$, welches die Form der Fahrbahn modelliert.

A2 Bestimme eine Stammfunktion des Polynoms aus Teilaufgabe **A1**.

A3 Nimm beispielhaft an, dass der Stadt Bonn für die Erneuerung der Verkleidung ein Angebot von einer Schreinerei vorliegt. Dabei werden 49 Euro pro Quadratmeter Holzverkleidung berechnet. Berechne die Kosten für die gesamte Außenverkleidung der Halfpipe. Bestimme dazu den Flächeninhalt,

- den das Polynom aus Teilaufgabe **A1** im Intervall [-4,0] mit der x-Achse einschließt. Wie oft benötigst du diese Fläche?
- der linken und rechten Seitenwand der Halfpipe und
- der rechteckigen Bereiche der Vorderansicht, die nicht durch den Flächeninhalt unterhalb des Polynoms erfasst werden.

*Stelle dir vor, ein anderer Anbieter ist der Auffassung, dass das in Teilaufgabe **A1** aufgestellte Polynom keine gute Annäherung an die Realität sei. Er berechnet seinen Kostenvoranschlag auf Grundlage folgender Funktion (x und g(x) jeweils in Metern):*

$$g(x) = \frac{1{,}6}{\sqrt{x+4{,}1}} - 0{,}7$$

B1 Zeichne die Funktion g mit deinem grafikfähigen Taschenrechner und wähle eine geeignete Fenstereinstellung. Diskutiere anschließend mit einem Partner, ob die Annäherung des zweiten Anbieters tatsächlich sinnvoller ist. Bestimmt dazu durch Messungen an der Halfpipe drei weitere Punkte (z. B. an den Stellen $x = -1$, $x = -2$ und $x = -3$). Wie groß ist jeweils die Abweichung des Messwertes von den entsprechenden Werten von f (aus Teilaufgabe **A1**) und g an diesen Stellen?

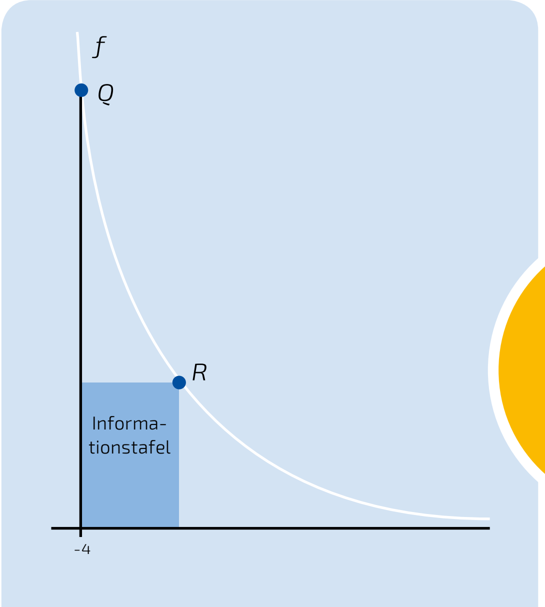
B2 Berechne, wie viele Quadratmeter Holzverkleidung für die Fläche unterhalb des Graphen der Funktion g im Intervall [-4,0] benötigt werden.

Hinweis: *Du kannst hierfür deine Kenntnisse zur Integraton mittels Substitution nutzen.*

B3 Vergleiche dein Ergebnis aus Teilaufgabe **B2** mit dem in Teilaufgabe **A3** errechneten Flächeninhalt. Welche Funktionsmodellierung wäre für die Stadt günstiger?

*Für die folgende Teilaufgabe benötigst du das Polynom aus Teilaufgabe **A1**. Stelle dir vor, unterhalb der Fahrbahn solle an der Seitenverkleidung eine rechteckige Informationstafel angebracht werden. Hierbei liegt eine Seite der Informationstafel auf der x-Achse und der Punkt R auf dem Fahrbahnrand (siehe Abbildung).*

C1 Berechne die Koordinaten des Punktes R so, dass der Flächeninhalt der Informationstafel maximal wird.



Spaziergang 18

(Un)bedingt Auto fahren!?

Trajektknoten

- Relative Häufigkeiten
- Laplace-Wahrscheinlichkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Jahrgangsstufe
Einführungsphase

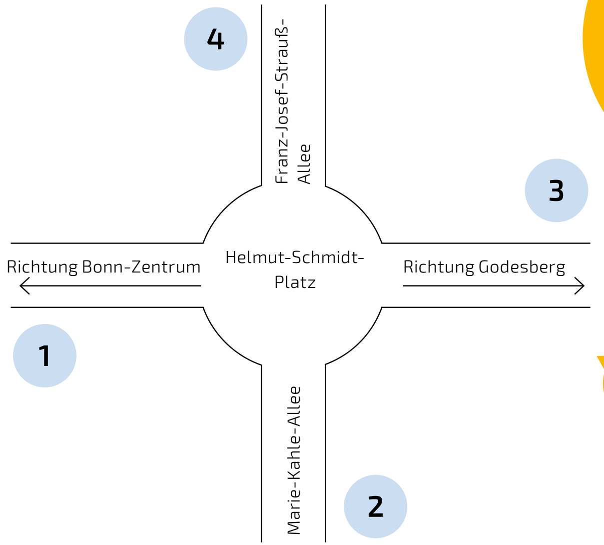
Ort
Kreisverkehr „Trajektknoten“ am Helmut-Schmidt-Platz, Stadtbahnhaltestelle „Heussallee/Museumsmeile“

Zeit
60 Minuten

Material
Schreibmaterial, Stoppuhr, Taschenrechner

Der Trajektknoten regelt seit 2012 den Verkehr auf der B9 auf Höhe der Museumsmeile und ist mit einem Durchmesser von 37 Metern und vier parallelen Fahrbahnen Bonns größter Kreisverkehr. Ihr werdet euch in dieser Aufgabe mit den Wahrscheinlichkeiten der Fahrten in verschiedene Richtungen beschäftigen.

A1 Teilt euch in Vierergruppen auf. Beobachtet für fünf Minuten die Fahrzeuge am Kreisverkehr und zählt, wie viele Autos jeweils die vier verschiedenen Ein- und Ausfahrten des Kreisverkehrs nehmen (siehe Abbildung). Übertragt hierzu folgende Tabelle in euer Heft und tragt die Werte ein.



A1

	Ein-/Ausfahrt 1	Ein-/Ausfahrt 2	Ein-/Ausfahrt 3	Ein-/Ausfahrt 4
Anzahl der einfahrenden Autos				
Anzahl der ausfahrenden Autos				

Wusstest du schon?

Das Kunstwerk von Bernat Vevet in der Mitte des Kreisels trägt den Namen ARC '89, ist 17 Meter hoch und besteht aus 42 Tonnen Stahl. Der Name rührt daher, dass die 14 Stahlträger eine Bogenneigung von 89 Grad aufweisen. Im Zusammenhang mit dem Standort der Skulptur im ehemaligen Regierungsviertel soll eine Verbindung zum Mauerfall 1989 hergestellt werden – ein für die damalige Bundeshauptstadt Bonn bedeutsames Ereignis. Durch die Krümmung der Bögen entstehen je nach Blickwinkel komplett verschiedene Bilder.

Wir interpretieren im Folgenden die relativen Häufigkeiten der gezählten Ereignisse als geschätzte Wahrscheinlichkeiten.

A2 Schätze mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe **A1** für jede Ein- und Ausfahrt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto dort ein- beziehungsweise ausfährt.

A3 Tauscht euch über eure Ergebnisse aus. Was fällt euch auf?

B1

	Ausfahrt 1	Ausfahrt 2	Ausfahrt 3	Ausfahrt 4	Summe
Einfahrt 1					
Einfahrt 2					
Einfahrt 3					
Einfahrt 4					
Summe					

B1 Beobachtet nun für weitere fünf Minuten erneut die Fahrzeuge und notiert jeweils, bei welcher der vier Ein- und Ausfahrten sie ein- beziehungsweise ausfahren. Teilt euch die Arbeit gut auf, damit ihr alle Ein- und Ausfahrten gleichzeitig im Blick habt. Bedenkt dabei, dass Autos den Kreisverkehr auch zum Wenden benutzen können! Füllt die linksstehende Tabelle.

B2 Schätze die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrzeug den Kreisverkehr dort wieder verlässt, wo es hereingefahren ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Viertelkreis, einen halben Kreis beziehungsweise einen Dreiviertelkreis fährt?

B3 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrzeug bei Ausfahrt 3 herausfährt, wenn es bei Ausfahrt 1 oder 2 hereingefahren ist?

B4 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrzeug bei Ausfahrt 1 oder 2 hereingefahren ist, wenn es den Kreisverkehr bei Ausfahrt 3 verlässt?

Weißt du noch?

Seien A und B zwei Ereignisse desselben Zufallsversuchs und das Ereignis B habe nicht die Wahrscheinlichkeit null: $\mathbb{P}(B) > 0$.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B (oder kurz die bedingte Wahrscheinlichkeit von A bezüglich B) gegeben durch

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Sie gibt an, wie wahrscheinlich das Ereignis A ist, wenn man schon die Zusatzinformation hat, dass das Ereignis B eingetreten ist.

Spaziergang 19

Gemeinsam in Europa – Wahrscheinlichkeiten und Spiele

Europasäule

- Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente
- Erwartungswert
- Baumdiagramm
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Jahrgangsstufe
Einführungsphase

Ort
Rochusstraße, Bushaltestelle „Rathaus Hardtberg“

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Uhr, Taschenrechner, Würfel

Die Europasäule befindet sich gegenüber des Hardtberger Rathauses in Duisdorf. Sie wurde von 1987 bis 1988 von Nicolaj Adlesič und Sigrid Wenzel entworfen und errichtet. Ihre Tafeln erinnern an wichtige Ereignisse, die die Stadt Bonn, die Bundesrepublik Deutschland und die Europäische Gemeinschaft beziehungsweise die Europäische Union betreffen.

Die Städte, die nach ihrer jeweiligen Himmelsrichtung ausgerichtet in einem Rondell im Boden eingelassen wurden, stellen die Hauptstädte der damaligen Bundesländer der Bundesrepublik Deutschland und Hauptstädte der Europäischen Gemeinschaft seinerzeit, sowie Straßburg als Standort des Europäischen Parlaments und Villemomble als Partnerstadt des Stadtbezirks Hardtberg dar. Die Hauptstädte der neuen Bundesländer wurden bislang nicht hinzugefügt. Aufgrund des Mauerfalls und der Erweiterung der Europäischen Union wurde das Denkmal im Jahr 2003 um neue Tafeln erweitert, die sich an den angrenzenden Sitzsteinen befinden.

Wusstest du schon?

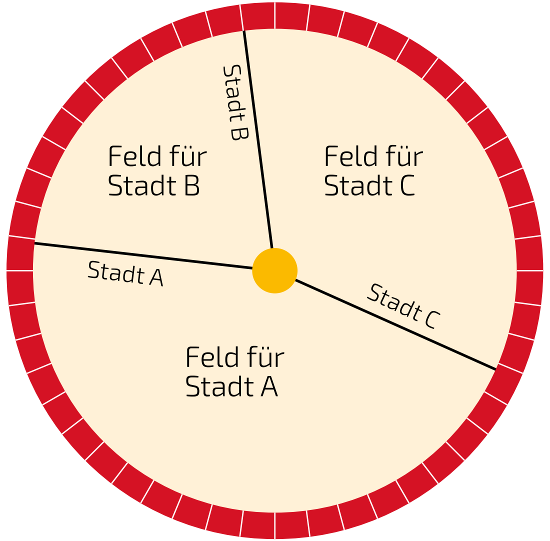
Im Jahr 1951 wurde von sechs europäischen Staaten die Europäische Gemeinschaft für Kohle und Stahl mit dem Ziel gegründet, durch gemeinsame Bewirtschaftung dieser Güter den Frieden unter den Mitgliedstaaten zu sichern. Im Laufe der Zeit wurde daraus die Europäische Gemeinschaft, der immer mehr Staaten beitraten. Nach dem Mauerfall und der Auflösung der Sowjetunion wurde 1992 aus der Europäischen Gemeinschaft heraus die um einige Politikbereiche erweiterte Europäische Union gegründet.

A1 Wie groß ist der Anteil an deutschen Städten auf dem Rondell? Wie groß wäre er, wenn man auch die Hauptstädte der neuen Bundesländer hinzugefügt hätte? Wie groß wäre er, wenn zusätzlich auch die restlichen Hauptstädte der heutigen Europäischen Union hinzugefügt würden?

A2 Bildet Dreiergruppen. Betrachtet das Rondell als Spielfeld, das folgendermaßen in Felder eingeteilt ist:

- Ein Feld beginnt an der Oberkante einer Beschriftung und endet an der Oberkante der nachfolgenden Beschriftung.
- Jedes Feld gehört zu der Stadt, deren Beschriftung innerhalb dieses Feldes liegt. Ein Beispiel seht ihr in der Abbildung.

Berechnet für jedes Feld den prozentualen Anteil am gesamten Rondell und notiert ihn zusammen mit der zugehörigen Stadt. Zählt dafür die roten Pflastersteine am Rand des Kunstwerks ab, die jeweils zu einem Feld gehören. Da sich die Felder von Kopenhagen und Hamburg überlappen, dürft ihr für Hamburg sechs Steine und für Kopenhagen einen Stein ansetzen. Teilt euch die Arbeit sinnvoll auf.



Nun lässt sich folgender Zufallsversuch durchführen: Person 1 stellt sich neben das Rondell und richtet den Blick nach außen, während Person 2 auf dem Rondell um die Säule herum im Kreis geht. Zu einem beliebigen Zeitpunkt, jedoch frühestens nach zehn Sekunden, ruft Person 1 „Stopp" und Person 2 bleibt daraufhin stehen.

A3 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Person 2 im Feld einer deutschen Stadt stehen bleibt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt sie in einer Stadt aus einem anderen europäischen Staat stehen?

A4 Das Zufallsexperiment wird zweimal hintereinander ausgeführt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Person 2 mindestens einmal in einer deutschen Stadt stehen bleibt?

A5 Siehst du, warum es sinnvoll ist, dass Person 1 erst nach frühestens zehn Sekunden „Stopp" sagen darf?

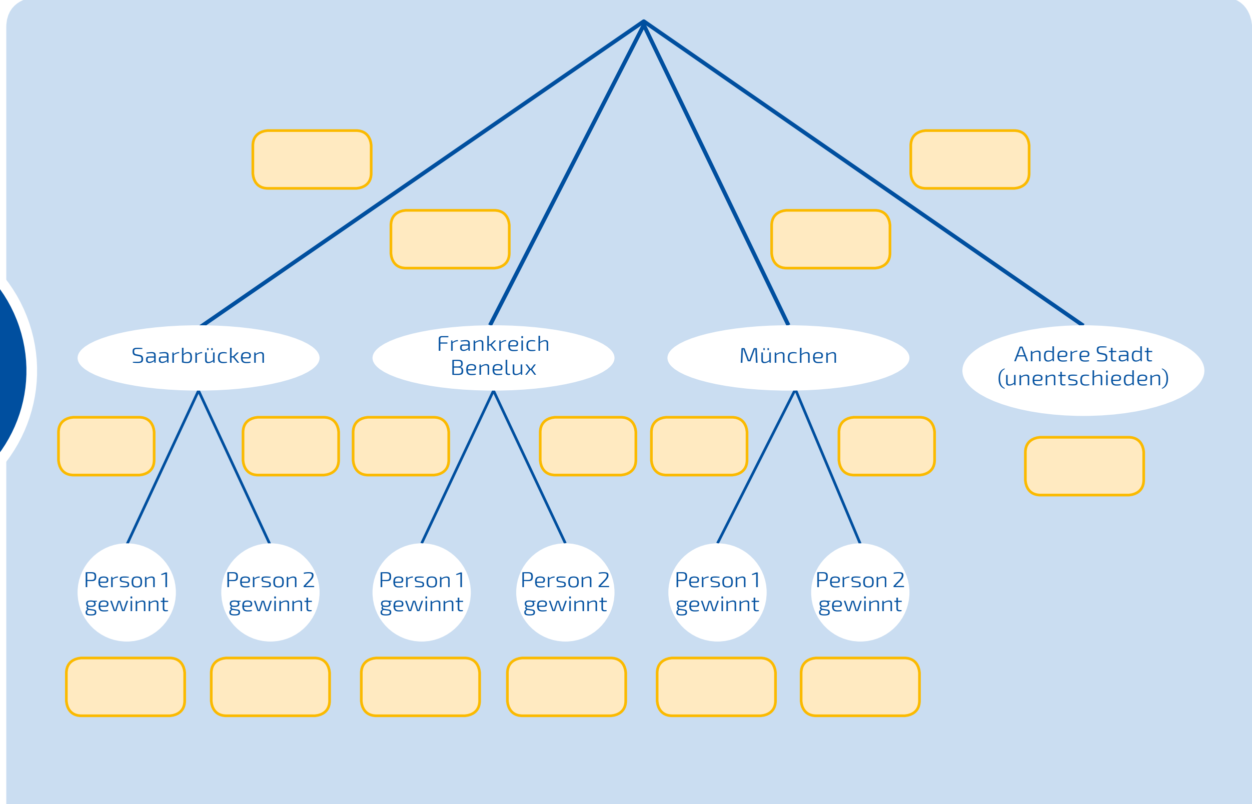
*Aus dem Zufallsversuch lässt sich ein Glücksspiel für zwei Personen konstruieren. Der Einsatz von beiden Personen beträgt jeweils 10 Euro. Zuerst wird der Zufallsversuch wie in Aufgabenteil **A** durchgeführt. Anschließend wird ein Würfel geworfen. Je nach Augenzahl gewinnt Person 1 bei folgenden Ereignissen:*

	Person 1 gewinnt, wenn Person 2 in Saarbrücken steht.
	Person 1 gewinnt, wenn Person 2 in einer französischen Stadt oder in einer Stadt eines Benelux-Landes steht.
	Person 1 gewinnt, wenn Person 2 in München steht.

Wenn Person 1 gewinnt, dann erhält sie 20 Euro. Steht Person 2 auf einer anderen Stadt, die gewürfelt werden kann, hat sie selbst gewonnen und erhält 15 Euro, Person 1 dagegen nur 5 Euro. Steht Person 2 auf einer Stadt, die nicht gewürfelt werden kann, geht das Spiel unentschieden aus und jeder bekommt wieder 10 Euro zurück. Daher ist in diesem Fall das Würfeln nicht notwendig.

B1 Berechne für jedes würfelbare Ereignis die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Person 2 auf einem zugehörigen Feld stehen bleibt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt sie auf einem nicht würfelbaren Feld stehen?

B2 Füllt in Partnerarbeit die Wahrscheinlichkeiten im folgenden Baumdiagramm aus. Dabei steht die erste Stufe für die Städtegruppe, die Person 2 erreichen kann und die zweite Stufe für den Ausgang des Spiels, wenn gewürfelt wurde.



B3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht Person 1 Verlust und wie hoch ist dieser? Wie hoch sind die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Geldsummen, die Person 1 gewinnen oder verlieren kann?

*Sei X = „Gewinn von Person 1" eine Zufallsgröße. Die möglichen Werte, die X annehmen kann, hast du bereits in Teilaufgabe **B3** betrachtet. Nun sollst du herausfinden, ob das Spiel für beide insgesamt fair ist oder nicht.*

B4 Was ist der zu erwartende Gewinn von Person 1?

B5 Bei welchem Erwartungswert ist das Spiel für beide fair? Wie kann man die Gewinnsummen verändern, damit es fair ist?

Wusstest du schon?

Der Erwartungswert

Sei X eine Zufallsgröße, die die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ annehmen kann. Dann ist der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ folgendermaßen definiert:

$$\mathbb{E}(X) = a_1 \cdot \mathbb{P}(X = a_1) + a_2 \cdot \mathbb{P}(X = a_2) + \ldots + a_n \cdot \mathbb{P}(X = a_n)$$

Beispiel:

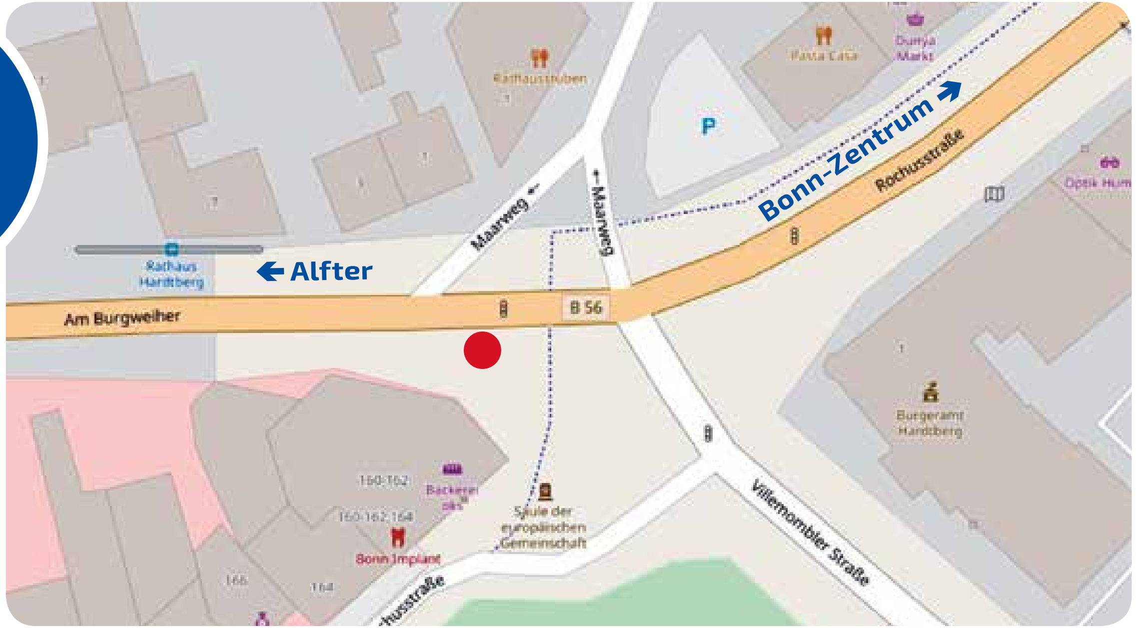
Ein Würfel wird einmal geworfen. Die Zufallsgröße ist W= "Augenzahl". Die Werte, die W annehmen kann, sind also 1, 2, 3, 4, 5 und 6, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 erreicht werden können. Damit lässt sich der Erwartungswert berechnen:

$$\mathbb{E}(W) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Der Erwartungswert ist also der Wert, den eine Zufallsgröße im Mittel annimmt.

Neben der Europasäule führt die Bundesstraße 56 entlang. In die eine Richtung führt sie in das Zentrum Bonns und in die andere Richtung nach Alfter.

C1 Begebt euch an den in der Abbildung gekennzeichneten Standort. Betrachtet von dort aus fünf Minuten lang zu zweit verschiedene Fahrzeuge, die die B56 befahren. Dabei beobachtet jeder von euch eine Richtung (stadteinwärts bzw. Richtung Alfter) und fertigt für seine Richtung zwei Strichlisten an: Die erste soll die Gesamtzahl aller Autos, die in diese Richtung fahren, enthalten. In die zweite soll eingetragen werden, wie viele Autos davon ein Bonner Kfz-Kennzeichen (BN) haben.



© OpenStreetMap-Mitwirkende

C2 Fertigt jeweils eine Vierfeldertafel mit den absoluten beziehungsweise den relativen Häufigkeiten für die Ereignisse
B =„Kfz-Kennzeichen aus Bonn" und
S =„Fahrtrichtung stadteinwärts" sowie deren Gegenereignisse an und tragt eure Ergebnisse in die passenden Felder ein. Die relativen Häufigkeiten wollen wir nun als (empirisch geschätzte) Wahrscheinlichkeiten interpretieren.

C3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit fährt ein Auto, das kein Bonner Kennzeichen hat, stadtauswärts?

C4 Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein stadteinwärts fahrendes Auto ein Bonner Kennzeichen?

Spaziergang 20

Blinken ist relativ wichtig? Nein, absolut!

Hochkreuzallee

- Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Gesetz der großen Zahlen
- Baumdiagramm
- Pfadregeln

Jahrgangsstufe
Einführungsphase

Ort
Bernkasteler Straße 1 bis zum Kreisverkehr auf der westlichen Straßenseite, Bushaltestelle „Hochkreuzallee"

Zeit
90 Minuten

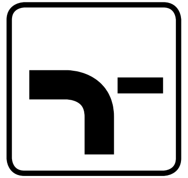
Material
Schreibmaterial

Wichtig:

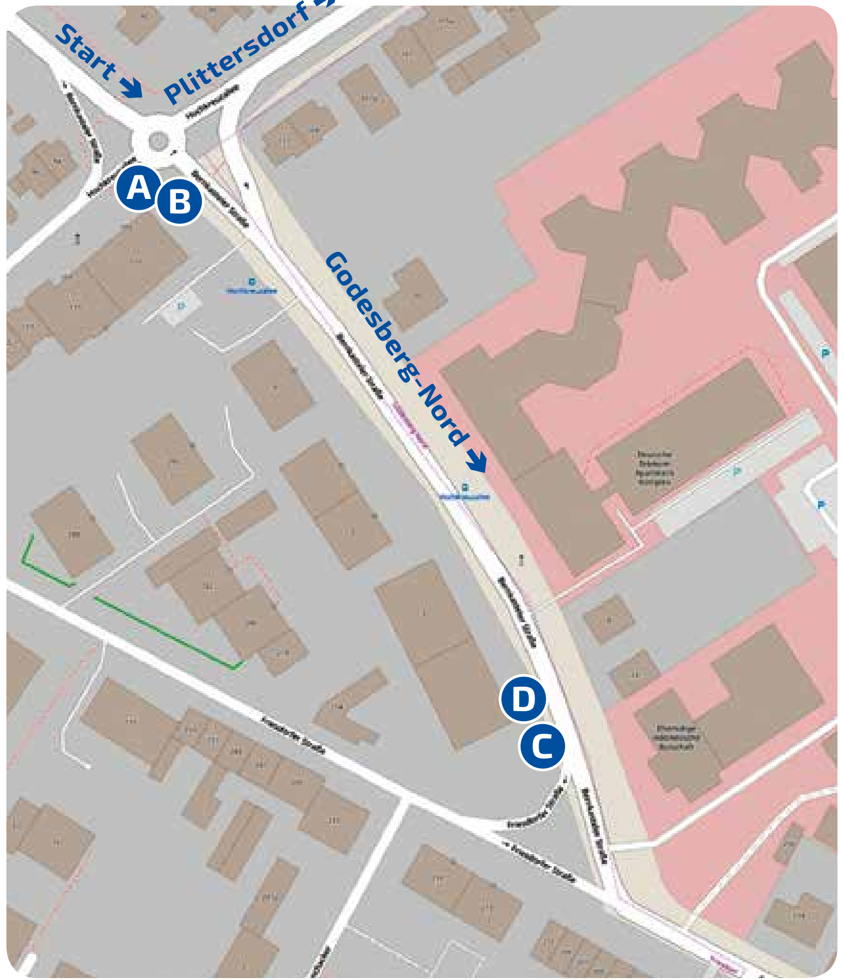
Achte in der gesamten Aufgabe darauf, keine Verkehrsteilnehmerinnen und Verkehrsteilnehmer zu stören oder abzulenken!

Sicherheit geht vor.

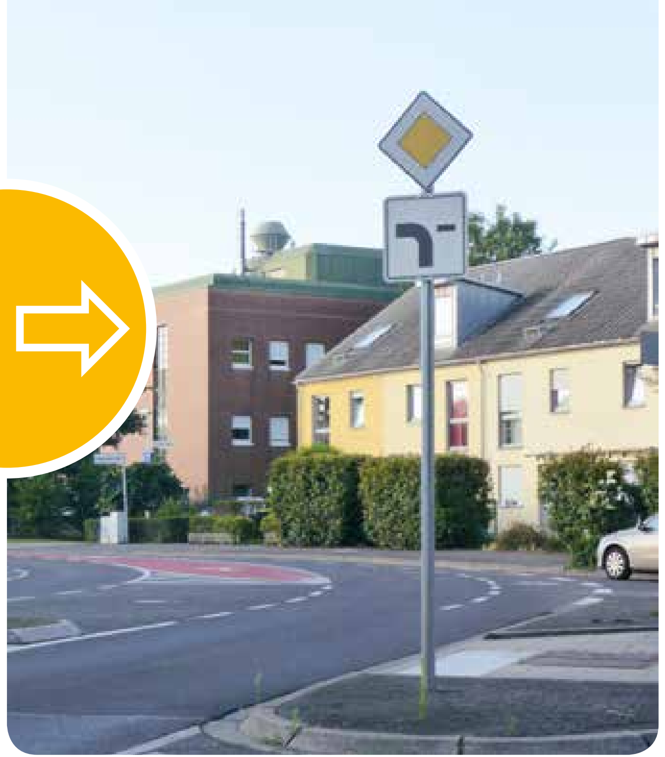
In dieser Aufgabe soll das Blinkverhalten von Verkehrsteilnehmerinnen und Verkehrsteilnehmern an Kreisverkehren und abknickenden Vorfahrtstraßen untersucht werden. Wenn ein Fahrzeug den Kreisverkehr verlassen möchte, so muss dies zuvor durch ein Blinksignal beziehungsweise Handzeichen nach rechts angekündigt werden. Eine abknickende Vorfahrtstraße ist durch folgendes Verkehrsschild zu erkennen:



Dabei markiert die dick dargestellte Linie den Verlauf der Vorfahrtstraße. Das Verkehrsschild ändert im Vergleich zu einer normalen Kreuzung nichts an den Blinkregeln. Folgt ein Fahrzeug der Vorfahrtstraße nach links, muss auch nach links geblinkt werden. Verlässt es beispielsweise die Vorfahrtstraße geradeaus, muss nicht geblinkt werden. Dennoch stellen diese Regeln für viele Menschen eine Herausforderung dar.



© OpenStreetMap-Mitwirkende



A1 Bildet Vierergruppen und verteilt euch an der Bernkasteler Straße auf die Positionen A bis D (siehe Karte). Vereinbart einen genauen Startzeitpunkt, ab dem ihr zehn Minuten lang folgende Daten messt:

- Person A beobachtet, welche Kraftfahrzeuge beim Ausfahren aus dem Kreisverkehr in Richtung Godesberg-Nord nicht blinken und teilt die Kennzeichen Person B mit, die sie notiert. Es genügt dabei, die Ziffern des Autokennzeichens aufzuschreiben.

- Person C notiert sich die Ziffern der Kennzeichen der Kraftfahrzeuge, die an der abknickenden Vorfahrtstraße korrekt, also nach links blinken, wenn sie der Straße in Richtung Godesberg-Nord folgen. Außerdem notiert sie analog die Ziffern der Autokennzeichen, die nach rechts in die Friesdorfer Straße abbiegen.

- Person D zählt die Gesamtanzahl aller Fahrzeuge, die aus der Bernkasteler Straße in Richtung Godesberg-Nord angefahren kommen.

Kraftfahrzeuge, die auf die Friesdorfer Straße abbiegen, sind für die folgenden Teilaufgaben nicht relevant. Daher werden diese aus beiden Listen entfernt.

A2 Erstellt aus den Messdaten gemeinsam eine Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten für die Ereignisse
K = „Blinkt im Kreisverkehr" und
V = „Blinkt an der Vorfahrtstraße".
Gebt an, in welches Feld sich eintragen lässt, wie oft ein Kennzeichen sowohl von Person B als auch von Person C notiert wurde.

Weißt du noch?

Mit einer Vierfeldertafel kann man die für bedingte Wahrscheinlichkeiten notwendigen Informationen kompakt darstellen. Seien A, B Ereignisse und $\overline{A}$, $\overline{B}$ ihre Gegenereignisse.
Dann kann man die Vierfeldertafel folgendermaßen ausfüllen:

	A	$\overline{A}$	**Summe**
B	$\lvert A \cap B \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert$	$\lvert B \rvert$
$\overline{B}$	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{B} \rvert$
Summe	$\lvert A \rvert$	$\lvert \overline{A} \rvert$	**Gesamtzahl**

für absolute Häufigkeiten und

	A	$\overline{A}$	**Summe**
B	$\mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$	$\mathbb{P}(B)$
$\overline{B}$	$\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$	$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\mathbb{P}(\overline{B})$
Summe	$\mathbb{P}(A)$	$\mathbb{P}(\overline{A})$	**1**

für Wahrscheinlichkeiten bzw. relative Häufigkeiten. Dabei ist $\lvert A \rvert$ die absolute Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses A.

A3 Berechne die zugehörigen relativen Häufigkeiten für alle Ereignisse und trage diese in eine zweite Vierfeldertafel ein. Wir wollen die relativen Häufigkeiten im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten auffassen. Sie stimmen häufig nicht mit den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten überein. Begründe, warum dies der Fall ist und gib an, wie sich der Fehler minimieren lässt. Welches Gesetz liegt dem zugrunde?

A4 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto an einer abknickenden Vorfahrtstraße nicht blinkt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit blinkt von zwei vorbeifahrenden Autos mindestens eines dort nicht?

A5 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto…

- an der Vorfahrtstraße blinkt, wenn es am Kreisverkehr korrekt blinkt?
- am Kreisverkehr blinkt, wenn es auch an der Vorfahrtstraße korrekt blinkt?
- an der Vorfahrtstraße blinkt, obwohl es dies am Kreisverkehr nicht getan hat?
- am Kreisverkehr richtig blinkt, obwohl es dies an der Vorfahrtstraße nicht getan hat?

A6 Gab es weitere besondere Vorkommnisse, die du im Straßenverkehr beobachten konntest? Falls ja, notiere sie dir und diskutiere sie in der nächsten Unterrichtsstunde.

Nun soll untersucht werden, ob es einen Zusammenhang zwischen dem Blinkverhalten am Kreisverkehr und der Richtung, in der er verlassen wird, gibt. Wir betrachten alle Verkehrsteilnehmerinnen und Verkehrsteilnehmer, die aus „Start"-Richtung in den Kreisverkehr einfahren. Dabei interessiert uns die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein Zeichen zum Abbiegen geben,

- *wenn sie den Kreisverkehr in Fahrtrichtung geradeaus nach Godesberg-Nord verlassen.*
- *wenn sie ihn in Fahrtrichtung links nach Plittersdorf verlassen.*

Fahrzeuge, die den Kreisverkehr an einer anderen Ausfahrt verlassen oder von einer anderen Seite einfahren, sollen vernachlässigt werden.

B1 Stellt euch an eine Stelle des Kreisverkehrs, von der aus ihr alles gut und sicher beobachten könnt. Überlegt euch gemeinsam, welche Daten ihr erfassen müsst, um eine vollständige Vierfeldertafel für das Ereignis B = „Gibt Zeichen beim Ausfahren" und der Ausfahrtrichtung (geradeaus oder links) anzufertigen. Der Messzeitraum soll zehn Minuten betragen. Gebt die resultierenden Vierfeldertafeln mit ihren absoluten und relativen Häufigkeiten an.

B2 Untersucht, ob es eine Abhängigkeit zwischen dem Ereignis „Gibt Zeichen beim Ausfahren" und der Ausfahrtrichtung gibt. Begründet, indem ihr die bedingten Wahrscheinlichkeiten berechnet und diese interpretiert.

Spaziergang 21

Erwartungsgemäß mit dem Rad unterwegs? Wahrscheinlich!

Kennedybrücke

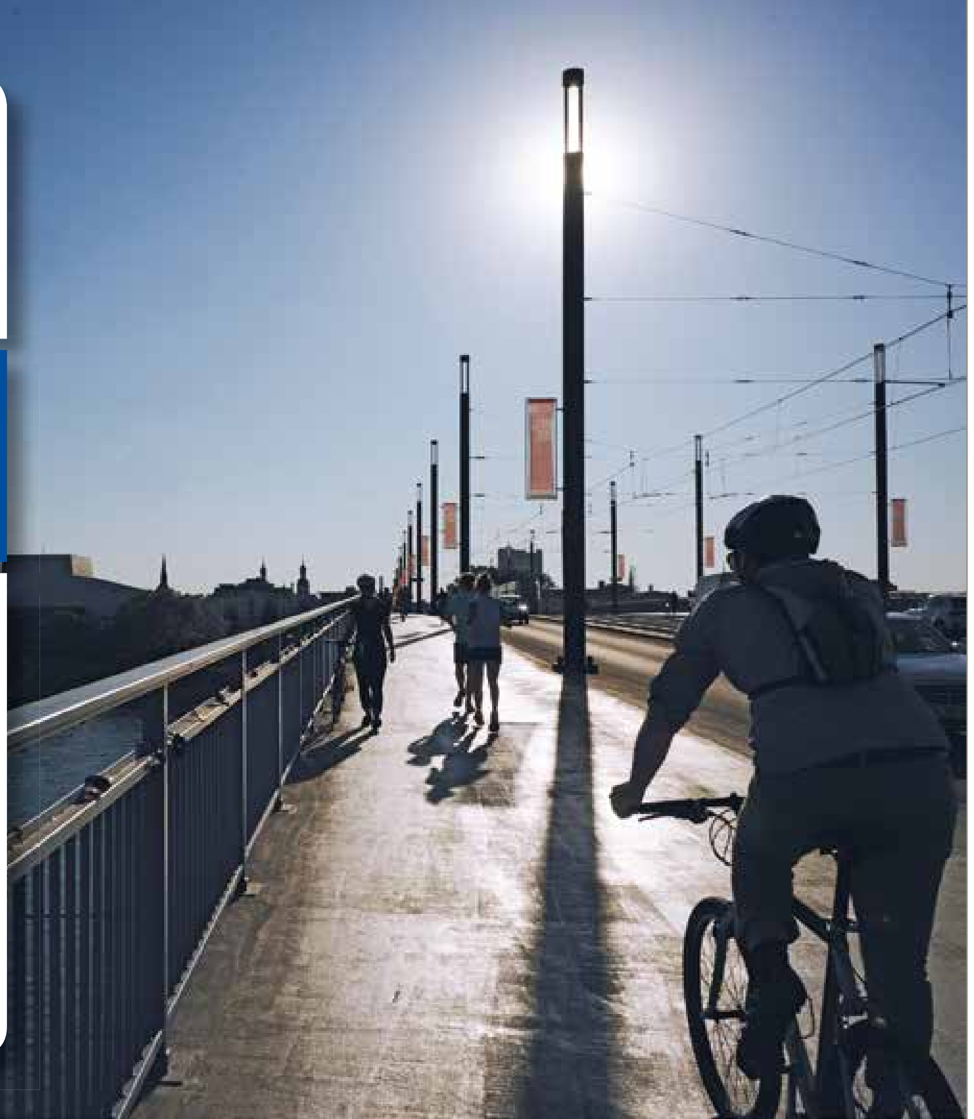
- Relative Häufigkeiten
- Binomialverteilung
- Erwartungswert und Standardabweichung
- Sigma-Regeln
- Gesetz der großen Zahlen

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
Linksrheinische Seite der Kennedybrücke, Rad- und Gehweg auf der südlichen Straßenseite, Bus- und Stadtbahnhaltestelle „Bertha-von-Suttner-Platz“

Zeit
90 Minuten

Material
Schreibmaterial, Uhr, Taschenrechner



Die Kennedybrücke ist eine von Radfahrerinnen und Radfahrern stark frequentierte Brücke im Herzen Bonns. An dem 2015 von der Stadt Bonn installierten Zähler auf der südwestlichen Seite der Brücke wurden in den ersten vier Jahren fast zehn Millionen Fahrräder gezählt. Das verdeutlicht, dass die Bonnerinnen und Bonner nach wie vor großes Interesse am Fahrradfahren haben.
Leider kommt es regelmäßig auch zu Unfällen. Im Jahr 2018 verunglückten 560 Radfahrende im Bonner Stadtgebiet. Die Deutsche Gesellschaft für Orthopädie und Unfallchirurgie empfiehlt Radfahrerinnen und Radfahrern, einen Fahrradhelm zu tragen, weil tödliche Hirnverletzungen dadurch um 60 % bis 70 % reduziert werden können.

A1 Platziert euch zu zweit neben dem Radweg. Ermittelt in einem Zeitraum von zehn Minuten die relative Häufigkeit der Radfahrerinnen und Radfahrer, die einen Helm tragen.

A2 Interpretiere im Folgenden die relative Häufigkeit der helmtragenden Personen als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand einen Helm trägt. Ist dies die tatsächliche Wahrscheinlichkeit? Wenn ja, warum? Wenn nein, wie ließe sich der Fehler minimieren? Welches Gesetz liegt dem zugrunde?

A3 Diskutiert in der Gruppe, warum es sinnvoll ist, die Anzahl der helmtragenden Personen als binomialverteilte Zufallsgröße zu modellieren. Was spricht für diese Modellannahme, was dagegen?

*Gegeben sei nun also die (n,p)-binomialverteilte Zufallsgröße X=„Anzahl der Radfahrenden, die einen Helm tragen", wobei n jeweils die Anzahl der betrachteten Personen ist und die Erfolgswahrscheinlichkeit p aus Aufgabenteil **A** übernommen werden soll.*

B1 Rechts neben dem Radweg befindet sich ein Fahrradbarometer, das angibt, wie viele Fahrräder heute schon an dieser Stelle die Brücke passiert haben. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass heute weniger als die Hälfte der Radfahrenden an dieser Stelle einen Helm trug?

B2 Berechne die geschätzte Anzahl an Personen, die diese Stelle der Brücke heute bislang mit einem Helm passiert haben. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau die erwartete Anzahl an Personen mit einen Helm fuhr. Begründe, warum das Ergebnis in dieser Größenordnung liegt.

***Hinweis:** Runde die Anzahl vorher auf eine ganze Zahl.*

B3 Wir betrachten nun eine kleinere Stichprobe an Fahrradfahrenden, nämlich $n = 12$. Zeichne ein Histogramm mit den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ für jedes $k \leq n$.

B4 Berechne den zugehörigen Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X für $n = 12$.

B5 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen $(\mu - \sigma)$ und $(\mu + \sigma)$ annimmt? Runde dabei die untere Grenze ab und die obere Grenze auf. Warum ist die Wahrscheinlichkeit hierfür so groß? Ziehe das Histogramm zur Begründung mit hinzu.

Lies anschließend folgenden Text:

Die Sigma-Regeln
Sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p, dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Dann gilt annähernd

a) $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$
b) $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}5\,\%$
c) $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

und für ganzzahlige Prozentsätze

d) $\mathbb{P}(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\,\%$
e) $\mathbb{P}(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\,\%$
f) $\mathbb{P}(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\,\%$

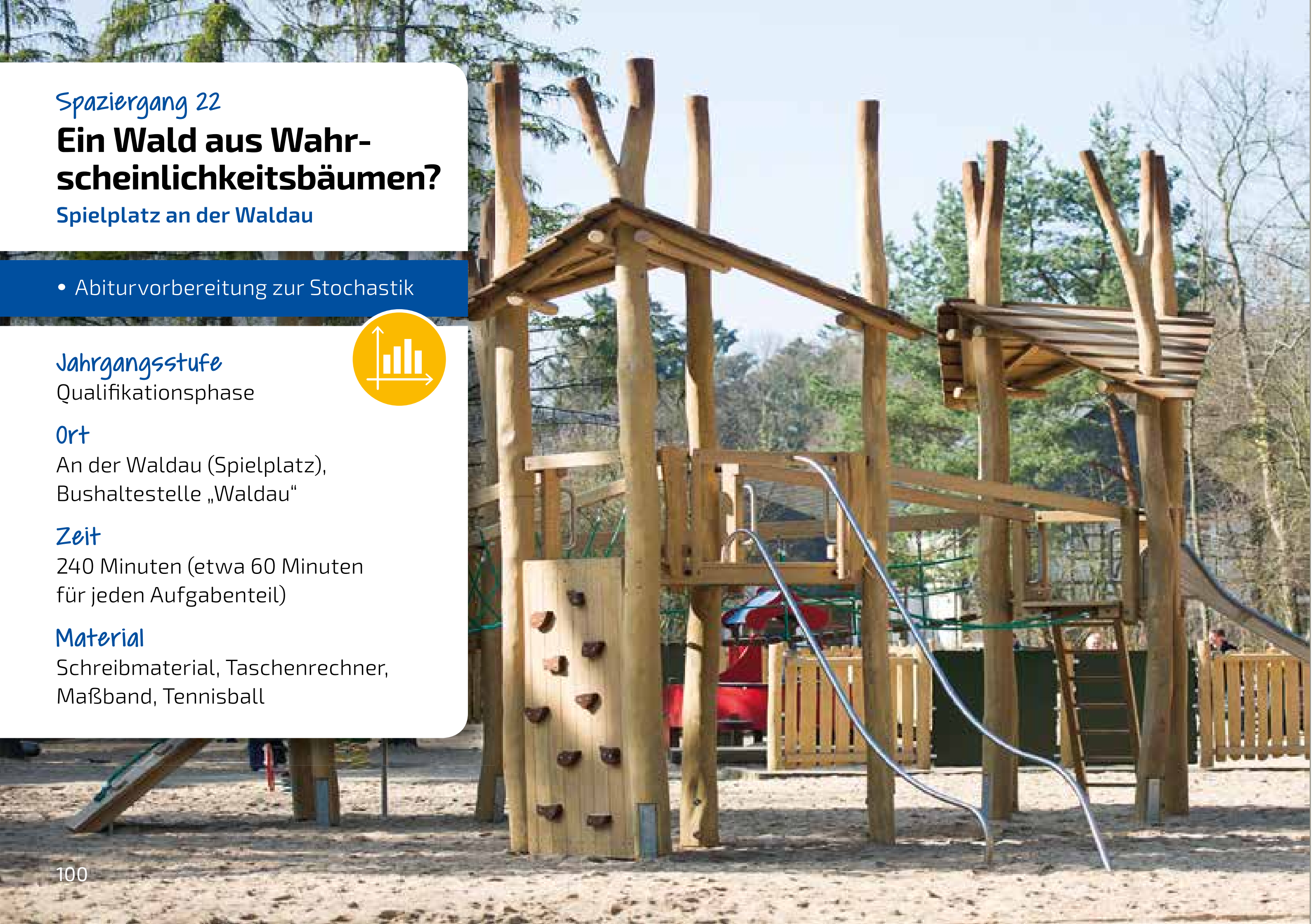
B6 In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert lag die heutige Anzahl der helmtragenden Personen bis jetzt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 68,3 Prozent beziehungsweise 99 Prozent?

B7 Sucht euch zu zweit eine Stelle, an der ihr Fußgängerinnen und Fußgänger beobachten könnt und ermittelt über einen Zeitraum von zehn Minuten den relativen Anteil der Personen, die beim Gehen nach unten auf ihr Mobiltelefon schauen.

Interpretiert diesen Anteil wieder als Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. Wir betrachten die Zufallsgröße Y =„Anteil der Personen, die auf ihr Mobiltelefon schauen, in Prozent". In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert von Y liegt der Anteil zu einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,7 Prozent? Der Anteil soll dabei eine ganze Prozentzahl sein.

Wusstest du schon?

Wird man beim Radfahren mit dem Mobiltelefon erwischt, fällt ein Verwarngeld in Höhe von 55 Euro an. Bei der Benutzung im Auto sind es mindestens 100 Euro. (Stand: 2019)



Spaziergang 22

Ein Wald aus Wahrscheinlichkeitsbäumen?

Spielplatz an der Waldau

• Abiturvorbereitung zur Stochastik

Jahrgangsstufe
Qualifikationsphase

Ort
An der Waldau (Spielplatz), Bushaltestelle „Waldau"

Zeit
240 Minuten (etwa 60 Minuten für jeden Aufgabenteil)

Material
Schreibmaterial, Taschenrechner, Maßband, Tennisball

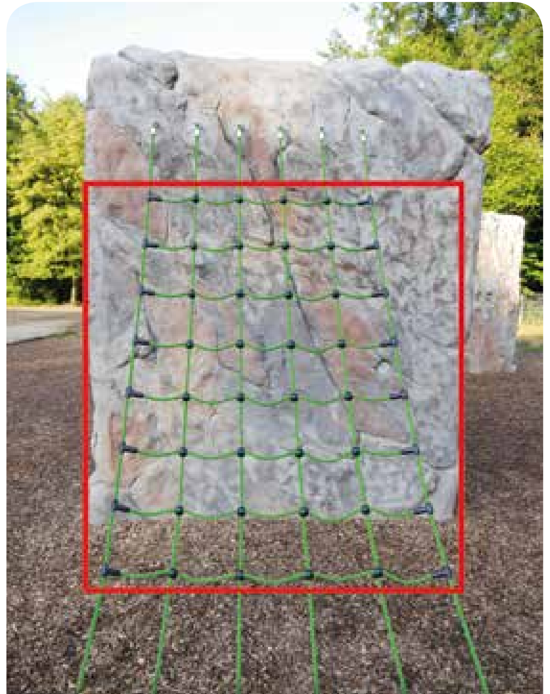
Die Waldau ist ein Teil des Kottenforstes und wird von vielen Bonnerinnen und Bonnern zur Tageserholung genutzt. Vor Ort finden sich neben Wanderwegen auch ein Waldlehrpfad, ein Freigehege, das „Haus der Natur" und ein großer Spielplatz. Der Kottenforst ist der älteste Wald Bonns und ein wichtiges Naturschutzgebiet.

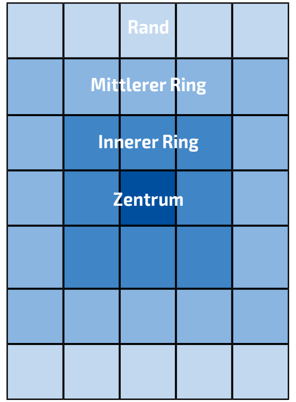
*Teilt euch in drei Gruppen auf, sodass ihr gleichzeitig an den Aufgabenteilen **A** bis **C** arbeiten könnt. Bearbeitet all diese Aufgaben, bevor ihr zu Aufgabenteil **D** übergeht.*

An einem der beiden Kletterfelsen ist ein Netz befestigt, das sich in 35 Felder einteilen lässt, wenn man die Verbindungen zum Boden und zum Felsen vernachlässigt. Die Felder stellen eine Art Zielscheibe dar, die in folgende Zonen aufgeteilt wird (dabei stehen gleiche Blaustufen für zusammenhängende Regionen).

Wusstest du schon?

Der Kottenforst hat seinen Namen vom keltischen Wort „coat", was so viel wie Wald bedeutet. Das heutige Erscheinungsbild des Kottenforstes mit seinen begradigten Wegen geht auf den Kurfürsten Clemens-August zurück. Um besser im Wald jagen zu können, ließ er im 18. Jahrhundert hier die Pfade ebnen.





Nun könnt ihr folgenden Versuch durchführen: Ihr stellt euch drei Meter vor das Netz und werft mit verschlossenen Augen einen Tennisball. Das Ziel dabei ist es, ein möglichst zentrales Feld zu treffen. Für jeden getroffenen Bereich erhaltet ihr eine Punktzahl.

- Zentrum: 10 Punkte
- Innerer Ring: 3 Punkte
- Mittlerer Ring: 1 Punkt
- Rand: 0 Punkte
- Netz verfehlt: -10 Punkte

Weißt du noch?

Beim Testen einer Hypothese spricht man von einem Fehler **1. Art,** wenn die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl sie in Wirklichkeit wahr ist. Bei einem Fehler **2. Art** wird die Nullhypothese angenommen, auch wenn sie in Wirklichkeit falsch ist. Als **Signifikanzniveau** bezeichnet man die vor einem Hypothesentest festgelegte maximale Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese aufgrund der Testergebnisse abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist.

A1 Führt den Versuch zwanzig Mal zu zweit aus, wobei ihr abwechselnd werft. Notiert, wie oft dabei welcher Bereich getroffen wurde. Berechnet die zugehörigen relativen Häufigkeiten, die wir im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten interpretieren werden.

A2 Wie hoch ist der zu erwartende Punktgewinn bei einem Versuch? Definiere zunächst eine geeignete Zufallsgröße.

A3 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zehn Würfen mindestens zweimal das Zentrum zu treffen, wenn sich die Trefferwahrscheinlichkeiten aus Teilaufgabe **A1** nicht ändern? Überlege dir dafür, welche Verteilung die zugehörige Zufallsgröße hat. Schreibe die Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit komplett auf.

Hinweis: *Gehe von einer Trefferwahrscheinlichkeit für das Zentrum von fünf Prozent aus, wenn es niemand von euch getroffen hat.*

Eine naheliegende Vermutung ist, dass sich die Zielgenauigkeit mit der Zeit verbessert, da man nach jedem Wurf eine Rückmeldung bekommt, wo der Ball landet. Sei p die bisherige Wahrscheinlichkeit für einen Wurf ins Zentrum. Nun soll getestet werden, ob die Trefferwahrscheinlichkeit q beim wiederholten Werfen größer ist.

A4 Die Hypothese $H_1: q > p$ soll angenommen werden, wenn es bei 20 Würfen mindestens zwei Treffer ins Zentrum mehr gab als zuvor. Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

A5 Ab wie vielen Treffern würde die Hypothese $H_1: q > p$ bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\,\%$ angenommen werden, wenn man zwölf Mal wirft? Führt den Test anschließend durch und entscheidet dadurch, ob sich die Wurfgenauigkeit verbessert hat.

Das Klettergerüst hat die Form eines Kuboktaeders. Ein Kuboktaeder besteht aus sechs gleich großen Quadraten und acht gleich großen regelmäßigen Dreiecken.

Beachte, dass die Quadrate an den äußeren Seiten in jeweils zwei Dreiecke unterteilt wurden.

Anzahl kurzer Rohre	Anzahl langer Rohre	Gesamtlänge	Häufigkeit
3	0		*2*

Auf der Ober- und Unterseite befindet sich jeweils ein Quadrat. Ziel ist es, einen Pfad aus den roten Rohren von einer unteren Ecke zur diagonal liegenden Ecke am oberen Quadrat zu finden (siehe Abbildung). Dabei gibt es folgende Einschränkungen:

- *Ein Pfad darf nur aus drei oder vier Rohren bestehen.*
- *Die waagerecht auf dem Boden liegenden Rohre dürfen nicht verwendet werden. Ein zum Pfad gehörendes Rohr darf nur nach oben führen oder auf gleicher Höhe bleiben wie das Endstück des vorherigen Rohres. Der ganze Pfad darf also kein fallendes Rohr enthalten.*

Wusstest du schon?

Das Kuboktaeder ist ein interessantes Polyeder, welches sich in vielen Fachbereichen wiederfinden lässt: Die kristalline Struktur von künstlich hergestellten Diamanten ist beispielsweise kuboktaederförmig. Das Kuboktaeder findet sich aber auch in verschieden Bereichen der Kunst wieder, unter anderem in Werken von da Vinci (siehe Abbildung) und Escher.

B1 Identifiziert alle möglichen Pfade und bestimmt ihre Längen in Metern. Übernehmt die Tabelle in euer Heft und tragt eure Ergebnisse ein.

B2 Berechne das arithmetische Mittel m und die Standardabweichung s der Pfadlängen.

B3 Ein zulässiger Pfad wird zufällig ausgewählt, wobei jede Wahl gleich wahrscheinlich ist. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine Länge zwischen $m - 1{,}5\,s$ und $m + s$ liegt?

B4 Es werden 800 zulässige Pfade zufällig ausgewählt. Mit welcher ungefähren Wahrscheinlichkeit haben höchstens 520 Pfade davon eine Länge, die sich im vorgegebenen Bereich aus Teilaufgabe **B3** befindet? Nutze zur Lösung der Aufgabe die Standardnormalverteilung.

Weißt du noch?

Der Satz von de Moivre-Laplace sagt aus, dass eine binomialverteilte Zufallsgröße $X \sim B(n,p)$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und Stichprobenumfang n für große n durch die Normalverteilung angenähert werden kann. Das bedeutet

$$\mathbb{P}(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Gegenüber den anderen beiden Objekten befindet sich ein Gerüst mit zwei Balance-Elementen.

C1 Balanciert abwechselnd vom Startpunkt bis zum Zielpunkt, ohne einen Fuß auf dem Boden absetzen zu müssen. Erst, wenn das Ziel erreicht wurde, wird der Versuch als Erfolg gewertet. Macht dabei als Gruppe mindestens zehn Versuche. Notiert die Anzahl der Erfolge.

Wir interpretieren die relative Häufigkeit der Erfolge als Erfolgswahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgröße X und nehmen an, dass sich diese Wahrscheinlichkeit nicht ändern wird.

C2 Berechne den Erwartungswert μ von X, wenn die Anzahl der Versuche $n = 30$ beträgt.

C3 Angenommen, du führst 70 Versuche durch. Wie muss α gewählt werden, damit $\mathbb{P}(\mu - \alpha \le X \le \mu + \alpha) \approx 95{,}5\,\%$ gilt? Welche Bedeutung hat die Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang?

Nun werden die verschiedenen Stationen der vorigen Aufgabenteile zu einem Spiel kombiniert.

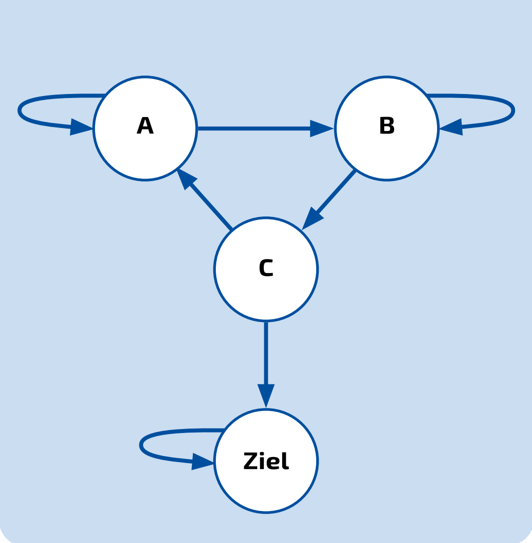
- *Stufe A: Das Spiel beginnt an dem Netz am Kletterfelsen. Man führt den in Aufgabenteil **A** beschriebenen Zufallsversuch einmal durch. Trifft man das Zentrum oder den inneren Ring, erreicht man die nächste Stufe. Wenn nicht, muss der Versuch in der nächsten Runde wiederholt werden.*

  *Dabei sollen die Wahrscheinlichkeiten aus Teilaufgabe **A1** verwendet werden.*

- *Stufe B: Es geht weiter am Klettergerüst. Man ordnet jedem möglichen Pfad eine beliebige Zahl zwischen 1 und 16 zu. Anschließend wird aus einer Lostrommel, in der sich jede dieser Zahlen einmal befindet, ein Los gezogen und der zugehörige Pfad betrachtet. Ist dieser im vorgegebenen Bereich aus Teilaufgabe **B3**, kommt man in die nächste Stufe, ansonsten muss der Versuch in der nachfolgenden Runde wiederholt werden.*

- *Stufe C: Wenn man am Balancegerüst den Weg vom Start bis zum Ziel schafft, hat man das Spiel gewonnen und landet im Endzustand, in dem man für immer bleibt. Wenn man es nicht schafft, fällt man wieder in Stufe A zurück. Verwende die Erfolgswahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe **C1**.*

D1 Übertrage das folgende Übergangsdiagramm in dein Heft und trage die fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.



D2 Berechne schriftlich die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich ein Spieler oder eine Spielerin nach zwei Runden in den jeweiligen Zuständen befindet.

D3 Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Spieler oder die Spielerin nach zehn Runden immer noch oder wieder in Stufe A befindet.

D4 Bestimme die stationäre Verteilung (Fixvektor) mithilfe eines linearen Gleichungssystems und interpretiere das Ergebnis.

Weißt du noch?

Ein Vektor $\vec{x}$ heißt stationäre Verteilung oder Fixvektor eines Prozesses mit der Übergangsmatrix A, wenn er sich bei Multiplikation mit A nicht verändert, also wenn $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt.

Impressum

Mathematische Spaziergänge in Bonn

Klimaneutral
Druckprodukt
ClimatePartner.com/10704-2007-1075

Projektleitung
Dr. Antje Kiesel
Dr. Thoralf Räsch
Universität Bonn
Mathematik-Zentrum
Endenicher Allee 60, 53115 Bonn
spaziergaenge@math.uni-bonn.de

Projektteam (ehemalige Mitglieder)

Zeile 1 Dr. Antje Kiesel, Leonard Strotmann, Yuliya Kryvitskaya, Annika Mester, Maximilian König, Julia Schuster

Zeile 2 Carsten Hoffmann, Hannah Sophia Schmitt, Chiara Mertes, Florian Winterscheid, Diana Raineri, Alexandra Bettin, Nik Oster

Zeile 3 Dr. Thoralf Räsch, Sivar Kadir, Yannick Müller, Alexandra Mauel, Gabriela Brüll, Gerrit Keller

Autorenteam
Sivar Abdelrahman, Gabriela Brüll, Julian Dittrich, Dana Eilers, Gerrit Keller, Alexandra Mauel, Annika Mester, Yannick Müller, Leonard Strotmann

Gestaltung
Frühere Auflagen: Carmen Wolfer;
Ines Wegge-Schatz, designlevel 2
Aktualisierung: Ines Hentschel, Querblick

Bildnachweis

Volker Lannert
Seite: 2, 3, 8, 11, 14, 18, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 33, 34, 35 (Bild rechts oben), 38, 41, 42, 45, 50, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 62, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 73, 76, 78, 81, 82, 84 (Bild links), 87, 89, 96, 98, 100, 105, 108

Projektteam/Autorenteam
Seite: 9, 10, 12, 13, 15, 19, 24, 27, 30, 32, 35 (Bild links), 36, 39, 40, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 59, 60, 63, 64, 71, 74, 75, 77, 79, 84 (Abbildung rechts), 85, 86, 90, 92, 93, 95, 97, 101, 103, 106, 107

Lizenzfreie Fotos
Seite: 17, 72, 104

Harald Grohganz
Seite: 111

Hausdorff Center for Mathematics
Seite: 110

Botanische Gärten der Universität Bonn
Seite: 31

www.openstreetmap.org
Seite: 88 und 91

Weitere Informationen finden Sie auf unserer Homepage
https://www.mathspaz.uni-bonn.de/

Stand
Aktualisierte Auflage: 2025

Am Hausdorff Center for Mathematics der Universität Bonn arbeiten viele Menschen, die fest davon überzeugt sind, dass Mathematik großen Spaß macht. Um auch euch zu zeigen, wie faszinierend die Welt der Mathematik sein kann, bietet das HCM verschiedene kostenlose Angebote für Schülerinnen und Schüler. Im Folgenden findet ihr eine kleine Auswahl.

Schulbesuche

Das Studierendenteam besucht auf Anfrage Schulen und begeistert euch für das Fach Mathematik. Die Themen gehen über den regulären Lehrplan hinaus und stellen spannende mathematische Probleme vor, z.B. die Fibonacci-Zahlen, Fraktale, Graphentheorie und die Enigma.

Bonner Matheclub

Im Bonner Matheclub wollen alle nur eines: gemeinsam Mathe machen und dabei Spaß haben! Hier trefft ihr euch wöchentlich mit Studierenden, um spielerisch mathematische Probleme zu lösen.

SchülerInnenwoche

Die SchülerInnenwoche findet jedes Jahr nach den Sommerferien statt und lädt euch ein, sich in spannenden Vorlesungen und Übungen für vier Tage der Uni-Mathematik zu nähern. Zusätzlich könnt ihr an einer Studienberatung und einem Besuch im Arithmeum teilnehmen.

Bonner Matheturnier

Das jährliche Bonner Mathematikturnier ist ein eintägiger Teamwettbewerb, bei dem hunderte Schülerinnen und Schüler in Fünferteams aus jeweils einer Schule gegeneinander antreten. Gemeinsam löst ihr in Teams knifflige Aufgaben – vormittags in der Staffel und nachmittags im Wettbewerb Sum of Us.

FFF

Das Projekt Fördern, Fordern, Forschen der Universität Bonn bietet interessierten und engagierten Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit, schon während der Schulzeit reguläre Vorlesungen zu hören und an Übungen teilzunehmen.

Hier findet ihr mehr Informationen zu diesen und weiteren Angeboten:
mathematics.uni-bonn.de/de/outreach/fuer-schuelerinnen-und-lehrerinnen

MATHEMATISCHE
SPAZIERGÄNGE IN

BONN

50°43'42,5"N 7°5'2,3"O

Universität Bonn
Mathematik-Zentrum
Endenicher Allee 60
53115 Bonn
spaziergaenge@math.uni-bonn.de

hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS
JOACHIM HERZ STIFTUNG
ArdaghMetalPackaging
UNIVERSITÄT BONN