

Ganz schön verwinkelt

Winkel an Geradenkreuzungen

Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an zwei benachbarten Wegkreuzungen im Kottenforst in der Nähe von Röttgen erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Die vervollständigten Sätze lauten:

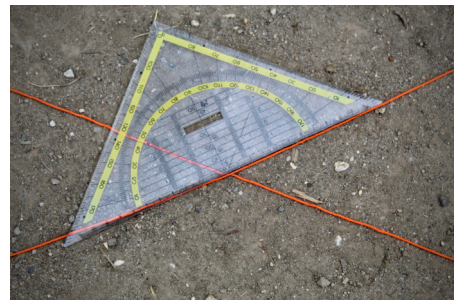
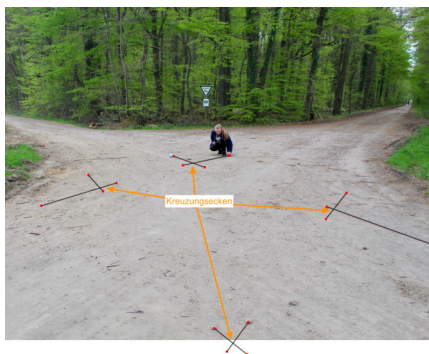
- Nebenwinkel sind zwei Winkel, die an einer Geradenkreuzung nebeneinander liegen.
- Scheitelwinkel sind zwei Winkel, die an einer Geradenkreuzung gegenüber liegen.

A2 $\alpha, \beta: \underline{N}$ $\alpha, \gamma: \underline{S}$ $\alpha, \delta: \underline{N}$ $\beta, \gamma: \underline{N}$ $\beta, \delta: \underline{S}$ $\gamma, \delta: \underline{N}$

A3 Die korrekten Aussagen lauten:

- Die Nebenwinkel addieren sich immer zu 180° .
- Die Nebenwinkel ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel.
- Die Scheitelwinkel können sich zu 180° ergänzen.
- Die Scheitelwinkel sind immer gleich groß.

B1 Die Abbildung zeigt, wie die Kreuzungsecken modelliert werden können.

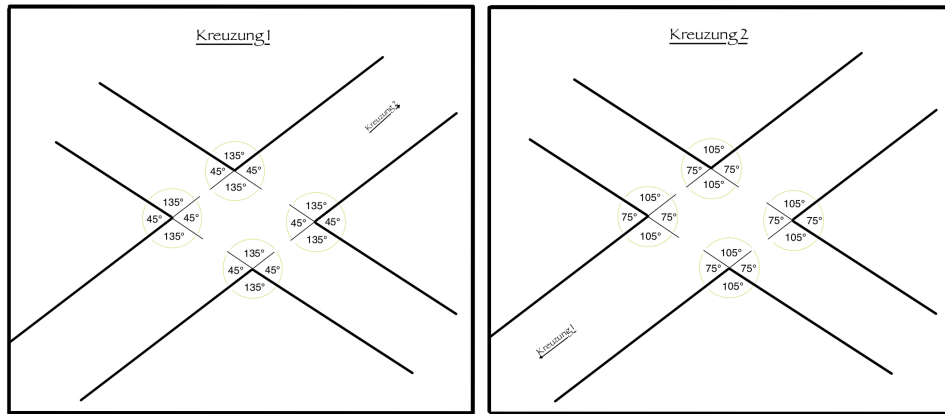


B2 Es wird vor Ort gemessen.

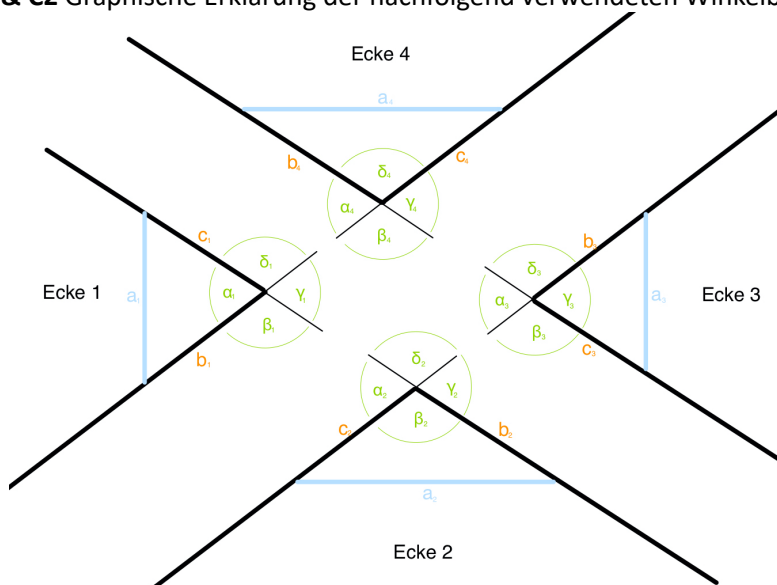
B3 Die Größe der Winkel können, wie in der obigen Abbildung dargestellt, am Geodreieck abgelesen werden.

Die Schülerinnen und Schüler können die gemessenen Winkelgrößen in einer Tabelle oder in einer Skizze festhalten. Diese beiden Varianten werden im folgenden aufgeführt.

	Kreuzung 1				Kreuzung 2			
Ecke	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
1	135°	45°	135°	45°	75°	105°	75°	105°
2	135°	45°	135°	45°	75°	105°	75°	105°
3	135°	45°	135°	45°	75°	105°	75°	105°
4	135°	45°	135°	45°	75°	105°	75°	105°



C1 & C2 Graphische Erklärung der nachfolgend verwendeten Winkelbenennungen:



Die Winkel $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ und δ_4 werden mithilfe der „Zauberformel“ bestimmt. Die übrigen Winkel können anschließend über den Neben- und den Scheitelwinkelsatz berechnet werden. Die folgende Tabelle verzeichnet die berechneten Winkelgrößen für beide Kreuzungen:

Ecke i	Seiten (in cm)			Winkel			
	a_i	b_i	c_i	α_i	β_i	γ_i	δ_i
Kreuzung 1							
1	277	150	150	134,84°	45,16°	134,84°	45,16°
2	115	150	150	134,9°	45,1°	134,9°	45,1°
3	227	150	150	134,84°	45,16°	134,84°	45,16°
4	115	150	150	134,9°	45,1°	134,9°	45,1°
Kreuzung 2							
1	181	150	150	74,22°	105,78°	74,22°	105,78°
2	238	150	150	75°	105°	75°	105°
3	181	150	150	74,22°	105,78°	74,22°	105,78°
4	238	150	150	75°	105°	75°	105°

■ := Über die „Zauberformel“ bestimmte Winkel

Exemplarische Rechnung zu Ecke 1, Kreuzung 1:

Mit „Zauberformel“ $\alpha_1 = \cos^{-1} \left(\frac{b_1^2 + c_1^2 - a_1^2}{2 \cdot b_1 \cdot c_1} \right)$ mit $a_1 = 277, b_1 = c_1 = 150$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \cos^{-1} \left(\frac{150^2 + 150^2 - 277^2}{2 \cdot 150 \cdot 150} \right) \approx 134,84^\circ$$

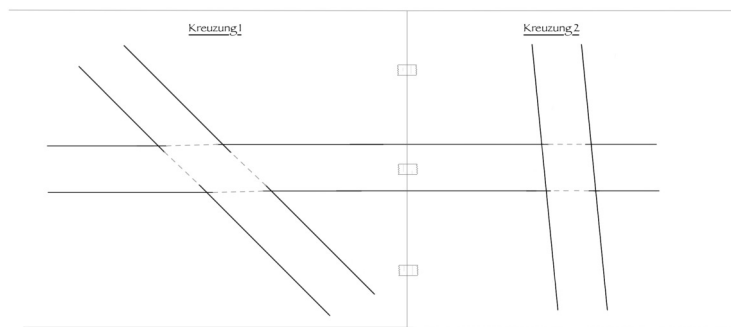
Mit Nebenwinkelsatz: $\beta_1 = 180^\circ - \alpha_1 = 45,16^\circ$

Mit Scheitelwinkelsatz: $\gamma_1 = \alpha_1 = 134,84^\circ; \delta_1 = \beta_1 = 45,16^\circ$

C3 Da das Geodreieck klein und die Schnüre verhältnismäßig dick sind oder nicht gerade gespannt werden, kann es schwierig werden, die Winkel genau zu messen.

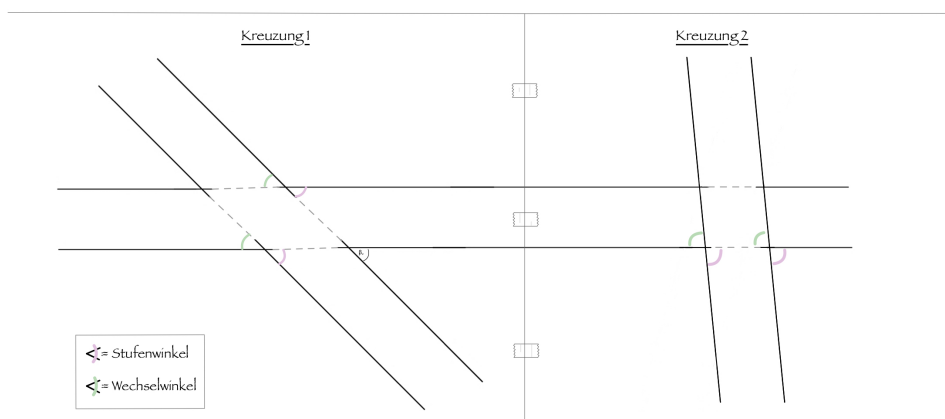
Die Seitenlängen des modellierten Dreiecks hingegen sind sehr genau messbar, weshalb die Rechnung mit diesen Werten im mathematischen Sinne genauer ist.

D1 & D2 Die Zeichnung kann wie folgt aussehen:



Hätte man die Wegbreiten maßstabsgetreu gezeichnet, hätten die Zeichnungen der beiden Gruppen in den meisten Fällen nicht problemlos aneinander gepasst. Dies würde den weiteren Verlauf der Aufgabe erschweren, da dann Wechsel- und Stufenwinkel nicht gut erkannt werden könnten.

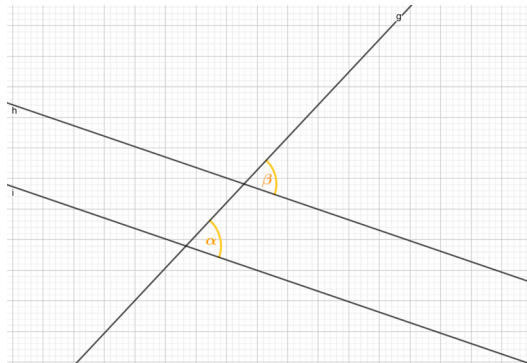
D3 Wechsel- und Stufenwinkel sind innerhalb der einzelnen Kreuzungen und auch zwischen den beiden Kreuzungen zu finden. In der folgenden Abbildung finden sich exemplarisch die Stufen- und Wechselwinkel zu β_2 aus Kreuzung 1:



Es handelt sich um Stufenwinkel, wenn die Winkel auf der selben Seite der Schnittgeraden und auf den sich entsprechenden Seiten der beiden geschnittenen Geraden liegen. Um Wechselwinkel handelt es sich, wenn die Winkel auf unterschiedlichen Seiten der Schnittgeraden und auf unterschiedlichen Seiten der beiden geschnittenen Geraden liegen.

D4 Innerhalb der Kreuzung verlaufen die Geraden, die den Rand eines Weges begrenzen, parallel. Dort stellen wir fest, dass die entstehenden Wechselwinkel gleich groß sind. Betrachten wir Wechselwinkel, die an Geraden verschiedener Kreuzungen entstehen, so stellen wir fest, dass diese nicht gleich groß sind. Hier verlaufen die betrachteten Geraden nicht parallel.

D5 Wenn zwei parallele Geraden h und i von einer dritten Gerade g geschnitten werden, dann sind die auftretenden Stufenwinkel α und β gleich groß (siehe Abbildung).



E1 Nebenwinkel sind zwei Winkel, die an einer Geradenkreuzung nebeneinander liegen. Sie ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel (180°).

Als Scheitelwinkel bezeichnet man zwei Winkel, die an einer Geradenkreuzung gegenüber liegen. Sie sind immer gleich groß.

Zwei Winkel, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen heißen Stufenwinkel:

- Sie liegen auf der selben Seite der Schnittgeraden g und
- auf sich entsprechenden Seiten der geschnittenen Geraden h und i .

Genau dann, wenn h und i parallel verlaufen, sind die Stufenwinkel gleich groß.

Wechselwinkel heißen zwei Winkel, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

- Sie liegen auf der selben Seite der Schnittgeraden g und
- auf unterschiedlichen Seiten der geschnittenen Geraden h und i .

Genau dann, wenn h und i parallel verlaufen, sind die Wechselwinkel gleich groß.

Didaktischer Kommentar

Thema dieses mathematischen Spazierganges ist das Erkunden des Neben-, Scheitel-, Stufen- und Wechselwinkelsatzes sowie das Modellieren von realen Gegebenheiten in einem mathematischen Kontext. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Eigenschaften verschiedener Winkelpaare im Sachkontext entdecken und gleichzeitig verschiedene Modellierungsmöglichkeiten sowie eine alternative Methode zum Messen von Winkeln kennenlernen. Damit kann der mathematische Spaziergang mit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe 1 durchgeführt werden.

Mithilfe von bekannten Methoden, wie dem Messen von Winkeln, werden geometrische Sätze erarbeitet und veranschaulicht. Viel Vorwissen aus einer vorangegangenen Unterrichtseinheit ist in diesem Spaziergang nicht erforderlich. Es sollten lediglich die Begriffe Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel und Wechselwinkel grundlegend bekannt sein. Diese werden in der Aufgabe vertieft und mit den zugehörigen Sätzen verknüpft, sodass in einer späteren Unterrichtsstunde mit weiteren Eigenschaften von Winkeln (beispielsweise im Dreieck) fortgefahren werden kann.

Die Aufgabenteile **A** und **E** können alternativ zur Vor- und Nachbereitung des Spaziergangs in den Klassenraum ausgelagert werden.

Für die Bearbeitung des Spaziergangs empfiehlt sich eine Einteilung der Schülerinnen und Schüler in Dreier- oder Vierergruppen je Kreuzungsecke (12/16 Personen je Kreuzung), was die Durchführung des Spaziergangs mit einer großen Klasse ermöglicht.

Hinweis: Je nach Lage der Kreuzungen kann eine zweite Aufsichtsperson nötig sein.