Ausgerechnet schräg

Steigung von Wegen

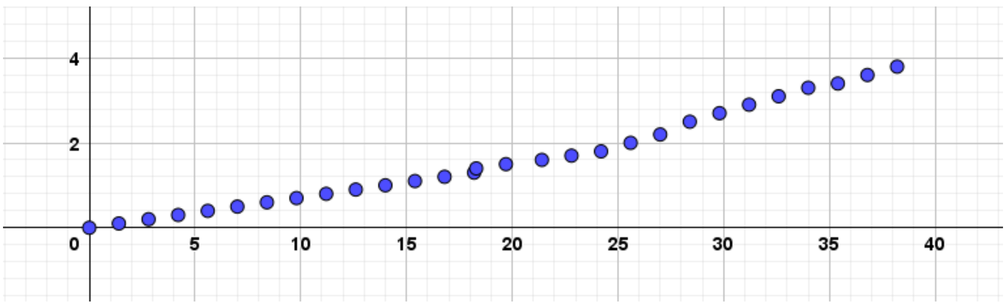
Lösungsvorschlag

Hinweis: Diese Lösung wurde an einem steilen Wanderweg in Sinzig - Bad Bodendorf erstellt und stellt lediglich einen Lösungsvorschlag dar. Je nach Lernort weichen die Ergebnisse ab.

A1 Die folgende Tabelle verzeichnet die gemessenen Werte:

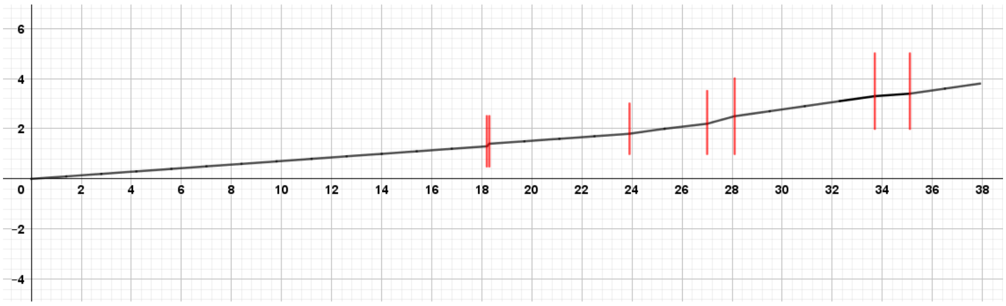
Horizontal-entfernung in Metern	Höhe in Metern	Horizontal-entfernung in Metern	Höhe in Metern
0	0	$19,7$	$1,5$
$1,4$	$0,1$	$21,4$	$1,6$
$2,8$	$0,2$	$24,2$	$1,8$
$4,2$	$0,3$	$25,6$	2
7	$0,5$	$28,4$	$2,5$
$9,8$	$0,7$	$31,2$	$2,9$
$12,6$	$0,9$	34	$3,3$
14	1	$35,4$	$3,4$
$18,2$	$1,3$	$36,8$	$3,6$
$18,3$	$1,4$	$38,2$	$3,8$

Eingetragen in ein Koordinatensystem ergibt sich die folgende Abbildung:

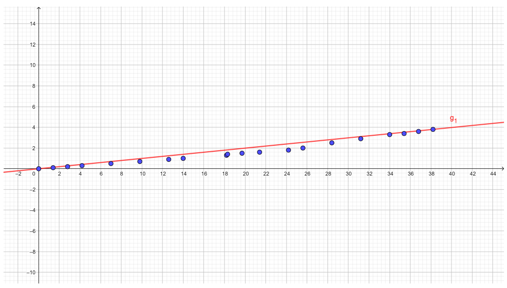


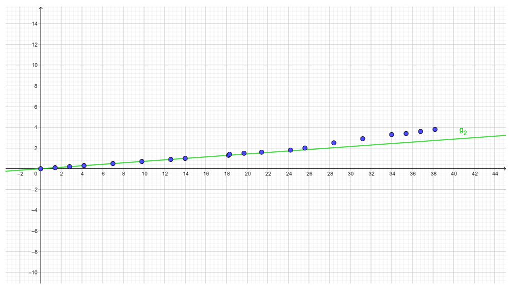
A2 An dem ausgewählten Lernort ist die Zuordnung *Horizontalentfernung in Metern* $\to$ *Höhe in Metern* nicht proportional. Das kann zum Beispiel mit der nicht vorhandenen Quotientengleichheit begründet werden. Bei einer proportionalen Funktion mit der Gleichung $y = mx$ müsste der Quotient $\frac{y}{x}$ für $x \neq 0$ immer sein. Hier sind aber die Quotienten $\frac{y_1}{x_1} = \frac{0,2\text{ m}}{2,8\text{ m}} \approx 0,07$ und $\frac{y_2}{x_2} = \frac{2,5\text{ m}}{28,4\text{ m}} \approx 0,089$ nicht gleich. Also ist die Zuordnung in diesem Fall nicht proportional. Das lässt sich auch daran erkennen, dass die in das Koordinatensystem eingezeichneten Wegpunkte nicht auf einer Linie verlaufen.

A3 Der betrachtete Weg steigt nicht an allen Stellen gleich stark an. Zu Beginn ist die Steigung relativ gleichmäßig und gering. Danach variiert die Steigung stärker und der Weg steigt steiler an. Betrachtet man den Funktionsgraphen, so erkennt man, dass der Weg näherungsweise als abschnittsweise lineare Funktion modelliert werden kann. Die Unterteilung in lineare Abschnitt ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



B1 Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Gerade zu wählen, die den Weg annähernd beschreibt. Zwei Möglichkeiten sind im Folgenden abgebildet:



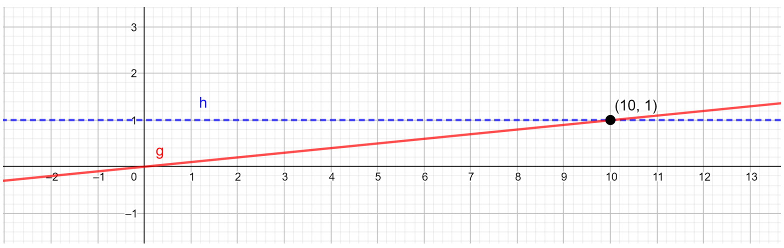


Die Funktion g_1 (links) entsteht durch das Verbinden des ersten und des letzten gemessenen Punktes und hat die Durchschnittssteigung des Weges, während die Funktion g_2 (rechts) die Steigung hat, die der Weg zu Beginn hat.

B2 Exemplarisch soll die Funktionsvorschrift der Funktion g_1 bestimmt und im Folgenden mit g bezeichnet werden. Da es sich um eine lineare Funktion handelt, hat sie die allgemeine Form $g(x) = mx + b$. Zudem verläuft sie durch den Ursprung, weshalb $b = 0$ gesetzt werden kann. Die Steigung der Funktion kann mithilfe eines Steigungsdreiecks berechnet werden. Da die Funktion durch den ersten und den letzten gemessenen Wegpunkt verläuft, ergibt sich $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3{,}8-0}{38{,}2-0} \approx 0,01$. Somit ist die Funktionsgleichung: $g(x) = 0,1x$.

B3 Um die Strecke zu berechnen, die das Kind bereits zurück gelegt hat, rechnet man:
$g(x) = 0,1x = 1 \Rightarrow x = 10$
Das Kind hat also bereits 10 Meter zurückgelegt.
Die Länge des gesamten Weges kann analog berechnet werden:
$g(x) = 0,1x = 3,8 \Rightarrow x = 38$
Das Kind hat also noch 28 Meter vor sich.

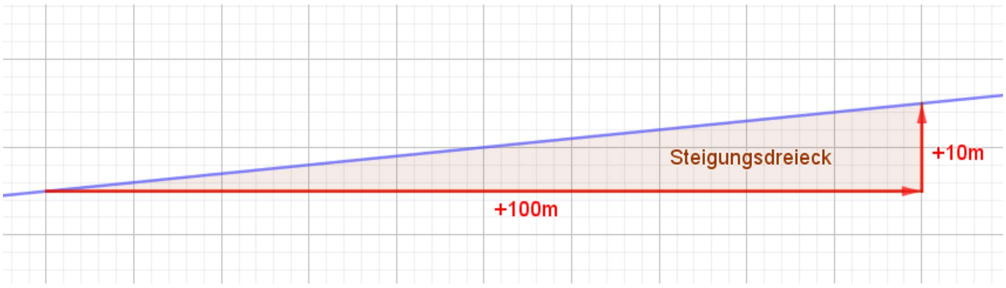
Zeichnerisch wird dies gelöst, indem der Schnittpunkt der Funktionen $h(x) = 1$ und g abgelesen wird:



C1 Die Zahl gibt die Steigung in Prozent an. $12\,\%$ Steigung bedeutet: Auf je 100 Meter Horizontalentfernung nimmt die Höhe um jeweils 12 Meter zu.

$$\text{Steigung: } \frac{12 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0,12 = 12\,\%$$

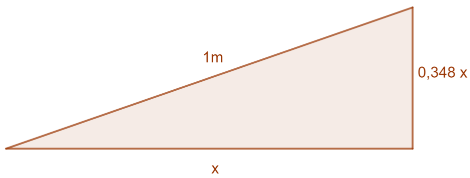
C2 Auf dem Schild an dieser exemplarischen Straße müsste $10\,\%$ stehen. Dies ist leicht aus der Funktionsvorschrift $g(x) = 0.1x$ abzulesen. Da die Funktion g den ganzen Weg annähert, gilt das Schild nicht nur für einen Abschnitt, sondern für die komplette Straße.



C3 Gesucht ist die zurückgelegte Höhe $0,348x$ (siehe Abbildung). Der Satz des Pythagoras liefert

$$x^2 + (0,348x)^2 = 1^1 = 1$$

Daraus folgt $1,12x^2 \approx 1$ und schließlich $x \approx 0,944$. (Wir interessieren uns nur für die positive Lösung der Gleichung.) Daraus folgt $0,348x \approx 0,33$.



Wenn man die Straße einen Meter hinaufgeht, überwindet man also eine Höhe von circa 33 Zentimetern. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich dann vorstellen wie diese Steigung an ihrem Lernort aussehen würde. Dabei sollten sie die vorhandene Steigung des Weges beachten oder an einer nahe gelegenen flachen Stelle arbeiten.

C4 Diese Teilaufgabe ist eine offene Diskussion.

Didaktischer Kommentar

In diesem Spaziergang geht es um proportionale Funktionen und deren Steigung. Somit eignet sich dieser Spaziergang für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1. Für die Bearbeitung dieser Aufgabe werden ein steiler Wald- oder Feldweg und zusätzlich Schreibmaterial, ein Geodreieck, ein Taschenrechner und ein Maßband benötigt. Es ist hilfreich, wenn vor dem Besuch des außerschulischen Lernortes proportionale Funktionen und deren Graphen besprochen worden sind. Insbesondere sollte den Schülerinnen und Schülern bekannt sein, was der Unterschied zwischen linearen und proportionalen Funktionen bedeutet. Sie sollten außerdem wissen, wie mithilfe eines Steigungsdreiecks eine Funktion f mit der Form $f(x) = mx + b$ bestimmt wird. Mehr zu linearen Funktionen und deren Lagebeziehungen kann nach diesem Mathematischen Spaziergang im Unterricht behandelt werden.